1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-13

Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

2 Vérifier que la fonction $f(x) = -4e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 0$.
Trouver deux autres fonctions solutions de (E).

3 Vérifier que la fonction $f(x) = 2e^{-x}$ est solution de l'équation différentille (E) : $y' + y = 0$.

4 Trouver le réel a pour que la fonction $f(x) = 5e^{3x}$ soit une solution de l'équation différentille (E) : $y' = ay$.

Résolution d'une équation différentielle du type $y' + ay = 0$

*Dans les exercices **5** à **13**, déterminer les fonctions solutions des équations données.*

5 **a.** $y' + 8y = 0$ **b.** $y' - 0{,}5y = 0$

6 **a.** $y + 3y' = 0$ **b.** $y' = 7y$

7 **a.** $2y + 3y' = 0$ **b.** $2y' + 3y = 0$

8 **a.** $y' = 5y$ **b.** $y = 5y'$

9 **a.** $\dfrac{dv}{dt} + v = 0$ **b.** $\dfrac{du}{dr} + 2u = 0$

10 **a.** $m' - 4m = 0$ **b.** $5p = 2p'$

11 **a.** $y' - \dfrac{1}{4}y = 0$ **b.** $y + \sqrt{2}y = 0$

12 **a.** $3y' = \pi y$ **b.** $y' + y\ln 3 = 0$

13 **a.** $x' + x = 0$ **b.** $4\theta' - \theta = 0$

Résolution d'une équation différentielle du type $y' + ay = b$

*Dans les exercices **14** à **26**, déterminer les fonctions solutions des équations données.*

14 $y' + 3y = 1$

15 $2y' + y = 4$

16 $y' + 3y + 1 = 0$

17 $y' + \sqrt{3}y = 1$

18 **a.** $y' + 2\ln 3\, y = \ln 3$ **b.** $y' - \cos\dfrac{\pi}{4}y = \sin\dfrac{\pi}{4}$

19 **a.** $3y' + 3y = 6$ **b.** $-2 - y' = 4y$

20 **a.** $m' + m = 2m + 5$ **b.** $k = k' - 1$

21 **a.** $\dfrac{dt}{dx} + t = 7$ **b.** $\dfrac{2dz}{dx} + 4z = 8$

22 **a.** $y' + 10^{-3}y = 1$ **b.** $6y = -5y' + 30$

23 **a.** $e^{-1}y' - e^{-1}y = 1$ **b.** $-y' - y = -9$

24 $\dfrac{1}{2}y' + \dfrac{1}{3}y = \dfrac{1}{6}$

25 $y' + 2y = \pi$

26 **a.** $2x' - x = 2$ **b.** $i' + 0{,}5i = 3$

27 Trouver trois fonctions solutions de l'équation (E) :
$$2y' - 5y = 1.$$

28 Trouver le réel b pour que la fonction $f(x) = 3e^{5x} + 10$ soit solution de l'équation $y' - 5y = b$.

Avec une condition initiale

*Dans les exercices **29** à **41**, déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.*

29 $y' - y = 3$ avec $f(1) = 0$.

30 $y' - 3y = 0$ et $f(1) = 2$.

31 $3y = -2y'$ et $f(-1) = -1$.

32 $v' - 4v = 0$ et $v(2) = 1$.

33 $y' + \ln 3y = 0$ et $f(1) = 1$.

34 $4y' - y = 4$ et $f(4) = 4$.

35 $2y = y' - 3$ et $f(\ln 2) = 1$.

36 $\dfrac{dt}{dx} + t = 7$ et $t(0) = 1$.

37 $y' - \cos\dfrac{\pi}{4}y = \sin\dfrac{\pi}{4}$ et $f(\pi) = 1$.

38 $y' + 2y + 1 = 0$ et $f'(3) = 1$.

39 $2y' + y = 2$ avec $f(\ln 2) = 1$.

40 $-6y' - 18y = -9$ et $f(-2) = 0$.

41 $4y = y' + \dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = 1$.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

→ Aide Cours 1 et 2 p. 266

Question de cours

42 Vérifier que la fonction $f(x) = 3e^{-2x}$ est solution de l'équation $y' + 2y = 0$.

Dans les exercices 43 à 46, vérifier que la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle (E) donnée.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

43 $f(x) = e^{0,5x}$ $\quad y' - 0,5y = 0$ (E).

44 $f(x) = 2e^{-10x}$ $\quad y' = -10y$ (E).

45 $f(x) = -4e^{2,5x}$ $\quad y' - 2,5y = 0$ (E).

46 $f(x) = e^{2x-3}$ $y' - 2y = 0$ (E).

Dans les exercices 47 à 50, pour chaque fonction donnée, déterminer l'équation différentielle dont elle est une solution.

Coup de pouce

- Calculer la dérivée f' et $a = \dfrac{f'}{f}$.

47 $f(x) = -e^{-x}$

48 $f(x) = -4e^{4x}$

49 $f(x) = 2e^{2+x}$

50 $f(x) = 6e^{-4x+2}$

Vrai ou faux

51 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. Une solution f de l'équation $y' + 3y = 0$ est $f(x) = e^{3x}$.

2. La fonction $f(x) = 4e^{-x}$ est solution de l'équation $y' = y$.

3. La solution f de l'équation $y' + 7y = 0$ vérifiant $f(0) = 9$ est $f(x) = 9e^{-7x}$.

Dans les exercices 52 à 61, résoudre l'équation différentielle donnée.

52 $y' - 7y = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

53 $2y - y' = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

54 $3y' - 2y = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

55 $y' = \dfrac{1}{3}y$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

56 $u' + u = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

57 $\dfrac{dg}{dt} + 12g = 0$

58 $y - y' = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

59 $x' + \dfrac{2}{5}x = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

60 $y' - 2\ln 2y = 0$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

61 $y' + ky = 0$ avec k réel non nul.

Dans les exercices 62 à 66, déterminer la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

62 $y' - 2y = 0$ et $f(-1) = 1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

63 $y' + 11y = 0$ et $f(0) = -1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

64 $2y' - y = 0$ et $f(2\ln 2) = 1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

65 $3y = 6y'$ et $f(0) = 0,5$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

66 $y' + \ln 3\, y = 0$ et $f(1) = 2$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

→ Aide Cours 3 p. 266

Question de cours

67 Vérifier que la fonction $f(x) = ke^{-4x} + 3$ est solution de l'équation $y' + 4y = 12$.

Dans les exercices 68 à 71, vérifier que la fonction f proposée est solution de l'équation différentielle (E) donnée.

