13 Nombres complexes

CAPACITÉS

- Passer de la forme algébrique à une forme exponentielle et inversement.
- Transformer à l'aide des formules d'addition $a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t+\varphi)$ et inversement.
- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes une équation du premier degré ou du type $z^2=a$ pour a réel.
- Interpréter géométriquement les transformations du type $z\mapsto z+b$ (b étant un nombre complexe quelconque) et $z\mapsto az$ lorsque a est un nombre réel non nul ou un nombre complexe de module 1.

Découvrons le plus haut saut à l'élastique du monde

▶ lienmini.fr/10445-16

La trajectoire d'une personne effectuant un saut à l'élastique est modélisée par $f(t)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$ où t est le temps.
Valentin s'élance depuis un pont d'une hauteur de 50 m avec une vitesse initiale de 20 m·s^{-1}. L'équation du mouvement est : $f(t)=50\cos t+20\sin t$.

À quel instant, exprimé en secondes, Valentin aura-t-il parcouru 10 mètres ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 287

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions Flash

Diaporama

20 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-17

1 Forme algébrique

- La **forme algébrique** d'un nombre **complexe** s'écrit $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont deux nombres réels et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
a s'appelle la **partie réelle** de z et se note **Re(*z*)** et b s'appelle la **partie imaginaire** de z et se note **Im(*z*)**.
- Les opérations (addition, soustraction et multiplication) suivent les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.
- Le **conjugué** de z se note $\bar{z}$ et $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.
- Pour calculer l'**inverse** d'un nombre complexe ou le **quotient** de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression par le nombre complexe conjugué du dénominateur. Ainsi le dénominateur devient un réel positif.
- Au nombre complexe z, on peut associer le point M de coordonnées $(a\,;b)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On dit alors que z est **l'affixe** de M et que M est **l'image** de z.

2 Forme trigonométrique

- Le **module** de $z = a + ib$ se note $|z|$, c'est un réel positif. On a : $\boldsymbol{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Un **argument** de z noté $\boldsymbol{\arg(z) = \theta}$ est un réel tel que $\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}}$.
Le plus souvent on choisit pour θ une valeur appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
- Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, le **module** de z représente la distance OM et l'argument de z une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ exprimée en radians.
- La **forme trigonométrique** de z est $\boldsymbol{|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$.

Vérifier les acquis de Première

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. Si $z = 2 + 4i$ alors Im(z) vaut :	2	$4i$	4	-4	1
2. Si $z = 3 - 5i$ alors $\bar{z}$ vaut :	$-3 + 5i$	$-3 - 5i$	$3 - 5i$	$3 + 5i$	1
3. Si $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$ alors $z_1 \times z_2$ vaut :	$10 + 11i$	$11 + 10i$	$11 - 10i$	11	1
4. Si $z = -5 - 5i$ alors $\lvert z\rvert$ vaut :	$5\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	5	$-5\sqrt{2}$	2
5. Si $z = 1 - i$ alors $\arg(z)$ vaut :	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	2
6. Si $z = -\sqrt{3} + i$ alors la forme trigonométrique de z vaut :	$\left[-2\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$	$\left[\sqrt{2}\,;\dfrac{7\pi}{6}\right]$	$\left[2\,;-\dfrac{5\pi}{6}\right]$	$\left[2\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$	2

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 L'écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Histoire des mathématiques

OBJECTIF Découvrir une nouvelle notation d'un nombre complexe → Cours 1A, 1B p. 288

Leonhard EULER, mathématicien et physicien suisse du XVIIIe siècle, a défini la fonction exponentielle pour les nombres complexes et a découvert la relation qui la lie aux fonctions trigonométriques :

Pour tout réel θ, $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

1. On considère le réel $\theta = \frac{\pi}{2}$, donner la forme algébrique de $e^{i\frac{\pi}{2}}$.

2. On considère le réel $\theta = \frac{5\pi}{6}$, donner la forme algébrique de $e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

3. Soit z un nombre complexe dont on connaît la **forme algébrique** $a + ib$ où a et b sont deux réels non tous nuls.
On rappelle que la **forme trigonométrique** de ce nombre s'écrit $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $|z|$ qui est le module de z et θ un de ses arguments.
Établir alors qu'une autre écriture possible de z est : $\boldsymbol{re^{i\theta}}$ où r désignera le module de z.
Cette écriture est **l'écriture exponentielle de** $\boldsymbol{z}$.

