Pour acquérir les automatismes

1 Questions Flash

Diaporama

20 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-18

Passer de la forme exponentielle à la forme algébrique

Dans les exercices 2 à 6, écrire sous forme algébrique les expressions données.

2 $e^{i\pi}$ $e^{i\frac{\pi}{2}}$ $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $e^{-i\pi}$

3 $e^{i\frac{\pi}{6}}$ $e^{i\frac{\pi}{4}}$ $e^{i\frac{\pi}{3}}$ e^{i0}

4 $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

5 $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

6 $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ $e^{-i\frac{5\pi}{2}}$

Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle

Dans les exercices 7 à 13, écrire sous la forme $re^{i\theta}$ les nombres complexes suivants :

7 2 -3 i $-6i$

8 i $-3i$ 5 -6

9 $1+i$ $1-i$ $-1+i$ $-1-i$

10 $2+2i$ $2-2i$ $-4-4i$ -4

11 $\sqrt{3}+i$ $\sqrt{3}-i$ $-1-i\sqrt{3}$ $-1+i\sqrt{3}$

12 $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

13 $1+i\sqrt{3}$ $1-i\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}-i$ $-\sqrt{3}+i$

Utiliser les formules de trigonométrie

Dans les exercices 14 à 17, exprimer en fonction de cosx et sinx les expressions suivantes :

14 $\cos(\pi+x)$ $\sin(\pi+x)$

15 $\cos(\pi-x)$ $\sin(\pi-x)$

16 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

17 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

Linéarisation

18 Linéariser $\cos^2\frac{\pi}{12}$ et $\sin^2\frac{\pi}{12}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

19 Linéariser $\cos^2\frac{5\pi}{12}$ et $\sin^2\frac{5\pi}{12}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Primitives

Dans les exercices 20 à 23, déterminer une primitive F de chacune des fonctions f suivantes sur l'ensemble $\mathbb{R}$.

20 $f(x)=2\cos^2x+5$

22 $f(x)=\cos^2x+2x-3$

21 $f(x)=3\sin^2x-2$

23 $f(x)=3x^2-2\sin^2x$

Transformations du plan

24 Quelle transformation du plan associe au point M d'affixe z le point M′ d'affixe $z'=z+2$?

25 Quelle transformation du plan associe au point M d'affixe z le point M′ d'affixe $z'=2z$?

26 Quelle transformation du plan associe au point M d'affixe z le point M′ d'affixe $z'=iz$?

27 On considère la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $2+3i$ et le point M d'affixe $z=1+i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

28 On considère la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $1-2i$ et le point M d'affixe $z=2+2i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

29 On considère l'homothétie de centre O et de rapport 3 et le point M d'affixe $z=2+4i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

30 On considère l'homothétie de centre O et de rapport 2 et le point M d'affixe $z=1-2i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

31 On considère la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et le point M d'affixe $z=1-i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

32 On considère la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point M d'affixe $z=2-i$. Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Écriture exponentielle d'un nombre complexe

→ Aide Cours 1A et 1B p. 288

Question de cours

33 On donne le nombre complexe $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ non nul.

1. Rappeler l'expression de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ à l'aide des fonctions sinus et cosinus.

2. En déduire la forme algébrique du nombre z.

34 Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **c.** $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

d. $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ **e.** $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ **f.** $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 289

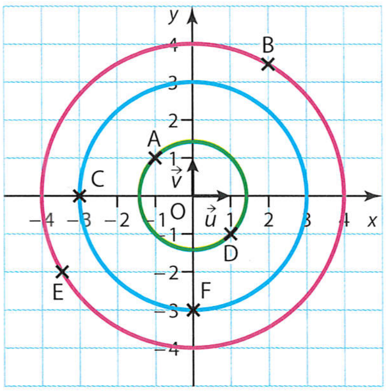
35 Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a. $z = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$ **b.** $z = 8\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ **c.** $z = -6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

d. $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{27\pi}{2}}$ **e.** $z = \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{19\pi}{6}}$ **f.** $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 289

36 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.



1. Lire sur le graphique les affixes des points A, B, C, D, E et F exprimées sous forme exponentielle.

2. Exprimer les affixes de ces points sous forme algébrique.

37 Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

a. $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} \times 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

c. $z = 7\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \times 3\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$ **d.** $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} \times 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$

e. $z = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \times \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$ **f.** $z = \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{20}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

38 Après avoir déterminé le module et un des arguments de chacun des nombres complexes suivants, l'écrire sous forme exponentielle :

a. $z = 1 + \mathrm{i}$ **b.** $z = -2\mathrm{i}$ **c.** $z = -5$

d. $z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$ **e.** $z = -2 + 2\mathrm{i}$ **f.** $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 289

39 **1.** Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

2. En déduire la forme exponentielle de :

a. $-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ **b.** $3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ **c.** $3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 289

Vrai ou faux

40 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

Soit les nombres complexes :

$z_1 = 3 - 3\mathrm{i}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_3 = (1 + \mathrm{i})^2$.

1. $z_1 \times z_2 = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

2. $z_1 \times z_3 = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

3. $\dfrac{z_1}{z_3} = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

4. $z_2 \times z_3^2 = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

41 Exprimer chacun des nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

a. $z = 2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$ **b.** $z = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^4$

c. $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$ **d.** $z = -\cos\dfrac{\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$

42 Soit $z_1 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $z_3 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a. $\dfrac{z_1}{z_2}$ **b.** $\dfrac{z_2}{z_3}$ **c.** $\dfrac{z_3}{z_1}$ **d.** $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$

43 Soit $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et $z_3 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{3}}$.

Écrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes suivants :

a. $\dfrac{z_1}{z_2}$ **b.** $\dfrac{z_2}{z_3}$ **c.** $\dfrac{z_1^2}{z_2}$ **d.** $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$

Applications aux fonctions trigonométriques

→ Aide Cours 2A p. 288

Question de cours

44 On rappelle que $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Démontrer que $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$.

45 **1.** En remarquant que $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7\pi}{12}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

46 Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

a. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ **b.** $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ **d.** $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

47 **1.** En remarquant que $2\times\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

2. En déduire celles de $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\cos\frac{7\pi}{8}$.

3. Quelle est la valeur de :

$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$?

Transformation de $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t+\varphi)$ et inversement

48 On pose $f(t)=\sqrt{3}\cos t-\sin t$.

1. Déterminer les réels A ($A>0$) et φ ($\varphi\in\,]-\pi\,;\pi]$) tels que $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

2. Résoudre sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $f(t)=1$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

49 On pose $f(t)=\cos 2t-\sqrt{3}\sin 2t$.

1. Déterminer les réels A ($A>0$) et φ ($\varphi\in\,]-\pi\,;\pi]$) tels que $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$.

2. Résoudre sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $f(t)=2$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

50 On pose $f(t)=\cos 3t+\sin 3t$.

1. Déterminer les réels A ($A>0$) et φ ($\varphi\in\,]-\pi\,;\pi]$) tels que $f(t)=A\cos(3t+\varphi)$.

2. Résoudre sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $f(t)=1$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

51 On considère $f(t)=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(2t)+b\sin(2t)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

52 On considère $f(t)=2\cos\left(3t-\frac{5\pi}{6}\right)$.

Exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(3t)+b\sin(3t)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

53 On considère $f(t)=\sqrt{3}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$.

Exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(t)+b\sin(t)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

54 On considère $f(t)=4\sin\left(t-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Exprimer $f(t)$ sous la forme $a\cos(t)+b\sin(t)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 289

Linéarisation

→ Aide Cours 2C p. 290

Question de cours

55 **1.** À partir de l'égalité $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$, établir que $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$.

2. À partir de l'égalité $\cos(2\theta)=1-2\sin^2\theta$, établir que : $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$.

56 En utilisant les formules de linéarisation, déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 291

57 **1.** Linéariser $\cos^2\frac{11\pi}{12}$ et $\sin^2\frac{11\pi}{12}$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

3. En utilisant la parité des fonctions cosinus et sinus, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$.

Primitives

→ Aide Cours 2D p. 290

Question de cours

58 On rappelle que $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$ et qu'une primitive de $\cos(2\theta)$ est $\frac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Déterminer alors une primitive de $\cos^2\theta$.

*Dans les exercices **59** à **63**, déterminer une primitive F de chacune des fonctions f suivantes sur l'ensemble $\mathbb{R}$.*

59 **a.** $f(x)=\sin^2 x-6$ **b.** $f(x)=2\cos^2 x-8$

60 **a.** $f(x)=-\cos^2 x+2x-4$

b. $f(x)=3x^2-4\cos^2 x-4\sin^2 x$

61 $f(x)=3\cos^2 x-2x-7+\sin^2 x$

62 $f(x)=3\sin^2 x+x+3\cos^2 x$

63 $f(x)=8\cos^2 x+8\sin^2 x$

*Dans les exercices **64** à **67**, déterminer la primitive F de chacune des fonctions f suivantes sur l'ensemble $\mathbb{R}$ vérifiant la condition imposée.*

→ Voir Exercice résolu 4 p. 291

64 $f(x)=\cos^2 x-1$ et $F(0)=2$.

65 $f(x)=2\sin^2 x-4$ et $F(\pi)=0$.

66 $f(x)=-\sin^2 x+x-2$ et $F(0)=0$.

67 $f(x)=3x^2-2\sin^2 x$ et $F(0)=0$.

Exercices

Pour commencer

Expression complexe de transformations du plan

→ Aide Cours 3 p. 290

Question de cours

68 Au point M d'affixe z, on associe par une transformation le point M′ d'affixe z'.

1. Quelle transformation du plan correspond à l'écriture $z' = z + b$? En donner l'élément caractéristique.

2. Quelle transformation du plan correspond à l'écriture $z' = az$ avec a réel ? En donner les éléments caractéristiques.

3. Quelle transformation du plan correspond à l'écriture $z' = az$ avec a nombre complexe de module 1 ? En donner les éléments caractéristiques.

Dans les exercices 69 à 74, déterminer la transformation du plan qui associe au point M d'affixe z le point M′ d'affixe z′ donné.

→ Voir Exercice résolu 5 p. 291

69 $z' = z + 2 + 3\mathrm{i}$

70 $z' = -5z$

71 $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z$

72 $z' = z - 4 - \mathrm{i}$

73 $z' = 4z$

74 $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}z$

75 On considère la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-4 - 2\mathrm{i}$ et le point M d'affixe $z = 3 + 5\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

76 On considère la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-1 - 3\mathrm{i}$ et le point M d'affixe $z = 4 - 3\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

77 On considère l'homothétie de centre O et de rapport 5 et le point M d'affixe $z = 4 + 8\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

78 On considère l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$ et le point M d'affixe $z = 4 - 2\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

79 On considère la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et le point M d'affixe $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

80 On considère la rotation de centre O et d'angle $-\frac{5\pi}{6}$ et le point M d'affixe $z = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.
Déterminer l'affixe du point M′, image de M par cette transformation.