68 $f(x) = e^{0,5x} - 2$ et $y' - 0,5y = 1$ (E).

69 $f(x) = 2e^{-10x} + 1$ et $y' = -10y + 10$ (E).

70 $f(x) = -4e^{2,5x} - 2$ et $y' - 2,5y = 5$ (E).

71 $f(x) = -2e^{-2x} + 5$ et $y' + 2y = 10$ (E).

QCM

72 *Indiquer pour chaque question la bonne réponse.*

1. Une solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui vérifie $f(0) = 1$ est :

a. $F(x) = e^{-2x}$ **b.** $f(x) = 2e^{2x}$ **c.** $f(x) = e^{2x}$

2. La fonction $f(x) = e^{-x} + 3$ est solution de l'équation :

a. $Y' = y + 3$ **b.** $y' + y = 3$ **c.** $y = y' + 3$

3. La solution f de l'équation $y' = y + 1$ qui vérifie $f(1) = -1$ est :

a. $F(x) = 2e^{x+1}$ **b.** $f(x) = -2e^{x-1} + 1$ **c.** $f(x) = 2e^{x} + 1$

Vrai ou faux

73 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. Une solution de l'équation $y' + y = 2$ est $f(x) = 2e^{-x} + 2$.

2. La solution de l'équation $y' + y = 2$ qui vérifie $f(0) = 4$ est $f(x) = 2e^{x} + 2$.

3. La fonction $f(x) = -e^{x+2}$ qui vérifie $f(0) = -e^{-2}$ est solution de l'équation $y' + y = 2$.

4. La fonction $f(x) = 3e^{-2x} + 4$ est solution de l'équation $y' + 2y = 8$.

Dans les exercices 74 à 77, pour chaque fonction f donnée, déterminer l'équation différentielle dont elle est une solution.

74 $f(x) = -e^{-x} + 5$

75 $f(x) = -4e^{4x} - 2$

76 $f(x) = 2e^{2+x} - 0{,}5$

77 $f(x) = \dfrac{2}{e^{x}} + 1$

Dans les exercices 78 à 90, résoudre l'équation différentielle donnée.

78 $y' - 3y = 2$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

79 $-2y - y' = -2$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

80 $3y' - 2y = 4$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

81 $y' + 10y - 0{,}1 = 0$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

82 $i' + i = 3{,}5$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

83 $m + \dfrac{3}{4}m' = \dfrac{1}{2}$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

84 $y - y' = \ln 2$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

85 $ky' + k'y = 1$ où k et k' réels non nuls

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

86 $x' + \dfrac{2}{5}x = 1$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

87 $z' = -7z - 1$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

88 $f + 2f' = 40$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

89 $y' - 2\ln 2y = \ln 8$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

90 $y' + ky = 1$ avec k réel non nul.

Dans les exercices 91 à 100, trouver la solution f de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

91 $y' - 2y = 3$ et $f(-1) = 1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

92 $y' + 11y = 11$ et $f(0) = -1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

93 $t' + 3t = 2$ et $t(0) = 1$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

94 $2y' - y = 1$ et $f(2\ln 2) = 1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

95 $a + a' = -a - 6$ et $f(0) = 1$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

96 $3y = 6y' + 3$ et $f(0) = 0{,}5$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

97 $y' + y = 10^{-2}$ et $f(\ln 2) = 1$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

98 $y' + \ln 3y = -5$ et $f(1) = 2$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

99 $y' + 10y = 2$ et $f(0) = \log(2) = \dfrac{\ln 2}{\ln 10}$

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

100 $v' = 5v + 12$ et $v'(0) = 1$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 267

Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

101 Soit l'équation différentielle (E) :

$$2y' - 5y = 0.$$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer l'expression de la fonction f solution de (E) qui vérifie $f(2) = 1$.
3. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe passe par le point J(0 ; 1).
4. Dresser le tableau de variation de f et de g sur $[-4 ; 2]$.

102 **1.** Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = 0.$$

2. Trouver la fonction f solution de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point A(0 ; 1).
3. Trouver la fonction g solution de (E) dont le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1 vaut 2.

QCM

103 *Indiquer pour chaque question la bonne réponse.*

1. Les solutions f de l'équation différentielle $3y' - 2y = 0$ sont les fonctions :

a. $f(x) = ke^{\frac{2x}{3}}$ **b.** $f(x) = ke^{\frac{-2x}{3}}$ **c.** $f(x) = ke^{\frac{3}{2}x}$

2. La solution f de l'équation $y' + 3y = 0$ qui vérifie $f(0) = 1$ est :

a. $f(x) = \frac{-1}{3}e^{-3x}$
b. $f(x) = 3e^{-3x}$
c. $f(x) = e^{-3x}$

3. La fonction $u(t) = e^{-t} + 1$ est solution de l'équation :

a. $u' + u = 0$
b. $u' + u = 1$
c. $u' - u = 0$

4. La solution de l'équation $2y' = y$ qui vérifie $f(1) = 1$ est :

a. $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$ **b.** $f(x) = e^{0,5x}\sqrt{e}$ **c.** $f(x) = e^{-0,5x}\sqrt{e}$

Vrai ou faux

104 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

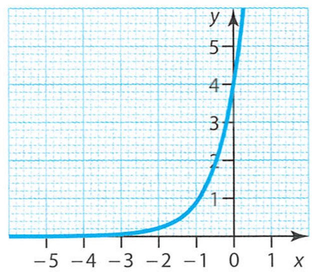
1. La fonction $f(x) = 2e^{-2x+3}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
2. La fonction f, solution de l'équation $y' = y$ et vérifiant $f(0) = 2$, est : $f(x) = 2e^{x}$.
3. La fonction $f(x) = e^{0,5x}$ est la solution de l'équation $y' - 0,5y = 0$ qui vérifie $f(1) = 0$.

