12 Équations différentielles

CAPACITÉS

- Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du type : $y' = ay + b$.
- Déterminer la solution d'une équation différentielle du type : $y' = ay + b$ vérifiant une condition initiale $y(x_0)$ donnée.

De nombreuses situations en sciences physiques peuvent être modélisées à l'aide d'équations différentielles : en électricité, en mécanique ou en physique nucléaire.
En 2016, des scientifiques ont découvert un certain nombre de mystérieuses particules flottant dans l'air au-dessus de l'Alaska. Elles contenaient de l'uranium 235... qui est utilisé dans les réacteurs nucléaires ! Heureusement, ces particules se désintègrent naturellement !

Au bout de combien de temps le nombre de particules aura diminué de moitié, appelé demi-vie ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 265

Découvrons cette étrange découverte

▶ lienmini.fr/10445-11

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première et du chapitre 8

Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-12

1 Dérivées

- **Dérivée de fonctions usuelles**

La fonction $f(x) = x^n$ a pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

- **Dérivée d'un produit et d'un quotient de fonctions**

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- Une équation de **la tangente à la courbe** de f au point **d'abscisse a** est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

2 La fonction exponentielle

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les fonctions e^u et u ont les mêmes variations et la **dérivée de la fonction e^u** est $u'e^u$ où u' est la dérivée de u.

En particulier, la dérivée de $f(x) = ke^{-ax}$ (avec k et a réels non nuls) est $f'(x) = -kae^{-ax}$.

- Pour tous réels x et y et n entier relatif :

$e^0 = 1$ et $e^1 = e$ $\qquad$ $e^x > 0$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$

$e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ $\qquad$ $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $\qquad$ $(e^x)^n = e^{nx}$

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 8

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

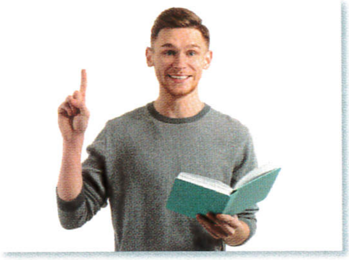
	a	b	c	d	Aide
1. Une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 1 est :	$y = 2x - 1$	$y = 2x + 1$	$y = x - 1$	$y = x + 1$	1
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f(x) = 3e^{-x}$ au point d'abscisse 1 est :	$\dfrac{3}{e}$	$-3e$	$-3e^{-1}$	$3e^{-1}$	1
3. Si $f(t) = e^{2t}$ et $f'(t)$ est sa dérivée alors :	$f'(t) + f(t) = 0$	$f'(t) = 2f(t)$	$f'(t) + 2f(t) = 0$	$0{,}5f'(t) + f(t) = 1$	2
4. Si $f(x) = 2\,e^{-x} + 3$ alors $f'(x) =$	e^{-x}	$-2e^{-x}$	$2f(x)$	$-2f(x)$	2
5. La dérivée de $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ $(x \neq 0)$ est :	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{x^2-1}{x^2}$	$\dfrac{x^2+1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	1
6. La dérivée de $f(t) = -4e^{-3t}$ est :	$-4e^{-3t}$	$12e^{-3t}$	$7e^{-3t}$	$-4e^{3t}$	2
7. Le réel k qui vérifie $ke^{-3} + 1 = -4$ est :	n'existe pas	$-3e^{-3}$	$-5e^3$	$5e^{-3}$	2
8. Si $f(x) = ke^{6x} + 1$ et $f(0) = 2$ alors k vaut :	2	1	0	-1	2

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 La solution pour découvrir ces nouvelles équations !

OBJECTIF Découvrir les fonctions solutions d'une équation différentielle → Cours 1 p. 266



1. Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$.
Calculer sa dérivée f' et vérifier que $f' - 3f = 0$. On appelle (E) cette équation.

2. Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2e^{3x}$.
Calculer la dérivée g' de g. Montrer que g et g' vérifient la même relation que f et f'.

3. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui vérifient l'équation (E).
a. $h(x) = 3e^{2x}$ **b.** $i(x) = e^{1-3x}$ **c.** $k(x) = e^{3(x+1)}$ **d.** $j(x) = \sin 3x$.