4. Application
Déterminer une écriture exponentielle de $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

Remarque : en question **1.**, on a établi que $e^{i\frac{\pi}{2}} = -1$, d'où $e^{i\frac{\pi}{2}} + 1 = 0$. Cette formule, connue sous le nom d'identité d'Euler, réunit en seulement sept caractères l'addition, la multiplication, l'exponentielle, l'égalité et les constantes remarquables 0, 1, e et π !

2 Les formules d'addition et de duplication des sinus et cosinus

Histoire des mathématiques

OBJECTIF Démontrer les formules de trigonométrie → Cours 2A p. 288

On admet que la propriété : $e^{x+y} = e^x \times e^y$ établie au chapitre 8 sur la fonction exponentielle (p. 166) peut s'étendre aux nombres complexes.
Ainsi, pour tous réels θ et θ', $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$.
On rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (voir Activité 1 ci-dessus).

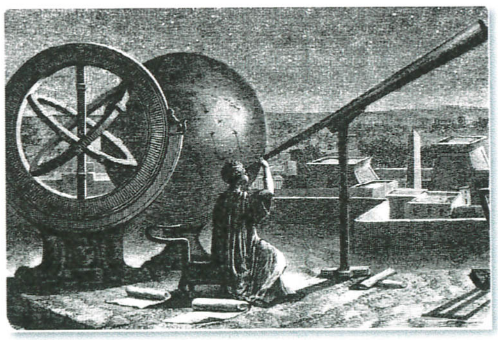
1. a. Exprimer $e^{i\theta'}$ en fonction de $\cos\theta'$ et $\sin\theta'$.
b. En déduire l'expression du produit $e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ à l'aide des fonctions trigonométriques.

2. Exprimer $e^{i(\theta+\theta')}$ à l'aide des fonctions trigonométriques.

3. En utilisant l'égalité $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$, en déduire les expressions respectives de $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$ en fonction de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$ et $\sin\theta'$.
On rappelle que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

4. En utilisant la parité des fonctions sinus et cosinus, donner les expressions de $\cos(\theta - \theta')$ et $\sin(\theta - \theta')$ en fonction de $\cos\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\theta$ et $\sin\theta'$.

5. En remarquant que $2\theta = \theta + \theta$, proposer une formule (dite de duplication) pour $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

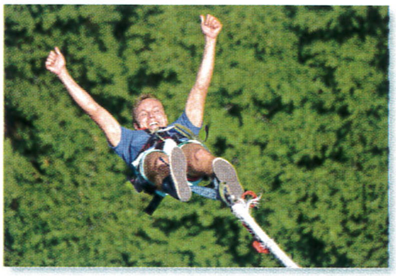


L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (– 180 ; – 125) a établi les premières tables trigonométriques.

3 Le saut à l'élastique

Sciences physiques

OBJECTIF Exprimer $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$ → Cours 2A p. 288



1. À l'aide des formules d'addition (voir Activité 2), développer l'expression $A\cos(\omega t + \varphi)$.

2. À partir de l'égalité $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, exprimer a et b en fonction de A et φ.

3. Déterminer alors l'expression de A en fonction de a et b.

4. Exprimer $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de A, a et b.

5. Si on considère le nombre complexe $z = a - ib$, que représentent A et φ pour ce nombre complexe ?

6. Application au problème de l'élastique

a. Démontrer que $50\cos t + 20\sin t = 10\sqrt{29}\cos(t - 0{,}38)$.

b. Pour déterminer l'instant t pour lequel Valentin aura parcouru 10 mètres, résoudre l'équation $10\sqrt{29}\cos(t - 0{,}38) = 10$. Donner une valeur approchée de la valeur de t à 10^{-2} près.