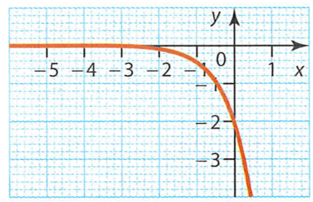
105 Soit f la solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ vérifiant $f'(1) = 2$.

1. Montrer que $f(1) = \frac{2}{3}$.
2. Déterminer la fonction f.

106 Soit la fonction $f(x) = 5e^{-4x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer l'équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$ dont f est une solution.

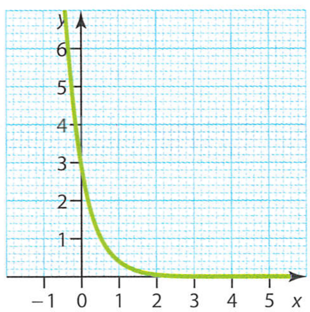
107 Les deux courbes ci-dessous représentent deux solutions de l'équation différentielle $y' - 1,5y = 0$ (E).





a. Résoudre l'équation (E).
b. Donner les fonctions associées à chaque courbe.

108 On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction $f(x) = ke^{ax}$ où a et k sont des réels.



1. Par lecture graphique, déterminer $f(0)$. En déduire k.
2. Déterminer le réel a sachant que l'image de 1 par f vaut $3e^{-2}$. En déduire l'expression de f.
3. Trouver une équation différentielle dont f est une solution.

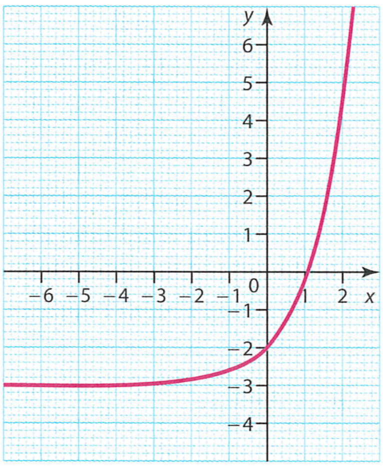
109 Résoudre les équations différentielles suivantes :

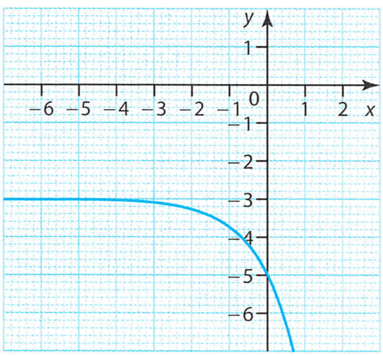
a. $y - 4y' = 0$
b. $g' + g = 0$
c. $5p = 2p'$

110 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 0$.
1. Donner deux fonctions solutions de (E).
2. Montrer que la somme de ces deux fonctions est aussi solution de (E).
3. Montrer que le produit d'une solution par une constante est encore solution de (E).

Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

111 Les deux courbes ci-dessous représentent deux solutions de l'équation différentielle (E) : $y' - y = 3$.





a. Résoudre (E).
b. Donner l'expression de la fonction associée à chaque courbe.

112 Dans chaque cas, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.
1. (E) : $y' = 4y + 4$ et $y(0) = 1$.
2. (E) : $-2y' + 11y = 4$ et $y(-2) = -3$.

113 Soit l'équation différentielle (E) : $4y' - 5y = 2$.
1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution f qui vérifie $f(0) = 2$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-4 ; 2]$.

114 Soit l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 1$ et f solution de cette équation avec $f'(1) = 2$.
1. Montrer que $f(1) = 0{,}5$.
2. Résoudre (E).

115 Soit l'équation différentielle $4y' - 2y = 1$.
1. Résoudre cette équation.
2. Trouver la solution f qui vérifie $f(0) = 1$.
3. Trouver la solution g qui vérifie $g'(0) = 1$.
4. Trouver la solution k dont le coefficient directeur de la tangente à la courbe de k au point d'abscisse 1 vaut 1.

116 Soit la fonction $f(x) = 5e^{2x} - 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer les réels a et b pour que f soit solution de l'équation $y' + ay = b$.

117 Soit $f(x) = 2e^{-x+1} + 3$.
Trouver l'équation différentielle dont elle est la solution.

118 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2\ln 3y$.
Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 5$.

119 Soit l'équation $y' - 3y = 2$ et f solution avec $f(1) = 2$.
1. Montrer que $f'(1) = 8$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Déterminer la fonction solution f.

120 **1.** Montrer que $u(t) = 2e^t + 3$ est solution de l'équation $\frac{du}{dt} + au = b$ où a et b sont des réels à déterminer.
2. Résoudre l'équation $u(t) = 4$ (donner la valeur exacte).
3. Étudier les variations de u sur $[0, 10]$.

121 Associer chaque fonction à l'équation dont elles sont une solution :

$f(x) = 7e^{-x} - 2$	$y' = -6y + 4$
$g(x) = 3e^{-6x} + \frac{2}{3}$	$y' - 3y = 9$
$h(x) = e^{2,5x} - 0{,}6$	$2y' - 5y - 3 = 0$
$k(x) = 2e^{3x} - 3$	$y' + y = -2$

122 Déterminer la solution f de l'équation $y' + 2y = 2$ dont la courbe représentative passe par le point A $(0 ; 3)$.

123 Déterminer deux fonctions solutions de l'équation :
$$y' + 0{,}2y = 0{,}4.$$
Les courbes de ces fonctions ont-elles un point commun, aucun point commun ou une infinité de points communs ?

124 Soit l'équation différentielle $y' - 2y = b$ avec b réel.
1. Résoudre cette équation en fonction de b.
2. Trouver un réel b pour qu'une solution f vérifie $f(0) = 1$.

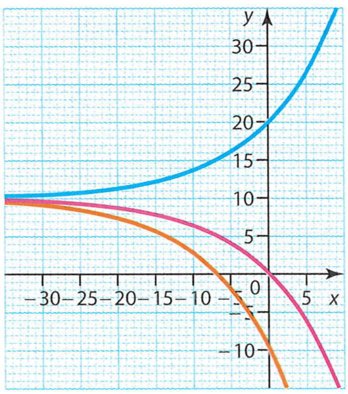
125 Soit la fonction $f(x) = 3e^{-3x} + 1$.
1. Calculer la dérivée de f.
2. Déterminer les réels a, b et c de l'équation $ay' + by + c = 0$ dont f est solution.