4. Vérifier que toutes les fonctions $v(x) = ke^{3x}$ où k est un réel sont solutions de (E).

2 Sur les traces des solutions

→ Mémento GeoGebra p. 319

OBJECTIF Rechercher les solutions d'une équation différentielle à l'aide d'un logiciel dynamique → Cours 1 p. 266

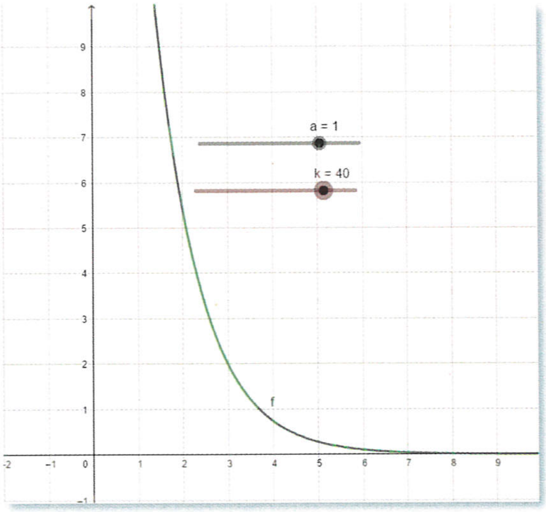
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Le but est de trouver toutes les fonctions qui vérifient $f'(x) = -af(x)$.

1. a. Sur Geogebra, créer un curseur a allant de -2 à 2 avec un incrément 0,01 et un curseur k allant de 0 à 50 avec un incrément de 1.

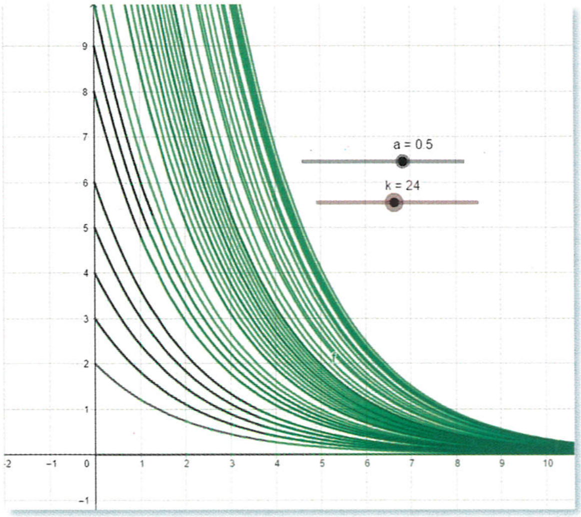
b. Entrer dans la barre de saisie l'expression :

RésolEquaDiff(–a*y,0,k,100,0.1]

(on obtient la représentation graphique d'une fonction solution de l'équation différentielle).



2. Fixer $a = 0,5$ et modifier les valeurs de k : faire un clic droit sur la courbe et activer **Afficher la trace** puis faire varier k.
Par quelle transformation passe-t-on d'une courbe à l'autre ?



3. Fixer $k = 10$ et modifier les valeurs de a. Quel est le rôle du réel a sur l'allure de la courbe ?

4. Dans la barre de saisie, entrer l'expression de $g(x) = ke^{-ax}$: taper $\boxed{g(x) = k*exp(-ax)}$. Que remarquez-vous ? En déduire les solutions de l'équation $f'(x) = -af(x)$.

3 Résoudre une équation différentielle par approximations

→ Mémento TABLEUR p. 322

OBJECTIF Utiliser la méthode d'Euler pour approcher la courbe représentative de la solution f de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$ → Cours 1 p. 266

1. Soit f une fonction et un réel h non nul. Soit le point $A(x_A ; f(x_A))$ de la courbe de f et le point B d'abscisse $x_A + h$ sur la tangente à la courbe de f en A.
Déterminer l'expression de l'ordonnée de B.

2. Soit $h = 0{,}5$. On considère les suites u_n et v_n définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
- $u_{n+1} = u_n + h$ et $u_0 = 0$.
- v_n est une suite géométrique de raison $1 + h$ et de premier terme $v_0 = 1$.

a. En utilisant une feuille de tableur comme ci-dessous, calculer les 15 premiers termes de ces suites.