Équations du premier degré

Question de cours

81 On considère l'équation du premier degré de la forme $az + b = 0$ où z est l'inconnue et a et b sont deux nombres complexes, a étant non nul.

1. Quel est le nombre de solutions de cette équation ?

2. Exprimer alors la valeur de z en fonction de a et b.

82 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z + 4 + 2\mathrm{i} = 0$
b. $z - 3 + 5\mathrm{i} = 0$
c. $2z - 4\mathrm{i} = 0$

83 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $3z - 6 = 3\mathrm{i}$
b. $\mathrm{i}z + 5 = 4 + \mathrm{i}$
c. $2\mathrm{i}z - 2 = z - 3$

84 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $3\mathrm{i}z - 2 + 4\mathrm{i} = 2z - 4 - \mathrm{i}$
b. $(z + 2 - \mathrm{i})(2z - 4 + 6\mathrm{i}) = 0$
c. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2 - \mathrm{i}$

Équations du second degré de la forme $z^2 = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Question de cours

85 On considère l'équation du second degré de la forme $z^2 = a$ où a est un réel.

1. Si $a > 0$ alors, en remarquant que $a = (\sqrt{a})^2$, donner les deux solutions réelles de cette équation.

2. Si $a = 0$ alors donner la valeur de la solution unique de cette équation.

3. Si $a < 0$ alors en remarquant que $a = (\mathrm{i}\sqrt{-a})^2$, donner les deux solutions complexes conjuguées de cette équation.

86 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 = 2$
b. $z^2 = 16$
c. $2z^2 = 128$
d. $3z^2 = 12$

87 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 = -9$
b. $z^2 = -12$
c. $2z^2 = -32$
d. $4z^2 = -25$

88 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
a. $z^2 + 5 = 0$
b. $z^2 - 8 = 0$
c. $2z^2 + 18 = 0$
d. $5z^2 - 125 = 0$

Écriture exponentielle d'un nombre complexe

QCM

89 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse, puis justifier.*

1. Soit $z=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors l'écriture exponentielle du conjugué de z est :

a. $\bar{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **b.** $\bar{z}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **c.** $\bar{z}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ **d.** $\bar{z}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2. Un argument de $z=\sqrt{7}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{7}}$ est :

a. $\frac{\pi}{14}$ **b.** $\frac{13\pi}{14}$ **c.** $-\frac{2\pi}{9}$ **d.** $\sqrt{7}$

On considère le nombre complexe $z=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

3. Le carré de z est égal à :

a. $-4\mathrm{i}$ **b.** -4 **c.** $-2\mathrm{i}$ **d.** 4

4. L'inverse de z est égal à :

a. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **b.** $-2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **c.** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **d.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Vrai ou faux

90 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. Une écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $z=\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$ est $z=2\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. Si $z_1=3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$, alors le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ vaut $3\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi}$.

3. Soit $z=-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Son module est égal à $\sqrt{2}$.

4. Soit $z=-\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Un de ses arguments est égal à $\frac{3\pi}{4}$.

91 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ et $z_B=\bar{z}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_A et z_B, puis placer les points A et B.

2. On désigne par C le point d'affixe $z_C=4\mathrm{i}$ et par Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z+2\sqrt{3}-2\mathrm{i}|=4$.

a. Montrer que le point C appartient à l'ensemble Γ.

b. Justifier que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer l'ensemble Γ sur la figure.

3. Soit D le point d'affixe $z_D=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Écrire z_D sous forme algébrique et placer le point D.

b. Montrer que les points A, B, C et D sont alignés.

QCM

92 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère les nombres complexes $z_1=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$, d'images respectives A et B.

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse, puis justifier.

1. Le module de z_1 et un argument de z_1 sont respectivement :

a. 2 et $\frac{\pi}{3}$ **b.** $\sqrt{2}$ et $-\frac{\pi}{3}$ **c.** 2 et $-\frac{\pi}{3}$ **d.** $\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{3}$

2. La forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$ est égale à :

a. $\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}$ **b.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ **c.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ **d.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. Un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à :

a. $-\frac{5\pi}{6}$ **b.** $-\frac{\pi}{2}$ **c.** $\frac{5\pi}{6}$ **d.** $\frac{\pi}{2}$

4. L'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que $|z-z_1|=2$ est :

a. la droite (AB). **b.** une demi-droite d'origine A.

c. un point. **d.** un cercle de centre A.

5. L'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, est :

a. une droite. **b.** un cercle de centre O.

c. une demi-droite privée de son origine. **d.** un point.

6. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2-4z+7=0$$

a. l'équation n'a pas de solution.

b. les solutions sont $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$.

c. a une seule solution.

d. les solutions sont $2-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $2+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

93 Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points B et C d'affixes respectives : $z_B=4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$ et $z_C=4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$.

1. Vérifier que $z_B=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

2. En déduire une écriture exponentielle du nombre complexe z_C.

3. Placer précisément les points B et C dans le repère défini précédemment.

4. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.

94 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$z_A=-2$, $z_B=2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_C=3+3\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_P=10$.

1. Placer les points A et P dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_B et z_C.
3. Utiliser les cercles de centre O et de rayon respectifs 4 et 6 pour construire avec précision les points B et C.
4. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.

95 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 1 + i$ et $b = a \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b.
b. Placer les points A et B dans le repère.
2. a. Démontrer que le triangle OAB est un triangle rectangle.
b. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB et construire ce cercle.