126 Déterminer une fonction f telle que $f(0) = 2$ et qu'elle soit solution d'une équation $y' + ay = b$ à définir.

127 La population d'un corps radioactif évolue suivant la loi de désintégration $\frac{dN}{dt} = -N(\tau)$, où $N(\tau)$ est le nombre d'atomes à l'instant t et τ le temps caractéristique de désintégration du corps considéré.

Résoudre cette équation avec $\tau = 1$ et $N(t = 0) = 1$.

128 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}1y = 1$.
Chacune des courbes ci-dessous représente une fonction solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer pour chacune des courbes l'expression de la fonction associée.



129 On considère l'équation différentielle (E) :
$$y' + 0{,}05y = 20$$
où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
1. Résoudre (E).
2. Trouver la solution particulière f de (E) telle que $f(0) = 0$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 400(1 - e^{-0{,}05x})$.
a. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre $f(x) = 100$ (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

130 Soit l'équation différentielle $3y' - 3y = 2$.
Déterminer le réel h tel que la fonction $f(x) = 2e^{x} + h$ soit une solution de cette équation.

131 Soit f la solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - y$.
On suppose que $f(0) = c$ avec c réel.
1. Exprimer $f'(0)$ en fonction de c.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer les solutions de (E) puis en donner une particulière

132 Soit les fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$ définies par :
$f(x) = 0{,}5x - 0{,}25 + 2^{e-2x}$ et $g(x) = 2^{e-2x}$.
1. Trouver l'équation différentielle dont g est une solution.
2. Déterminer $f'(x)$ puis $f''(x)$ dérivée de $f'(x)$.
3. Vérifier que f est solution de l'équation $y'' + 2y = x$.

133 On suppose qu'une population d'individus évolue dans un site défini. Le nombre d'individus présents dans ce site en fonction du temps t en heures est $f(t)$.
La fonction $g(t) = \frac{1}{f(t)}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0{,}0045$ et $g(0) = 0{,}001$.
1. Déterminer la fonction g.
2. Montrer que :
$$f(t) = \frac{2}{0{,}004\,5 - 0{,}002\,5e^{-2t}}.$$
3. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Au bout de combien de temps la population initiale aura-t-elle diminué de moitié ?

134 Soit l'équation différentielle :
$$(E) : 2y = 4y' - 1.$$
1. Déterminer la fonction f solution de E telle que $f(0) = 1$.
2. Trouver les réels a et b de l'équation $3y = ay' + b$ pour que f soit également une solution.

135 Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2e^{-3x}$
$g(x) = -4e^{-x} + 1$
et $h(x) = 3e^{2x} - 4$.
Déterminer les équations différentielles dont elles sont solutions.

136 GEOGEBRA **1.** Dans GeoGebra, créer un curseur k. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction $f(x) = ke^{-x} + 2$. Tracer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Conjecturer sur l'existence d'un point commun à toutes les tangentes au point d'abscisse 0.
3. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2$.
4. Montrer la conjecture du 2.

137 Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' - y = 1$$

1. Montrer que toute fonction positive solution de E est strictement croissante.
2. Est-il possible que la courbe de f admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
Justifier.

138 La vitesse v en $m{\cdot}s^{-1}$ d'un parachute est soumise à son poids et aux frottements de l'air. Cette vitesse v vérifie l'équation :

$$(E) : v'(t) + 140v(t) = 10$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la vitesse solution de (E) qui s'annule en 0.
3. Que se passe-t-il quand t devient de plus en plus grand ? Interpréter le résultat
4. Résoudre $v(t) < 1$ et interpréter le résultat.

139 Une entreprise réalise par moulage des hélices de drones dans un matériau plastique.

La température T du matériau, en degrés Celsius, est fonction du temps t en secondes et est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}1y = 8$$

1. Résoudre (E).
2. Trouver la solution particulière de (E) qui vérifie $T(0) = 240$.
3. Déterminer le sens de variation de T sur $[0 ; +\infty[$.
4. Résoudre $T(t) = 100$ et interpréter le résultat.

140 La quantité de pénicilline $Q(t)$ en milligrammes dans le sang après injection est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : Q'(t) + aQ(t) = 0$$

où t est le temps écoulé depuis l'injection en heures.
À $t = 0$, on injecte 5 mg de pénicilline.
1. Montrer que : $Q(t) = 5e^{-at}$.
2. Sachant qu'au bout de 2 heures, la quantité a diminué de moitié, montrer que : $a = \dfrac{\ln 2}{2}$.
3. Résoudre $Q(t) < 1$ et interpréter le résultat.

141 **À chacun sa série** STL

La vitesse de refroidissement d'un corps est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et l'air ambiant. Soit $T(t)$ la température du corps à l'instant t (en secondes). T est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + k(y - t_1) = 0$ où t_1 est la température de l'air ambiant (en degré Celsius) et k réel positif.

1. Résoudre (E).
2. Trouver la température T solution de (E) telle que $T(0) = 5$.
3. Au bout de 6 minutes, la température vaut 70 °C. Trouver la valeur de k en fonction de t_1.

142 **À chacun sa série** STI2D

Un entrepreneur achète à un instant $t = 0$ des nouvelles machines d'un montant total de 200 000 d'euros.

Cet investissement perd cependant de sa valeur au fil des années. Cette dépréciation (en milliers d'euros) à l'instant t (en années) est notée $d(t)$.
On suppose que d est solution sur $[0 ; 13]$ de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}086y = 17{,}2$ et $d(0) = 0$.
1. Déterminer la solution d qui vérifie (E).
2. On pose $d(t) = 200\,(1 - e^{-0{,}086t})$ définie sur $[0 ; 13]$.
En résolvant une inéquation sur $[0 ; 13]$, déterminer au bout de combien d'années l'investissement aura perdu 60 % de sa valeur.