C3   =C2*(1+E1)

	A	B	C	D	E
1	n	u_n	v_n	$h =$	0,5
2	0	0	1		
3	1	0,5	1,5		
4	2				
5	3				
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				

b. Représenter le nuage de points de coordonnées $(u_n ; v_n)$ en les reliant entre eux par des segments.

c. Comment évolue ce nuage en changeant la valeur de h ?

4 Désintégration radioactive

PYTHON

PHYSIQUE

OBJECTIF Résoudre un problème à l'aide d'une équation différentielle → Cours 2 p. 266

La désintégration radioactive peut être modélisée par l'équation différentielle $N'(t) = -\lambda\, N(t)$, où $N(t)$ est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t et λ une constante strictement positive (associée au noyau).

Partie 1

1. Trouver les solutions de l'équation $N'(t) + \lambda N(t) = 0$.

2. Déterminer le temps t (appelé demi-vie) en fonction de λ pour que la moitié des noyaux soient désintégrés.

Partie 2

Application à l'uranium 235. On suppose que $\lambda = 9{,}8486 \times 10^{-10}$.

1. Résoudre l'équation différentielle en fonction du nombre initial N_0 de noyaux.

2. Écrire une fonction Python qui prend en argument N_0 et une durée t en année et qui renvoie le nombre de noyaux $N(t)$ (l'instruction **From Math import** permet l'utilisation de la fonction Python exp(x)).

3. Montrer que la demi-vie de l'uranium 235 est d'environ 703 millions d'années puis le vérifier à l'aide d'une fonction Python qui reçoit en argument un nombre initial de noyaux et qui renvoie la demi-vie.

Cours

1 Généralités

DÉFINITION Une **équation différentielle** est une équation liant une **fonction** (f ou y) et sa ou ses **dérivées** successives (notées f', f'' ou y', y'').
Résoudre une telle équation revient à déterminer toutes les fonctions qui satisfont l'égalité. Une fonction qui vérifie une équation différentielle est une **solution** de cette équation.

EXEMPLE • L'équation $2y' = y$, dans laquelle y est une fonction de la variable x dérivable sur $\mathbb{R}$, est une équation différentielle.

Notation

Dans une équation différentielle, **l'inconnue** est une fonction couramment **notée y** (fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$).

2 Équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$

DÉFINITION On appelle équation linéaire du premier ordre une équation différentielle de la forme $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ où a est un réel non nul et y une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE • L'équation $y' + 2y = 0$ est une équation linéaire du premier ordre.

THÉORÈME Les **solutions** de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ sont les fonctions dérivables définies pour tous réels x par : $\boldsymbol{f(x) = ke^{-ax}}$ où k est un réel non nul.

EXEMPLE • Les solutions de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-5x}$.

→ Voir **Exercice résolu 1**

3 Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

THÉORÈME Les **solutions** de l'équation différentielle du premier ordre $\boldsymbol{y' + ay = b}$, où a et b sont des réels non nuls et y une fonction dérivable, sont les fonctions définies pour tout réel x par :

$$\boldsymbol{f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}} \text{ où } k \text{ est un réel non nul.}$$

EXEMPLE • Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 5$ sont les fonctions $f(x) = ke^{-2x} + \frac{5}{2}$.

→ Voir **Exercice résolu 2**

THÉORÈME Pour tous réels x_0 et y_0, il existe une **unique fonction f solution** de l'équation $\boldsymbol{y' + ay = b}$ avec a et b réels non nuls telle que $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$.

→ Voir **Exercice résolu 3**

Exercice résolu 1 — Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$

1. Vérifier que la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{2}}$ est solution de l'équation $y' - \frac{1}{2}y = 0$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 5y$.

3. Résoudre l'équation différentielle $4y' + y = 0$.

Méthode — Pour résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$

1. On **écrit** l'équation sous la forme $y' + ay = 0$.
2. On **reconnaît** a et on **écrit** les fonctions solutions qui sont de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ où k est une constante réelle.

Solution

1. On a : $f'(x) = \frac{k}{2}e^{\frac{x}{2}}$ soit $f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = \frac{k}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}ke^{\frac{x}{2}} = 0$.