Applications aux fonctions trigonométriques

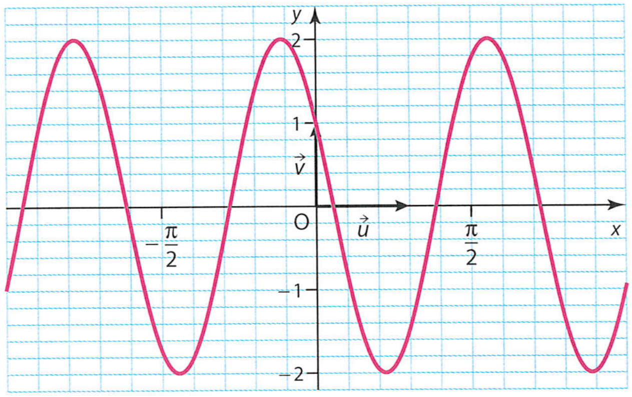
96 On considère les nombres complexes $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
1. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Déterminer la forme exponentielle du quotient $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
5. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

97 On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes :
$a = 1 + i$ et $b = a \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b.
2. Vérifier que $b = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$.
3. En déduire que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

98 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 3 - i\sqrt{3}$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$.
1. Déterminer la nature du triangle OAB. Justifier.
2. a. Donner la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
b. Vérifier que : $z_B = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2} + i\frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$.
3. a. Déterminer la forme exponentielle de z_A.
b. Vérifier que : $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
4. À l'aide des questions **2.** et **3.** donner la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

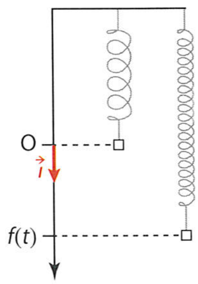
Transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$

99 Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.
1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$, où a et b sont deux constantes réelles, sont solutions de l'équation différentielle (E).
2. La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, représente une solution particulière notée f de l'équation différentielle (E). La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 1) et le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ est égal à $-3\sqrt{3}$.



a. En déduire les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f'(0)$.
b. Déterminer cette solution particulière f.
c. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.
3. a. Montrer que $\frac{7\pi}{18}$ et $\frac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation, d'inconnue x, $f(x) = 0$.
Déterminer deux autres solutions de cette équation.
b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{7\pi}{18}\,;\frac{13\pi}{18}\right]$.

100 Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 9\ \text{N·m}^{-1}$. Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.
À chaque instant t, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $(O\,;\vec{i})$.



Les lois de la Physique montrent que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{2}(\cos 3t + \sin 3t)$.
1. Vérifier qu'à l'instant $t = 0$, le mobile est au point $f(0) = 0{,}5$ m et a une vitesse initiale $f'(0) = 1{,}5\ \text{m·s}^{-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel t :
$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Résoudre l'équation $f(t)=0$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$.
4. À partir de l'instant $t=0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (On donnera la réponse arrondie au millième de seconde.)

Expression complexe de transformations du plan

101 GEOGEBRA Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
Pour l'ensemble de cet exercice, on pourra s'appuyer sur un logiciel de géométrie dynamique.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Soit C l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
1. Déterminer la forme exponentielle de z_B.
2. Déterminer l'écriture complexe de la rotation.
3. En déduire celle de z_C, affixe du point C.
4. Déterminer la nature du triangle ABC.

102 Le plan complexe est muni d'un r thonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A=-2\sqrt{3}+2i$ et $z_B=-2\sqrt{3}-2i$.
1. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_A et z_B, puis placer les points A et B.
2. On désigne par C l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
a. Calculer l'affixe z_C du point C, puis placer ce point sur la figure.
b. Montrer que le quadrilatère OCAB est un losange.
3. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z+2\sqrt{3}-2i|=4$.
a. Montrer que le point C appartient à l'ensemble Γ.
b. Justifier que Γ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c. Tracer l'ensemble Γ sur la figure.
4. On note D l'image du point C par la translation de vecteur $\vec{w}=-7\vec{u}$.
a. Placer le point D sur la figure.
b. Le point D est-il sur le cercle Γ ? Justifier.

103 Le plan est muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité : 3 cm).
1. On considère le point A d'affixe $z_A=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ et le point B d'affixe $z_B=\frac{1}{z_A}$.
Déterminer la forme algébrique de z_B.
2. Déterminer le module et un argument de z_A. En déduire une forme exponentielle de z_A puis une forme exponentielle de z_B.
3. a. Placer les points A et B dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
b. Montrer que le triangle AOB est rectangle.
4. Soit C le point d'affixe $z_C=e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et C′ le point d'affixe $z_{C'}=\frac{1}{z_C}$.
a. Donner une forme exponentielle de $z_{C'}$.
b. Montrer que le point C′ est l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
5. Soit D le point d'affixe $z_D=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i$.
Déterminer l'affixe du vecteur de la translation qui transforme D en A.

Équations du premier degré

104 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.
1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $iz+\sqrt{3}-3i=0$ (on donnera les solutions sous forme algébrique).
2. On note A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :
$a=3+i\sqrt{3}$ et $b=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
a. Déterminer la forme exponentielle de a.
b. Exprimer le nombre complexe b sous forme algébrique.
c. Placer les points A et B dans le repère.
d. Démontrer que le triangle BOA est un triangle isocèle.