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-14

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
143 La fonction $f(x) = -2e^{x+1}$ est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$.		
144 Il y a une infinité de solutions de l'équation $y' = 3y$.		
145 Une solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ est la fonction $f(x) = -e^{3x}$.		
146 La solution f de l'équation différentielle $y' + 7y = 0$ vérifiant $f(0) = 9$ est $f(x) = 9e^{-7x}$.		
147 La fonction $f(x) = 3e^{2x} + 3$ vérifie l'équation différentielle $y' - 2y = \frac{2}{3}$.		
148 La solution f de l'équation $y' = y$ est toujours une fonction positive.		
149 Toute solution de l'équation $y' - 5y = 1$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.		
150 La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 2$ qui vérifie $f(0) = 1$ est la fonction $f(x) = e^{-2x}$.		
151 Si f est la solution de l'équation $3y' + 9y = 12$ qui vérifie $f(0) = 1$ alors $f(\ln 2) = 2$.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

152 Les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ sont définies par :
a. $f(x) = ke^{-2x}$ **b.** $f(x) = ke^{2x}$ **c.** $f(x) = ke^{0,5x}$

153 La fonction solution de l'équation $5y' = y$ est :
a. $f(x) = e^{5x}$ **b.** $f(x) = e^{-5x}$ **c.** $f(x) = e^{0,2x}$

154 La fonction $f(x) = 5e^{5x}$ est solution de l'équation.
a. $y' - 5y = 0$ **b.** $y' - 5y = 5$ **c.** $y' + 5y = 0$

155 La solution de l'équation $y' + y = 0$ vérifiant $f(\ln 3) = 1$ est :
a. $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x}$ **b.** $f(x) = 3e^{x}$ **c.** $f(x) = 3e^{-x}$

156 La fonction $f(x) = 3e^{x} + 1$ est solution de :
a. $y' - y = -1$ **b.** $y' + y = 1$ **c.** $y' - y = 1$

157 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' - 2y = 1$ sont définies par :
a. $f(x) = ke^{\frac{2x}{3}} + \frac{1}{2}$ **b.** $f(x) = ke^{\frac{3x}{2}} + \frac{3}{2}$ **c.** $f(x) = ke^{\frac{3x}{2}} + \frac{2}{3}$

158 La solution f de l'équation différentielle $4y' + 8y = 16$ vérifiant $f(0) = 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :
a. $f(x) = 3 + e^{-2x}$ **b.** $f(x) = e^{2x} + 2$ **c.** $f(x) = 2 + e^{-2x}$

→ Vérifier les résultats p. 324

159 **In english**

1. Solve the following differential equation with a real number :

$$2y' - 3y = 4.$$

2. Find the only possible solution as a function of the equation which checks that $f(0) = 1$.

160 COMPÉTENCE **Raisonner, Chercher**

Suite à un incident nucléaire, on relève à l'instant t (en heures) le nombre $N(t)$ de particules radioactives captés par un appareil en une seconde.

On suppose que N est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = a(y - 2)$ où a est une constante positive.

1. On suppose que $a = 1$.

a. Résoudre (E).

b. Déterminer la solution N de (E) qui vérifie $N(0) = 170$.

2. Pour tout réel a positif, déterminer la solution N de (E) qui vérifie $N(6) = 9$.

161 COMPÉTENCE **Calculer, Chercher**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E).

2. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[2\,;3]$.

Coup de pouce

- La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est définie par : $V = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

162 COMPÉTENCE **Chercher**

Dans chacun des cas suivants, y est une fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' sa dérivée. Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

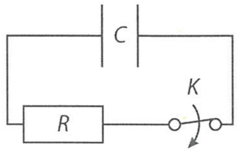
a. $1\,000y' + 50y = 20{,}5$ avec $f(0) = 400$.

b. $y' = -(y - 18)$ avec $f(0) = 1$.

163 COMPÉTENCE **Raisonner, Chercher**

Un circuit électrique est composé d'un condensateur de capacité C en farads, d'un résistor R en ohms et d'un interrupteur K. À l'instant $t = 0$, l'interrupteur K se ferme et le condensateur se décharge.

On note $u(t)$, en volts, la tension aux bornes du condensateur à l'instant t exprimé en secondes.



On admet que la fonction u, dérivable sur $[0\,;+\infty[$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{RC}y = 0$.

Dans tout l'exercice, on prend $C = 15 \times 10^{-5}$ farads et $R = 2 \times 10^4$ ohms.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la solution particulière u de (E) vérifiant $u(0) = 12$.

2. À partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ est-elle inférieure à 1,2 ? On donnera la valeur exacte de t_1 puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. Calculer la valeur moyenne de u sur $[0\,;t_1]$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. L'énergie emmagasinée dans le condensateur, en joules, a pour valeur à l'instant t : $W = \dfrac{1}{2} \times C \times [u(t)]^2$.

Calculer la valeur moyenne W_m de W entre les instants $t = 0$ et $t = 2$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

164 COMPÉTENCE **Calculer, Chercher**

Aux bornes d'une bobine de résistance R (en ohms) et d'inductance L (en henrys), on branche un générateur de force électromotrice E (en volts).

L'intensité I du courant (en ampères) est fonction du temps t (en secondes) : I est une fonction solution de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{1}{RL}y = 0$.

On suppose que $E = 3$ V, $L = 0{,}5$ H et $R = 5\ \Omega$.

Déterminer la fonction $I(t)$ solution de l'équation différentielle ci-dessus sachant que $I(0) = 0$.

165 COMPÉTENCE **Calculer, Chercher**

Soit l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{RC}y = \dfrac{E}{RC}$ où R, C et E sont des réels positifs

1. Résoudre cette équation et trouver la solution u en fonction de réels R, C et E.

2. On suppose que $u(0) = 0{,}2E$. Montrer que la solution u est : $u(t) = -0{,}8E\,e^{\frac{-t}{RC}} + E$.

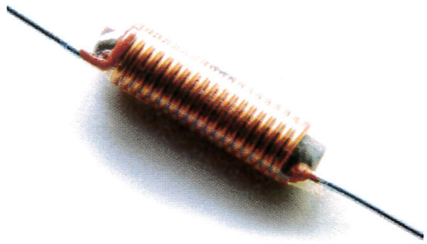
3. On suppose que $R = 5\,000$ et $C = 20 \times 10^{-12}$ et $u(1) = 4$. Déterminer le réel E.