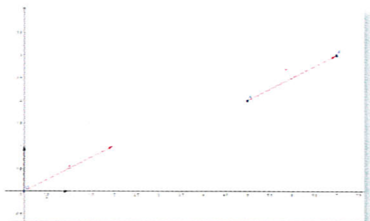
Remarque : A s'appelle en sciences physiques « l'amplitude » et φ le « déphasage ».

4 Les transformations du plan

→ Mémento GeoGebra p. 319

OBJECTIF Énoncer les écritures complexes des transformations du plan → Cours 3A, 3B, 3C p. 290

Dans toute l'activité, dès l'ouverture d'un fichier GeoGebra, on placera le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.



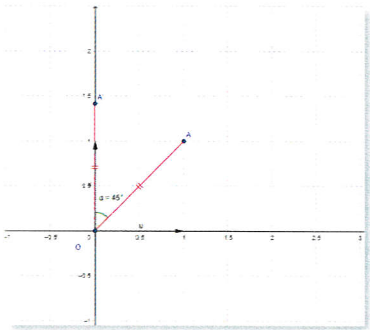
1. La translation de vecteur $\vec{w}$

a. Ouvrir un fichier GeoGebra. Tracer le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $b = 2 + i$ et placer le point A d'affixe $z = 5 + 2i$.

b. Placer alors le point A′, image de A par la translation de vecteur $\vec{w}$. Quelle est la valeur de z', affixe de A′ ?

c. Conjecturer l'expression de z', affixe de A′, en fonction de z et b.

d. Prendre différentes affixes pour le point A et pour le vecteur $\vec{w}$ et vérifier que la conjecture émise convient encore.



2. La rotation de centre O (origine du repère) et d'angle θ

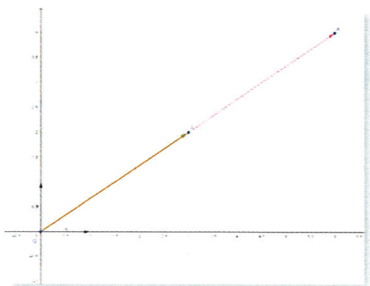
a. Ouvrir un fichier GeoGebra. Placer le point A d'affixe $z = 1 + i$.

b. Placer alors le point A′, image de A par la rotation de centre O et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

c. Vérifier que z', affixe de A′, est égale à $i\sqrt{2}$, puis que $i\sqrt{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(1 + i)$.

d. Conjecturer l'expression de z' en fonction de z et θ.

e. Prendre différentes affixes pour le point A et différentes valeurs pour l'angle θ (en radians) et vérifier que la conjecture émise convient encore.



3. L'homothétie de centre O (origine du repère) et de rapport $k \neq 0$.

a. Ouvrir un fichier GeoGebra. Placer le point A d'affixe $z = 3 + 2i$.

b. Placer alors le point A′, image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.

c. Conjecturer l'expression de z' en fonction de z et k.

d. Prendre différentes affixes pour le point A et différentes valeurs pour le rapport k et vérifier que la conjecture émise convient encore.

1 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

A Formule d'Euler

Définition La formule d'Euler s'écrit sous cette forme :
pour tout nombre réel θ, $\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

Exemples • $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 1$ • $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Remarque • Les propriétés algébriques sont généralisées.

Notation

Cette formule fait appel à la fonction exponentielle e.

B Écriture exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul.
Soit $r = |z|$ le module de z et $\theta = \arg(z)$ un argument de z à $2k\pi$ près en radians ($k \in \mathbb{Z}$). En classe de Première, on a établi qu'une forme trigonométrique de z s'écrit : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Définition Une **écriture exponentielle** d'un nombre complexe z non nul est $\mathbf{re^{i\theta}}$ où r est le module de z et θ un de ses arguments.

Exemple • $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est la forme exponentielle du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\frac{\pi}{3}$.

Remarque • Un nombre complexe ayant une infinité d'arguments, il a aussi une infinité de formes trigonométriques et de formes exponentielles mais une seule forme algébrique.