2. L'équation $y' = 5y$ s'écrit $y' - 5y = 0$ soit $y' + (-5)y = 0$.

On a donc : $a = -5$ d'où $f(x) = ke^{5x}$.

3. L'équation $4y' + y = 0$ s'écrit $y' + \frac{1}{4}y = 0$ avec $a = \frac{1}{4}$ d'où $f(x) = ke^{\frac{-1}{4}x}$.

→ Voir Exercices 43 à 46, 52 à 61 p. 270

Exercice résolu 2 — Résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

Pour chacune des équations différentielles suivantes, déterminer les fonctions solutions.

1. $y' + 2y = 6$

2. $4y = y' - 1$

Méthode — Pour résoudre une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

1. On **écrit** l'équation sous la forme $y' + ay = b$.
2. On **reconnaît** a et b puis on **écrit** les fonctions solutions qui sont de la forme $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ où k est une constante réelle.

Solution

1. $a = 2$ et $b = 6$ d'où $f(x) = ke^{-2x} + \frac{6}{2} = ke^{-2x} + 3$.

2. L'équation $4y = y' - 1$ s'écrit $y' - 4y = 1$ avec $a = -4$ et $b = 1$ d'où $f(x) = ke^{4x} - \frac{1}{4}$.

→ Voir Exercices 68 à 71, 78 à 80 pp. 270-271

Exercice résolu 3 — Déterminer la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale

Déterminer la fonction f solution de l'équation $y' + 2y = 7$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 5$.

Méthode — Pour déterminer la solution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale

Voir Méthode 1 et 2 de l'**exercice résolu 2.**

3. On **vérifie** la condition initiale et on **détermine** la constante k.
4. On **remplace** k par la valeur trouvée dans l'expression de la fonction solution.

Solution

Dans l'équation $y' + 2y = 7$, $a = 2$ et $b = 7$ d'où $f(x) = ke^{-2x} + \frac{7}{2}$.

La condition initiale est $f(0) = 5$ d'où $f(0) = ke^0 + \frac{7}{2} = 5$ d'où $k + \frac{7}{2} = 5$ soit $k = 5 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$.

La solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 7$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 5$ est $f(x) = \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{7}{2}$.

→ Voir Exercices 62 à 66, 91 à 100 pp. 270-271

L'essentiel

1 Généralités

- Une **équation différentielle du premier ordre** est de la forme $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ ou $\boldsymbol{y' + ay = b}$, où y et y' sont des fonctions définies et dérivables pour tout réel x et a, b réels non nuls.

- Les **fonctions solutions** f de ces équations différentielles sont définies et dérivables sur un intervalle I.

Ce sont des fonctions **exponentielles**.

- Une fonction donnée f est **solution d'une équation différentielle** si, en remplaçant y par l'expression de f, les dérivées de y $(y', y''\ldots)$ par les expressions dérivées de f $(f', f''\ldots)$, l'égalité définissant l'équation différentielle est vraie.

Exemple • La fonction $f(x) = -4e^{2x}$ de dérivée $f'(x) = -8e^{2x}$ vérifie l'équation :

$$y' - 2y = 0.$$

2 Équation différentielle de la forme $y' + ay = 0$

- Les **fonctions f solutions** de l'équation $\boldsymbol{y' + ay = 0}$ sont de la forme $\boldsymbol{f(x) = ke^{-ax}}$ avec k constante réelle.

- Il existe une **unique fonction f solution** de cette équation quand elle **vérifie une condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Exemple • L'équation $y' - \frac{5}{2}y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = ke^{\frac{5}{2}x}$.

3 Équation différentielle de la forme $y' + ay = b$

- Les **fonctions f solutions** de l'équation $\boldsymbol{y' + ay = b}$ sont de la forme $\boldsymbol{f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}}$ avec k constante réelle.

- Il existe une **unique fonction f solution** de cette équation **vérifiant une condition initiale** $f(x_0) = y_0$.

Exemple • Les solutions de l'équation $y' + 3y = 2$ sont les fonctions $f(x) = ke^{-3x} + \frac{2}{3}$.

Bilan