4. On suppose que $R = 5\,000$ et $C = 20 \times 10^{-12}$ et $E = 100$. Résoudre $u(t) = 200$.

TP

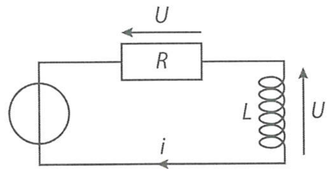
Comment fonctionne une bobine RL ?

CAPACITÉ Utiliser un logiciel de calcul formel pour résoudre un problème d'électricité avec les équations différentielles.



En électricité, une bobine est un composant constitué d'un enroulement de fil conducteur (souvent en cuivre). Sa propriété principale est de s'opposer à la variation du courant et donc de protéger les appareils électriques des fluctuations de tensions et d'intensités. Les bobines sont présentes dans tous les transformateurs et sur les cartes électroniques.

Les bobines sont caractérisées par leurs inductances notées L (unité : le henry noté H).
On considère le circuit électrique RL schématisé ci-contre.
Il est composé d'un générateur de tension U en volt, d'une résistance R en ohms et d'une bobine d'inductance L en henrys.
La fonction intensité $i(t)$ vérifie la relation (E) : $U = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$



PARTIE 1

$R = 100$ ohms, $L = 10$ H et $U = 9$ V.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. On suppose que $i(0) = 0$. Trouver la solution particulière de cette équation puis donner la représentation graphique de cette solution $i(t)$.
3. Donner la dérivée de $i(t)$ puis dresser son tableau de variation.
4. Déterminer $\dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} i(t)\,\mathrm{d}t$ et interpréter le résultat.

PARTIE 2

Répondre aux questions de la **Partie 1** en prenant $R = 200\ \Omega$, $L = 10$ H et $U = 10$ V.

PARTIE 3

Si $R = 100\ \Omega$, $L = 10$ H, trouver U pour que $i(t) = \mathrm{e}^{-10t} + 10$ soit solution de (E).

GeoGebra — *En salle informatique* — lienmini.fr/10445-15

1. Vérifier la solution de l'équation différentielle (E) : $U = Ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ avec un logiciel de calcul formel en utilisant les données de la **Partie 1**.

Pour les questions **2.** et **4.** on pourra utiliser le logiciel GeoGebra.

2. On suppose que $i(0) = 0$. Trouver la solution particulière de cette équation puis donner la représentation graphique de cette solution i(t).
3. Donner la dérivée à l'aide du logiciel de calcul formel.
4. Déterminer $\dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} i(t)\,\mathrm{d}t$ (sur GeoGebra, utiliser l'instruction `Intégrale[<Fonction>,<x min>,<x max>]`.

Sujet résolu BAC

166 Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années).
On admet que f est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}124y$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15{,}3$.

3. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à 7,27 unités. Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.

4. Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. L'équation devient $y' + 0{,}124y = 0$.	**1.** Les fonctions f solutions de (E) sont : $f(t) = ke^{-0{,}124t}$.
2. $f(0) = ke^0 = 15{,}3$.	**2.** $k = 15{,}3$ donc $f(t) = 15{,}3e^{-0{,}124t}$.
3. Il y a deux possibilités : calcul de $f(6)$ ou résolution de l'équation $f(t) = 7{,}27$.	**3.** $f(6) = 15{,}3e^{(-0{,}124\times 6)} = 7{,}27$ ou $f(t) = 15{,}3e^{-0{,}124t} = 7{,}27$ d'où : $e^{-0{,}124t} = \dfrac{7{,}27}{15{,}3}$ d'où : $-0{,}124t = \ln\left(\dfrac{7{,}27}{15{,}3}\right)$. Soit : $t = \ln\left(\dfrac{7{,}27}{15{,}3}\right) \times \dfrac{1}{-0{,}124} = 6$.
4. Il faut résoudre l'inéquation : $f(t) < \dfrac{0{,}3}{100} \times 15{,}3$.	**4.** $15{,}3^{e^{-0{,}124t}} < 0{,}0459$ d'où : $e^{-0{,}124t} < \dfrac{0{,}045\,9}{15{,}3}$ d'où : $-0{,}124t\ln\left(\dfrac{0{,}045\,9}{15{,}3}\right)$ d'où : $t > \ln\left(\dfrac{0{,}045\,9}{15{,}3}\right) \times \dfrac{1}{-0{,}124}$ soit $t > 46{,}84$ milliers d'années. Un organisme ne peut plus être daté au carbone 14 après 46,84 milliers d'années.

167 La température T d'un lubrifiant moteur, en degré Celsius, varie en fonction du temps, en heures, et est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}1y = 3$. Sa température est de 20 °C à l'arrêt.

1. Résoudre l'équation (E).

2. Déterminer la solution T de cette équation sachant que $T(0) = 20$.

3. Déterminer la température du lubrifiant au bout d'un jour.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On identifie a et b dans $y' + 0{,}1y = 3$. $a = 0{,}1$ et $b = 3$.	**1.** L'équation (E) est une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ avec $a = 0{,}1$ et $b = 3$. Les fonctions solutions T sont donc de la forme : $T(t) = ke^{-0{,}1t} + \dfrac{3}{0{,}1}$ soit $ke^{-0{,}1t} + 30$.
2. La condition initiale est $T(0) = 20$. On remplace la valeur trouvée de k dans l'expression de $T(t)$.	**2.** $T(0) = ke^0 + 30 = 20$ d'où $k = -10$ donc $T(t) = -10e^{-0{,}1t} + 30$.
3. 1 jour = 24 h, soit $t = 24$.	**3.** $T(24) = -10e^{-2{,}4} + 30 = 29{,}0928$ °C.

Sujet guidé BAC

168 *CAPACITÉ*

• Modéliser une situation par une fonction solution d'une équation différentielle.

Soit S la salinité (le taux de sel en grammes par litre) d'une eau potable d'un réservoir qui, suite à un incident, est infiltré par de l'eau de mer.
Pour que l'eau n'ait pas un goût amer et soit potable, ce taux doit rester inférieur à 3,9 g·L^{-1}.
On suppose que ce taux S est fonction du temps t, en minutes, et est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}01y = 0{,}39.$$

À $t = 0$, le taux est de 12 %.