105 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z-iz\sqrt{3}=4$. On donnera la forme algébrique de la solution.
2. On considère les nombres complexes $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=z_1\times e^{i\frac{\pi}{2}}$.
On note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2.
a. Écrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
b. Placer les points A et B dans le repère.
c. Montrer que le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle en O.
3. Soit le nombre complexe z_3 défini par $z_3=z_1+z_2$.
a. Écrire z_3 sous forme algébrique.
b. Placer le point C d'affixe z_3 dans le repère.
c. Quelle est la nature du quadrilatère OACB ?

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-19

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.

	V	F
106 $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \cos\frac{1}{3}x + \sqrt{3}\sin\frac{1}{3}x$.		
107 $f(0) = 1$.		
108 $f'(x) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$.		
109 f est solution de l'équation différentielle : $y'' - 9y = 0$.		
110 La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ est : $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.		
111 La solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est : $-\frac{\pi}{2}$.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

112 Le nombre complexe solution de l'équation $(1 + \mathrm{i})z - 3 + \mathrm{i} = 0$ est :

a. $1 - 2\mathrm{i}$ **b.** $2 - \mathrm{i}$ **c.** $2 - 2\mathrm{i}$

113 L'écriture exponentielle du nombre complexe $-1 + \mathrm{i}$ est :

a. $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **b.** $\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **c.** $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

114 Si $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, alors l'écriture exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$ **b.** $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ **c.** $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$

115 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, l'image du point M d'affixe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est le point M′ d'affixe z' :

a. $z' = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ **b.** $z' = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ **c.** $z' = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

116 Si les points A, B, C ont pour affixes respectives $z_A = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, alors le triangle ABC est :

a. rectangle **b.** isocèle **c.** équilatéral

117 L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-2 - 3\mathrm{i}$, qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' est :

a. $z' = z + 2 + 3\mathrm{i}$ **b.** $z' = z - 2 - 3\mathrm{i}$ **c.** $z' = z - 2 + 3\mathrm{i}$

→ Vérifier les résultats p. 324

118 In English

1. Find the modulus and argument of the complex numbers $z_1 = 1 + i$ and $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.
2. Write each of these numbers in the exponential form.
3. Hence find in the exponential form $re^{i\theta}$ where $-\pi < \theta \leqslant \pi$ and $r > 0$ the following complex numbers:

a. $z_1 \times z_2$ **b.** $\dfrac{z_1}{z_2}$

c. z_1^2 **d.** z_2^3

e. $\dfrac{z_1^2}{z_2^3}$

Vrai ou faux

119 COMPÉTENCE S'approprier, raisonner

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

Pour les questions **1.** et **2.**, on considère le nombre complexe $z = -2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Le nombre complexe z^3 est égal à -8.
2. Un argument de z est $-\dfrac{2\pi}{3}$.
3. La forme exponentielle du nombre complexe $z = \sqrt{6} + i\sqrt{6}$ est $6e^{i\frac{\pi}{4}}$.
4. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{6}$.
Le nombre z_2 est égal à $\overline{z_1}$.

QCM

120 COMPÉTENCE S'approprier, raisonner

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse, puis justifier.

On considère les nombres complexes $z = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = 2\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

1. La forme algébrique de z est égale à :
a. $-1 + i\sqrt{3}$ **b.** $1 + i\sqrt{3}$
c. $2 + i\sqrt{3}$ **d.** $\sqrt{3} - i$

2. Le nombre complexe z' est le nombre complexe :
a. opposé de z. **b.** inverse de z.
c. conjugué de z. **d.** opposé du conjugué de z.

3. Le nombre $z \times z'$:
a. est un nombre réel.
b. est un nombre imaginaire pur.
c. a pour module 2.
d. est un nombre complexe dont un argument est $\dfrac{4\pi}{3}$.

4. Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = i$ est :
a. $\dfrac{\pi}{3}$ **b.** $\dfrac{5\pi}{6}$ **c.** $\dfrac{\pi}{6}$ **d.** $-\dfrac{\pi}{6}$

121 COMPÉTENCE Réaliser, valider

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les nombres complexes $z_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{1+i}$ et $z_2 = \dfrac{4i}{1+i\sqrt{3}}$.

1. Écrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Placer avec précision les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. (On laissera apparent les traits de construction.)
3. Calculer sous forme algébrique le produit $z_1 \times z_2$.
4. Déterminer la forme exponentielle du produit $z_1 \times z_2$. En déduire le module et un argument de $z_1 \times z_2$.
5. Déduire des questions **3.** et **4.** les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

122 COMPÉTENCE Analyser, communiquer

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère l'équation (E) d'inconnue z : $(2 - i)z = 2 - 6i$.
a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On notera z_1 la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
b. Déterminer la forme exponentielle de z_1.
c. Soit z_2 le nombre complexe défini par $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1$.
Déterminer la forme exponentielle puis algébrique de z_2.
2. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$, $z_B = -2 - 2i$ et $z_C = -4i$.
a. Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
c. Déterminer la nature du triangle ABC. On justifiera.

123 COMPÉTENCE Raisonner, valider

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_B = iz_A.$$

1. Donner la forme algébrique de z_B.
2. a. Déterminer $|z_A|$ et $|z_B|$.
b. Donner les longueurs OA et OB.
3. Tracer le triangle OAB sur la figure.
4. a. Déterminer un argument de z_A et un argument de z_B.
b. En déduire une mesure des angles $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OA})$ et $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB})$.
5. Donner la nature précise du triangle OAB. Justifier la réponse.
6. On considère le milieu K du segment [AB].
a. Déterminer l'affixe z_K de K.
b. Placer le point K sur la figure.
7. On note C le point tel que OACB soit un parallélogramme.
a. Tracer le parallélogramme OACB sur la figure.
b. Déterminer l'affixe z_C de C. Justifier la réponse.
c. Donner la nature précise du parallélogramme OACB. Justifier la réponse.