→ Voir Exercice résolu 1

Les **propriétés algébriques** établies pour la fonction exponentielle se trouvent généralisées.

Propriétés Soit θ et θ' deux nombres réels et n un entier naturel, on a :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} \qquad e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \qquad (e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$$

Histoire des mathématiques

$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$ donne
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$
$= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
C'est la **formule de Moivre**.

Abraham de Moivre (1667-1754).

2 Applications aux fonctions trigonométriques

A Formules d'addition

Propriétés Soit θ et θ' deux nombres réels.

$$\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \qquad \cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$$
$$\sin(\theta + \theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta \qquad \sin(\theta - \theta') = \sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta$$

Exemple • $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Passer d'une forme exponentielle à la forme algébrique et inversement

1. Écrire sous forme algébrique : $z_1 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
2. Écrire sous forme exponentielle : $z_1 = 2 + 2i$.

Méthode — Pour passer d'une forme exponentielle à la forme algébrique ❶ et inversement ❷

❶ On **utilise** l'égalité $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. On **utilise** les valeurs remarquables des cosinus et sinus. On **simplifie** l'expression pour aboutir à l'écriture $a + ib$.
❷ On **calcule** le module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. On **détermine** la valeur d'un de ses arguments θ en utilisant $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$. On **rappelle** qu'une forme exponentielle de z est $re^{i\theta}$.

Solution

1. $z_1 = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

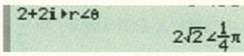
Avec Casio :

2. $r_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. On note $\theta_1 = \arg(z_1)$.

$\cos\theta_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta_1$. D'où $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

D'où $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Avec Casio :



→ Voir Exercices 34, 35, 38 et 39 p. 294

Exercice résolu 2 — Transformer à l'aide des formes d'addition $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$ et inversement

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t)$.
1. Soit z le nombre complexe dont la forme algébrique est $\sqrt{3} - i$. Déterminer le module de z et un de ses arguments. On notera A le module et φ l'argument choisi.
2. Démontrer alors que :
$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) = A\cos(2t + \varphi)$.

Méthode — Pour transformer à l'aide des formes d'addition $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$ et inversement

❶ On **travaille** à partir du nombre complexe $z = a - ib$.
❷ On **calcule** le module $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.
❸ On **détermine** la valeur d'un de ses arguments φ en utilisant $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$
❹ On **utilise** la formule $\cos(\theta + \theta')$ où $\theta = \omega t$ et $\theta' = \varphi$.

Solution

1. $A = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$

$\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$ donc $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$.

2.
$$\begin{aligned} 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) &= 2\left(\cos(2t)\cos\frac{\pi}{6} + \sin(2t)\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) \\ &= \sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t). \end{aligned}$$

→ Voir Exercices 48 à 54 p. 295

B Formules de duplication

PROPRIÉTÉS Soit θ un nombre réel.
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.
- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

Vocabulaire

Duplication : fait de reproduire en double.

C Linéarisation

Linéariser une expression trigonométrique consiste à **transformer un produit** de fonctions trigonométriques **en une somme** de fonctions trigonométriques.
Soit θ un nombre réel.
- $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$
- $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$

→ Voir Exercice résolu 3

D Application aux calculs de primitives

On rappelle qu'une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \cos(2x)$ est $H(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Notation

Une **fonction** se note par une minuscule, une de ses **primitives** par la majuscule correspondante.

PROPRIÉTÉS
- Une primitive de $f(x) = \cos^2 x$ est $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.
- Une primitive de $g(x) = \sin^2 x$ est $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

→ Voir Exercice résolu 4

3 Expression complexe de transformations du plan

A Translation

PROPRIÉTÉ On considère la **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b. Le point M d'affixe z a pour image par cette translation le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z + b$.

B Rotation

PROPRIÉTÉ On considère la **rotation** de centre O (origine du repère) et d'angle θ. Le point M d'affixe z a pour image par cette rotation le point M′ d'affixe z' telle que $z' = e^{i\theta} z$.