1. Résoudre cette équation différentielle.

Méthode Identifier k, a et b.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 267

2. Vérifier que la solution S est définie par :

$$S(t) = 39 - 38{,}88\mathrm{e}^{-0{,}01t}.$$

Méthode Interpréter le taux à $t = 0$. $S(0) = 0{,}12$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

3. Calculer la salinité de l'eau du réservoir 60 minutes après le début de l'incident.

Méthode Calculer $S(60)$.

4. De combien de temps le service de surveillance dispose-t-il pour arrêter l'arrivée de l'eau salée dans le réservoir afin de limiter l'impact de l'incident ?

Méthode Résoudre $S(t) < 3{,}9$.

169 *CAPACITÉ*

• Modéliser par une équation différentielle une tension aux bornes d'un condensateur.

La tension U, en volts, aux bornes d'un condensateur de résistance $R = 10^5$ ohms et de capacité $C = 10^{-6}$ F, est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : RCU' + U = 0.$$

U est fonction du temps t,en secondes, et $U(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

Méthode Remplacer R et C dans (E) et résoudre l'équation.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 267

2. Trouver la tension U.

Méthode Utiliser $U(0) = 0$.

3. Calculer $U(10)$ et interpréter le résultat.

Méthode Au bout de 10 secondes, …

4. Résoudre l'équation $U(t) = 9{,}5$ et interpréter le résultat.

Méthode On s'aide de la calculatrice ou on utilise le logarithme.
La tension sera égale à 9,5 volts au bout de…

170 *CAPACITÉ*

• Modéliser une situation par une fonction solution d'une équation différentielle.

La température en degré Celsius dans un congélateur est modélisée, en fonction du temps t en heures, par une fonction f solution de l'équation différentielle :

$$y' + 1{,}5y = -52{,}5.$$

On suppose que $f((0) = 5$.

1. Montrer que : $f(t) = 40\mathrm{e}^{-1{,}5t} - 35$.

Méthode Une solution de l'équation est $f(t) = k\mathrm{e}^{-1{,}5t} - 35$.
Penser aussi à utiliser $f(0)$.

2. Quelle est la température :
– au bout de 30 min ?
– au bout de 2 h ?

Méthode Calculer l'image par f de 0,5 et de 2.

3. Résoudre l'inéquation $f(t) < -24$ et interpréter concrètement le résultat.

Méthode On utilise le logarithme.
Le but de cette question est de déterminer le temps à partir duquel la température est inférieure à – 24 °C.

SUJET BAC

171 La puissance du signal le long d'un type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x est la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre.
On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle :

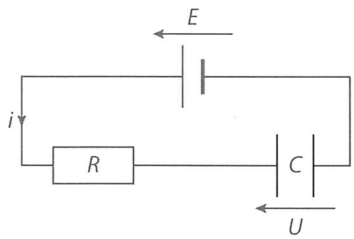
$$y' + 0{,}035y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.
a. Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = 7\mathrm{e}^{-0{,}035x}.$$

b. En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
2. Étudier le sens de variation de la fonction g.
a. Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?
b. Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

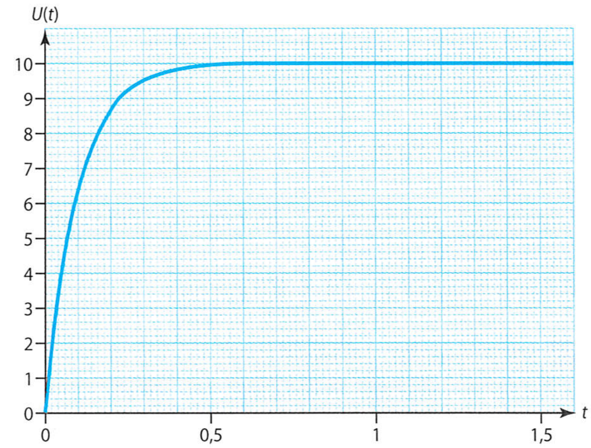
172 On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique ci-dessous composé de :
• une source de tension continue E de 10 V ;
• une résistance R de $10^5\ \Omega$;
• un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.
On note U la tension exprimée en volt aux bornes du condensateur. Cette tension U est une fonction du temps t en secondes.



La fonction U est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$; elle vérifie l'équation différentielle $RCU' + U = E$ où U' est la fonction dérivée de U.
1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à :

$$U' + 10u = 100.$$

2. a. Déterminer la forme générale $U(t)$ des solutions de cette équation différentielle.
b. On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction U tel que $U(0) = 0$.
3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction U qui vient d'être obtenue à la question **2. b.** avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées.



Charge du condensateur en fonction du temps.

On appelle T le temps de charge en secondes pour que $U(T)$ soit égal à 95 % de E.
a. Déterminer graphiquement le temps de charge T.
b. Retrouver, par le calcul, le résultat précédent.

173 La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C.
Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C.
Théo lui rétorque que quand le plat sera à 37 °C, il pourra le toucher sans risque ; sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}04y = 0{,}8.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée à la question précédente :
a. La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 °C ?
b. Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ?
En donner une valeur arrondie à la seconde près.

Sujet BAC

174 Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps t, mesuré en secondes.
Soit $f(t)$ la puissance du son émis, exprimée en watts, t secondes après le pincement de la corde.
Soit l'équation différentielle (E) : $25y' + 3y = 0$.
1. Résoudre (E).
2. Déterminer la fonction f solution de (E) qui vérifie $f(0) = 100$.
3. Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ?
4. Résoudre l'équation $f(t) = 80$ dans $[0\,;+\infty[$.

175 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}12y = 0$.
Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x en km, associe la pression atmosphérique, en hectopascals, est la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 1\,013{,}25$.
1. Résoudre (E).
2. Montrer que : $f(x) = 1\,013\mathrm{e}^{-0{,}12x}$.
3. Calculer la pression atmosphérique à 150 m d'altitude.
4. Calculer l'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hectopascals.