TP

Étude d'une configuration géométrique

CAPACITÉ Savoir représenter avec précision des points dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Placer les points A et B d'affixe respectives $z_A=\sqrt{3}+i$ et $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ dans le repère avec précision. Se munir d'un compas et d'un rapporteur.

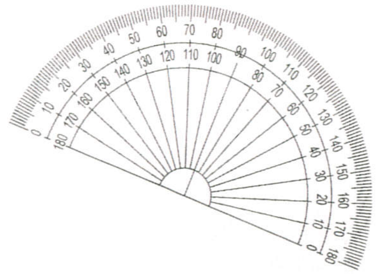
Pour le point A :

– l'ordonnée est entière donc A est situé sur la droite horizontale d'équation $y=\text{Im}(z_A)$;

– en calculant $|z_A|$, A appartient au cercle de centre O et de rayon $|z_A|$.

Pour le point B :

On rappelle que le module représente la distance OB et qu'un argument correspond à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OB})$ en radians.



2. Déterminer la forme algébrique de z_I, affixe du point I, milieu du segment [AB].

Placer le point I dans le repère.

3. Déterminer par le calcul le module de z_I.

4. Déterminer par le calcul un argument de z_I.

5. Exprimer alors l'affixe de z_I sous forme exponentielle.

6. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

GeoGebra Python *En salle informatique* lienmini.fr/10445-20

1. Dans GeoGebra, placer les points A et B d'affixe respectives $z_A=\sqrt{3}+i$ et $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Pour le point A : dans la barre de saisie, taper : z_A=sqrt(3)+i. La commande **sqrt** est l'écriture d'une racine carrée.

Pour le point B : dans la barre de saisie, taper : z_B=2exp(i*2π/3). La commande **exp** est l'écriture de la fonction exponentielle.

2. On fournit le programme suivant en langage Python :

```
a=complex(3**0.5,1)
b=rect(2,2*pi/3)
c=(a+b)/2
print(c)
print(polar(c))
```

Que fait cet algorithme ? Le programmer et donner les résultats affichés.

3. Déterminer la forme algébrique de z_I, affixe du point I, milieu du segment [AB]. Comparer avec les résultats obtenus à la question **2.**

4. Placer le point I dans le fichier GeoGebra.

5. Déterminer par le calcul le module de z_I.

6. En faisant un clic droit sur le point I, puis en sélectionnant **Coordonnées polaires**, donner une mesure en degrés d'un argument de z_I. En déduire une mesure exprimée en radians de cet argument.

Comparer alors avec les résultats obtenus à la question **2.**

7. Exprimer alors l'affixe de z_I sous forme exponentielle.

8. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus à la question **6.** de la partie « Calculs ».

Sujet résolu BAC

124 Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. Soit A le point d'affixe $z_A = 3 + i\sqrt{3}$.

1. a. Déterminer le module et un argument de z_A.

b. En déduire une forme exponentielle de z_A.

c. Placer le point A dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$. On appelle B l'image du point A par la transformation R. On note z_B l'affixe du point B.

a. Calculer la forme algébrique de z_B.

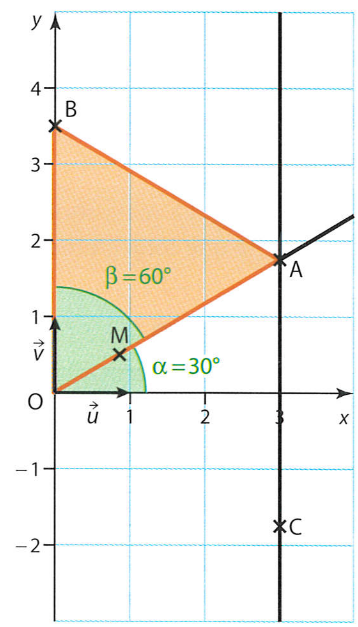
b. Placer le point B dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

3. Soit T la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -2\sqrt{3}i$ dont l'écriture complexe est $z' = z - 2\sqrt{3}i$. On appelle C l'image du point A par la transformation T. On note z_C l'affixe du point C.

a. Calculer la forme algébrique de z_C.

b. Placer le point C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On utilise les formules de calculs du module : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et pour un argument θ, $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$. On obtient alors $z_A = re^{i\theta}$. → Voir Exercice résolu 1 p. 289 On place le point A en remarquant que : • $\text{Re}(z_A) = 3$ donc A est sur la droite verticale d'équation $x = 3$. • $\arg(z_A) = \frac{\pi}{6}$ dont A appartient à la demi-droite d'origine O telle que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6}$. On pourra convertir en degrés.	**1. a.** $r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. $\cos\theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$. Donc $\theta = \frac{\pi}{6}$. **b.** Donc l'écriture exponentielle de z_A est $2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. **c.** Point A : voir figure ci-contre.
2. Dans l'égalité $z' = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z$, on remplace z par z_A. On utilisera la forme exponentielle de z_A.	**2. a.** $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}$ $= 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$. Donc $z_B = z_B = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ $= 2i\sqrt{3}$. **b.** Point B : voir figure ci-contre.
3. On remarquera que z_A et z_C sont deux nombres complexes conjugués donc A et C sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.	**3. a.** $z_C = z_A - 2i\sqrt{3} = 3 + i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3}$ $= 3 - i\sqrt{3}$. **b.** Point C : voir figure ci-contre.