REMARQUE • $|e^{i\theta}| = 1$.

C Homothétie

PROPRIÉTÉ On considère l'**homothétie** de centre O et de rapport k non nul. Le point M d'affixe z a pour image par cette homothétie le point M′ d'affixe z' telle que $z' = k \times z$.

→ Voir Exercice résolu 5

Exercice résolu 3 — Linéariser une expression trigonométrique

Déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

Méthode — Pour linéariser une expression trigonométrique

1. On **utilise** $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$.
2. On **remarque** que $2\theta = \dfrac{\pi}{4}$ dont on connaît la valeur du cosinus et du sinus.
3. On **établit** le signe de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ en utilisant $0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$.

Solution

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

$0 < \dfrac{\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{8} > 0$. D'où $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

→ Voir Exercices 56 et 57 p. 295

Exercice résolu 4 — Déterminer la primitive d'une fonction répondant à une condition particulière

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive F de la fonction f définie par :
$f(x) = 4\sin^2(x) + 1$ et telle que $F(0) = 5$.

Méthode — Pour déterminer la primitive d'une fonction répondant à une condition particulière

1. On **utilise** une primitive de $\sin^2\theta$ et une primitive de 1.
2. On **additionne** les deux primitives précédentes.
3. On **détermine** la valeur de la constante k à l'aide de la condition particulière.

Solution

$$F(x) = 4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right) + x + k = 2x - \sin(2x) + x + k = 3x - \sin(2x) + k.$$

$F(0) = 5$ donne $k = 5$. Donc $F(x) = 3x - \sin(2x) + 5$.

→ Voir Exercices 64 à 67 p. 295

Exercice résolu 5 — Interpréter géométriquement les transformations du plan

Pour chacune des transformations du plan qui, au point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z', déterminer sa nature ainsi que son (ou ses) élément(s) caractéristique(s).

1. $z' = z + 4 - \mathrm{i}$ **2.** $z' = 3z$

Méthode — Pour interpréter géométriquement les transformations du plan

1. On **sélectionne** la forme la plus ressemblante entre $z' = z + b$ et $z' = az$.
2. Si on **choisit** $z' = z + b$ alors on **conclut** qu'il s'agit d'une translation.
3. Si on **choisit** $z' = az$, avec a réel alors on **conclut** qu'il s'agit d'une homothétie.
4. Si on **choisit** $z' = az$, avec $|a| = 1$ alors on **conclut** qu'il s'agit d'une rotation.

Solution

1. $z' = z + b$ avec $b = 4 - \mathrm{i}$ alors il s'agit de la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $4 - \mathrm{i}$.

2. $z' = az$, avec $a = 3$ réel alors il s'agit de l'homothétie de centre O et de rapport 3.

→ Voir Exercices 69 à 74 p. 296

L'essentiel

1 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

- Formule d'Euler : pour tout nombre réel θ,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

- Une **écriture exponentielle d'un nombre complexe** z non nul est $re^{i\theta}$ où r est le module de z et θ un de ses arguments.

- Soit θ et θ' deux nombres réels et n un entier naturel :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$$

2 Applications aux fonctions trigonométriques

Soit θ et θ' deux nombres réels.

- **Addition**

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

$$\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta$$

- **Soustraction**

$$\cos(\theta-\theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$$

$$\sin(\theta-\theta') = \sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta$$

- **Duplication**

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$$

- **Linéarisation**

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta)) \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$$

- **Application aux calculs de primitives**

Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \cos^2 x$ est $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$.

Une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = \sin^2 x$ est $G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$.

3 Expression complexe de transformations du plan

- On considère la **translation** de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b.

Le point M d'affixe z a pour image par cette translation le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = z + b$.

- On considère la **rotation** de centre O (origine du repère) et d'angle θ.

Le point M d'affixe z a pour image par cette rotation le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = e^{i\theta}z$.

- On considère **l'homothétie** de centre O et de rapport k non nul. Le point M d'affixe z a pour image par cette homothétie le point M′ d'affixe z' telle que : $z' = k \times z$.