176 Des pièces de fonte sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C. À la sortie du four, elles sont alors entreposées dans un local à 30 °C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.
Soit f la température, en degré Celsius, d'une pièce de fonte depuis sa sortie t en heures du four, et f est solution de l'équation différentielle :
$$\text{(E)} : y' + 0{,}065y = 1{,}95 \text{ sur } [0\,;+\infty[.$$
1. Résoudre (E).
2. Donner $f(0)$ et vérifier que $f(t) = 1\,370\mathrm{e}^{0{,}065t} + 30$.
3. Étudier les variations de f. Ce résultat était-il prévisible ?
4. Au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée ?

177 La tension U, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction du temps t en secondes. On admet que $U(0) = 5{,}6$ et que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) : $U'(t) + \frac{1}{RC} \times U(t) = 0$ où la résistance $R = 2 \times 10^6$ ohms et la capacité $C = 4 \times 10^{-7}$ farads.
1. Vérifier que U est solution de (E) : $y' + 1{,}25y = 0$.
2. Résoudre cette équation.
3. Montrer que $U(t) = 5{,}6\mathrm{e}^{-1{,}25t}$.
4. Étudier les variations de U.
5. Au bout de combien de temps la tension perd-t-elle 63 % de sa tension initiale ?

178 Soit T la température des macarons au bout de t minutes après leur sortie du congélateur à – 18 °C. On les place dans une pièce à 20 °C. Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.
Soit T' la vitesse de décongélation. On suppose que T vérifie l'équation différentielle : $T'(t) = a[T(t) - 20]$ où a est un réel.
1. Vérifier que : $T' - aT = -20a$.
2. Résoudre cette équation et donner l'ensemble des solutions en fonction de a.
3. Montrer que $T(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{\frac{-t\ln 2}{15}}$.
4. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, on estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 minutes. Est-ce exact ? Justifier.
Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

179 La concentration de benzène en microgrammes par litre à la surface d'un bassin, en fonction du temps t en jours, est modélisée par la fonction f solution de l'équation différentielle : $y' + 0{,}25y = 0$.
1. Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ cette équation.
2. Justifier que $f(t) = 54{,}7\mathrm{e}^{-0{,}25t}$ si $f(0) = 54{,}7$.
3. Quelle serait la concentration de benzène au bout d'un mois ?

180 En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet événement est appelé « rentrée atmosphérique ».
Le temps T, en jours, avant la rentrée atmosphérique d'un satellite, dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètres.
On admet que la fonction T, associée à un satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y :
$$\text{(E)} : 40\,y' - y = 0$$
1. Résoudre (E) sur $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la fonction T solution de de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition :
$$T(800) = 2\,000.$$

SUJET BAC

3. Soit un satellite Hubble. La fonction T, associée à ce satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h)=0{,}132\ \mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

a. Sachant que l'orbite de ce satellite est située à 575 km, calculer le temps avant sa rentrée atmosphérique. Arrondir au jour près.

b. Étudier les variations de T sur $[0\,;+\infty[$.

181 La charge (en Kwh) d'une batterie sur une borne de recharge est fonction du temps, en heures, et est modélisée par la fonction f solution de l'équation différentielle :

$$y'+0{,}55y=12{,}1.$$

1. Résoudre cette équation sur $[0\,;+\infty[$.

2. On suppose que $f(0)=0$. Montrer que :

$$f(t)=-22\mathrm{e}^{-0{,}55t}+22.$$

3. Déterminer le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %.

4. On considère que le temps de charge complète de la batterie est d'environ 6 heures. Vérifier cette assertion.

182 La puissance (en mW) du signal le long d'une fibre optique est modélisée par une fonction g de la variable x, où x est la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre.

On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle : $y'=-0{,}035y$ et $g(0)=7$.

1. Vérifier que $g(x)=7\mathrm{e}^{-0{,}035x}$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

3. Le signal sera-t -il encore détecté au bout de 100 km ?

4. Déterminer la longueur maximale de fibre pour que la puissance ne soit pas inférieure à 0,08 mW.

183 On considère l'équation différentielle :

(E) : $y'+y=g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Partie A

On suppose que $g(x)=0$.

1. Résoudre (E).

2. Trouver la solution f de (E) qui vérifie $f(0)=-1$.

Partie B

On suppose que $g(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que la fonction $h(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{-x}$ est solution de (E).

2. Calculer $h'(x)$ en utilisant deux méthodes : la fonction h et l'équation (E).

3. Étudier le sens de variation de h sur $[0\,;+\infty[$.

184 On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : y'+y=g(x)$$

où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Partie A

On suppose que $g(x)=0$.

1. Résoudre (E).

2. Trouver la solution f de (E) qui vérifie $f(1)=\mathrm{e}^{-1}$.

Partie B

On suppose que $g(x)=-x-1$.

1. Montrer que la fonction $h(x)=\mathrm{e}^{-x}-x$ est solution de (E).

2. Calculer $h'(x)$ en utilisant deux méthodes : la fonction h et l'équation (E).

3. Étudier le sens de variation de h sur $[0\,;+\infty[$.

185 La vitesse v de variation de cap d'un bateau est modélisée par la dérivée d'une fonction f solution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : y'=m(20-y)$$

où m est un réel à déterminer.

1. Résoudre en fonction de m l'équation (E).

2. On suppose que $f(0)=0$. Trouver l'expression de f et de v en fonction de m.

3. On suppose que $m=0{,}035$.

Trouver l'expression de la vitesse v de variation de cap d'un bateau.

4. Étudier son sens de variation sur $[0\,;+\infty[$.

186 Un procédé de filtration de l'eau au charbon actif permettrait d'éliminer plus rapidement le benzène présent à la surface du bassin d'une base nautique.

Le coût total de l'installation est de 20 000 euros. Le responsable de la base nautique réfléchit à cette solution. L'action du filtre commencerait alors le 13 juin 2020.

À la mise en service, à l'instant $t=0$, le responsable estime que la concentration de benzène à la surface du bassin serait de 54,7 microgrammes par litre.

Il choisit de modéliser la concentration de benzène en microgrammes par litre à la surface du bassin, en fonction du temps t exprimé en jours, par une fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ et vérifiant l'équation différentielle (E) :

$$y'+0{,}25y=0.$$

1. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation différentielle (E).

2. Justifier que, pour tout $t>0$:

$$f(t)=54{,}7\mathrm{e}^{-0{,}25t}.$$

3. Quelle serait la qualité de l'eau 19 jours après la mise en service du filtre ?