Exercices

Pour l'épreuve du BAC

SUJET GUIDÉ BAC

125 ***CAPACITÉS***

- Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle.
- Calculer des modules pour trouver des distances.
- Déterminer la nature d'un quadrilatère.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points I, D et N d'affixes respectives $z_I = 3$, $z_D = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ et $z_N = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$.

1. Donner la forme exponentielle des nombres complexes z_I, z_D et z_N.

Méthode On calcule pour chaque nombre complexe sous forme algébrique son module r et un de ses arguments θ. Puis on utilise la forme exponentielle $re^{i}\theta$.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 289

2. Justifier que les points I, D et N sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

Méthode On calcule les trois distances OI, OD et ON en s'appuyant sur les calculs de modules réalisés à la question **1.**

3. Placer les points I, D et N dans le repère$(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

4. Calculer les distances ID et IN ; quelle est la nature du quadrilatère ODIN ?

Méthode La réalisation d'un graphique permet d'émettre une conjecture qu'il faudra démontrer.

126 ***CAPACITÉS***

- Déterminer un module et un argument.
- Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle.
- Déterminer la nature d'un quadrilatère.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_B = \overline{z_A} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Écrire z_A sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

d. Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

2. a. On note C le point d'affixe 2i. Placer le point C dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

Méthode Un losange est avant tout un parallélogramme. On pourra alors prouver par exemple que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CA}$ en vérifiant que $z_{\overrightarrow{OB}} = z_{\overrightarrow{CA}}$.Puis ensuite, on prouvera qu'il a deux côtés consécutifs égaux en prouvant que, par exemple, OB = OC. Le point O, origine du repère, est un choix intéressant.

127 ***CAPACITÉS***

- Déterminer une écriture exponentielle.
- Passer d'une forme exponentielle à une forme algébrique.
- Faire le lien entre forme algébrique et forme trigonométrique.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis par : $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_2 = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1.

2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.

Méthode On rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 289

3. Démontrer que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.

4. En déduire l'écriture algébrique de z_3.

5. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Méthode $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z_3. À partir de l'égalité $z_3 = \frac{1}{2}(z_1 \times z_2)$, déterminer alors une autre expression des parties réelle et imaginaire de z_3. Conclure.

Sujet BAC

QCM

128 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*

1. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -5 + 5\mathrm{i}$ est :

a. $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ **b.** $z = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

c. $z = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **d.** $z = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. Si $z_1 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, alors le produit $z_1 \times z_2$ est un nombre complexe :

a. de module 4 et dont un argument est $\frac{2\pi}{7}$.

b. de module $2\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{5\pi}{12}$.

c. de module 4 et dont un argument est $\frac{5\pi}{12}$.

d. de module $2\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{13\pi}{12}$.

3. Le nombre complexe $\frac{\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}$ est égal à :

a. 1 **b.** i **c.** -1 **d.** $-\mathrm{i}$

4. Le nombre complexe z de module $2\sqrt{3}$ et dont un argument est $\frac{2\pi}{3}$ a pour forme algébrique :

a. $\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$ **b.** $3 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

c. $-\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ **d.** $-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

129 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = z_2 = \overline{z_1}$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_{A} et z_{B}.

b. Écrire z_{A} sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

d. Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

2. On note C le point d'affixe 2i.

a. Placer le point C dans le plan muni du repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

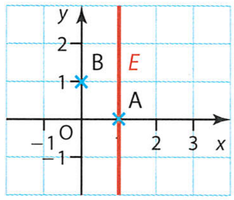
c. Tracer alors le quadrilatère OBAC.

QCM

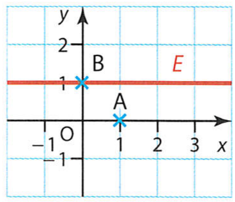
130 *Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. Justifier.*

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, A, B). L'ensemble E des images des nombres complexes z vérifiant la relation $|z| = 1$ est représenté en rouge par :

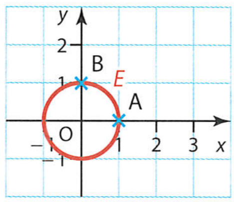
a.



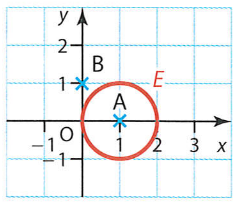
b.



c.



d.



2. Considérons les deux nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Le produit $z_1 \times z_2$ est égal à :

a. $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}$ **b.** $(1 + \sqrt{3})(-1 + \mathrm{i})$

c. $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$ **d.** $1 - \sqrt{3} + 2\mathrm{i}$.

3. On considère le nombre complexe $z = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

La forme algébrique du nombre complexe z est :

a. $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$ **b.** $\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$

c. $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$ **d.** $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}$

4. $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$. La forme exponentielle du nombre complexe $z_1 \times z_2$ est :

a. $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **b.** $-4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

c. $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ **d.** $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

5. La forme exponentielle du nombre complexe $z = -3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$ est :

a. $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ **b.** $6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

c. $6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ **d.** $-6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

6. On considère le complexe $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$.

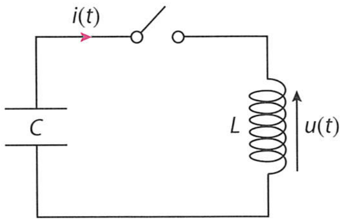
Le nombre complexe z^2 est égal à :

a. $z^2 = 2$ **b.** $z^2 = 4$

c. $z^2 = -4$ **d.** $z^2 = -4\mathrm{i}$

SUJET BAC

131 Un circuit est composé d'une bobine d'inductance L, mesurée en farads, d'un condensateur de capacité C, mesurée en henrys, et d'un interrupteur.
L'unité de temps est la seconde.
On sait que :
$C = 125 \times 10^{-6}$ et
$L = 200 \times 10^{-3}$.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, le circuit est alors parcouru par un courant.



On désigne par :
• $q(t)$ la charge, mesurée en coulombs, du condensateur.
• $i(t)$ l'intensité, mesurée en ampères, du courant qui parcourt le circuit (on rappelle que $i(t) = -q'(t)$, où q' est la dérivée de q).
• $u(t)$ la tension, mesurée en volts, aux bornes de la bobine à l'instant t (on rappelle que $u(t) = -i'(t)$, où i' est la dérivée de i).
À l'instant $t = 0$, la charge du condensateur, mesurée en coulombs, est 10^{-3} et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est nulle. On a donc les conditions initiales suivantes : $q(0) = 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

1. On admet que la charge du condensateur est solution de l'équation différentielle :
$$(\text{E}) : q''(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0.$$
a. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(t) = a\cos(200t) + b\sin(200t)$$
où a et b sont deux constantes réelles, sont solutions de l'équation différentielle (E).
b. Démontrer que l'unique solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales est la fonction q définie par $q(t) = 10^{-3}\cos(200t)$ où t est un réel positif.
2. Montrer que, pour tout t, $u(t) = -8\cos(200t)$.
3. La tension efficace U_{eff} aux bornes de la bobine est définie par : $(U_{\text{eff}})^2 = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{100}}[u(t)]^2\,\text{d}t$.
Déterminer la valeur exacte de U_{eff} (on pourra utiliser la relation $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$).

132 Soit l'équation différentielle : $4y'' + \pi^2 y = 0$, où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.
1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, où a et b sont deux constantes réelles, sont solutions de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(\text{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle qui satisfait aux conditions suivantes :
• la courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
• la tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que pour tout nombre réel x,
$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right).$$
4. Résoudre sur l'intervalle $[-2\,;2]$ l'équation :
$$g(x) = -\frac{1}{2}.$$
5. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;1]$.

133 GEOGEBRA On note g la fonction numérique définie pour tout nombre réel x, par :
$$g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}.$$
1. Vérifier que $g(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
2. Vérifier que $g(0) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $g'(0) = \dfrac{1}{4}$.
3. Soit μ la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{14\pi}{3}\right]$.
a. Calculer μ.
b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant des valeurs exactes :

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{14\pi}{3}$
$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$					
$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$					

c. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\dfrac{14\pi}{3}\right]$.
À l'aide de GeoGebra, tracer la courbe $\mathscr{C}$.
d. La valeur de μ trouvée en **a.** est-elle cohérente avec le graphique effectué en **c.** ?
Pourquoi ?

SUJET BAC

134 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

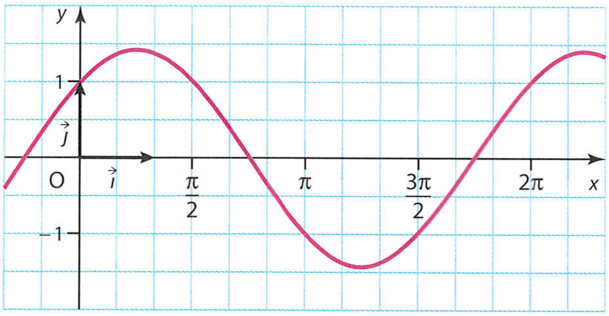
$$f(x) = \cos x + \sin x.$$

1. Vérifier que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$. Que représente $f'(0)$ pour la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$?

2. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Une représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1{,}5$ sur $[0 ; 2\pi]$?

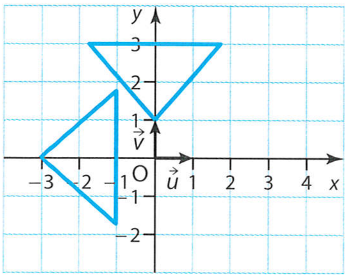
b. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1$ sur $[0 ; 2\pi]$?

c. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$ sur $[0 ; 2\pi]$?

4. Résoudre, dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation $f(x) = 0$.

135 Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -3$; $z_B = -1 + i\sqrt{3}$; $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

1. Sur la figure donnée ci-après, on a tracé deux triangles. L'un est le triangle ABC, l'autre sera noté T.
Placer les points A, B et C sur cette figure.



2. On considère la translation t de vecteur $4\vec{u}$.
Construire les points A′, B′ et C′, images respectives des points A, B et C par la translation t.

2. On admet que le triangle T est l'image du triangle A′B′C′ par une rotation r de centre O.
Quel est l'angle de cette rotation ? (aucune justification n'est demandée).

3. On appelle S le sommet du triangle T ayant une abscisse strictement négative. Placer le point S sur la figure. Quelle conjecture peut-on faire concernant les points O, B et S ?

4. Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B′ puis écrire $z_{B'}$ sous forme exponentielle.

5. On admet que le point S est l'image du point B′ par la rotation r. En déduire l'écriture exponentielle de l'affixe z_S du point S.

6. Écrire z_B sous forme exponentielle. Démontrer alors la conjecture faite à la question **4.**

136 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b. Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c. Placer le point A dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On appelle z_B l'affixe du point B.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b. Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c. Placer le point B dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Écrire le nombre complexe z_C sous forme exponentielle.

b. Placer le point C dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

c. Établir que $z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

d. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.