1 Questions Flash

Diaporama

12 diapositives pour acquérir ses automatismes

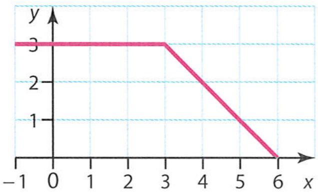
lienmini.fr/10445-23

Calculs d'intégrales à l'aide des aires

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2$. Représenter graphiquement f puis calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un calcul d'aire :

a. $\int_1^4 f(x)\,dx$ **b.** $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ **c.** $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$

3 En utilisant la représentation graphique ci-contre de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;6]$, calculer les intégrales suivantes :



a. $\int_1^3 f(x)\,dx$

b. $\int_0^3 f(x)\,dx$ **c.** $\int_3^6 f(x)\,dx$

Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

4 Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^3 (2x)\,dx$

b. $\int_1^3 (4x+1)\,dx$

c. $\int_0^2 x^2\,dx$

d. $\int_1^3 (3x^2+1)\,dx$

5 Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^2 (3x)\,dx$

b. $\int_1^3 (x-1)\,dx$

c. $\int_0^2 e^x\,dx$

d. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

6 Vérifier les résultats suivants :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=1$

b. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx=2$

c. $\int_0^2 e^{2x}\,dx=\frac{e^4-1}{2}$

d. $\int_1^3 \frac{2}{x}\,dx=2\ln 3$

Calcul d'une intégrale, une primitive étant donnée

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+2x$.

a. Déterminer $f'(x)$.

b. En déduire l'intégrale $I=\int_0^3 (2x+2)\,dx$.

8 Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x+\ln x$.

a. Déterminer $g'(x)$.

b. En déduire l'intégrale $J=\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx$.

Valeur moyenne d'une fonction

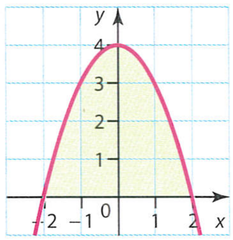
9 Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle $[3;5]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x-5$.

10 Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle $[0;2]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^x$.

11 Vérifier que la valeur moyenne sur l'intervalle $[0;\pi]$ de la fonction $x\mapsto \sin x$ est égale à $\frac{2}{\pi}$.

Calcul d'une aire associée à une fonction

12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ (figure ci-contre). Calculer l'aire de la partie colorée en vert.



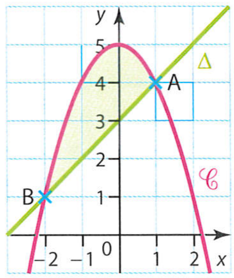
13 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x+3$. Déterminer l'aire sous la droite pour x compris entre 1 et 2 :

a. à l'aide d'une intégrale.

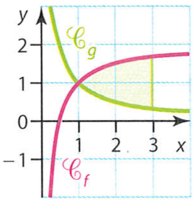
b. à l'aide d'une aire.

Aire entre deux courbes

14 Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x)=5-x^2$ et $g(x)=x+3$ ont pour représentations graphiques respectives la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.
Calculer l'aire de la partie colorée en vert.



15 Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2-\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$.
Calculer l'aire de la partie colorée en vert.



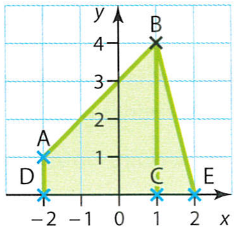
PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Intégrale d'une fonction positive

→ Aide Cours 1 p. 238

Question de cours

16 Calculer l'aire de ABCD et de BCE.



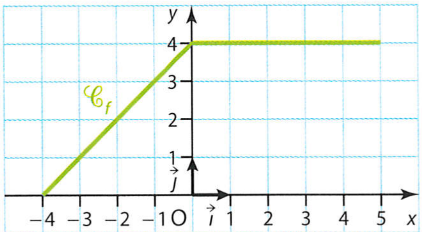
17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5$.
Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un calcul d'aire :

a. $I = \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ **b.** $J = \int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$

c. $K = \int_{-3}^0 f(x)\mathrm{d}x$ **d.** $L = \int_{2020}^{2030} f(x)\mathrm{d}x$

e. $M = \int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ **f.** $N = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x$

18 En utilisant la représentation graphique ci-dessous de la fonction f, définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$, calculer les intégrales suivantes :



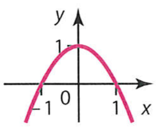
a. $I = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ **b.** $J = \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

c. $K = \int_{-4}^0 f(x)\mathrm{d}x$ **d.** $L = \int_{-4}^5 f(x)\mathrm{d}x$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 239

19 La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 1$ est donnée ci-contre dans le repère (O, I, J).
Interpréter graphiquement le nombre :

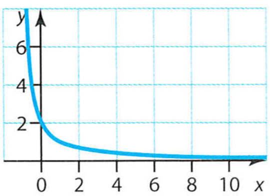
$$\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\mathrm{d}x.$$



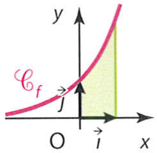
20 Soit la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{2}{x+1}$.
On donne sa courbe représentative ci-dessous.

1. Reproduire la figure et hachurer une partie du plan dont l'aire, en u.a., est égale à $\int_2^8 h(x)\mathrm{d}x$.

2. Calculer cette aire.



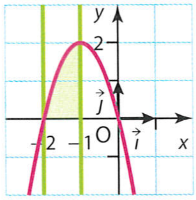
21 On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Calculer l'aire de la partie du plan colorée.



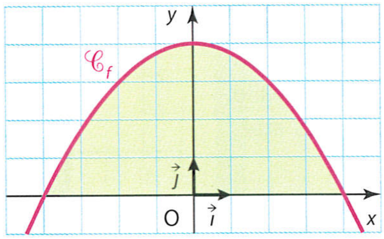
22 La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x$.

1. Exprimer avec une intégrale l'aire de la partie du plan colorée.

2. Donner alors sa valeur en unités d'aire.



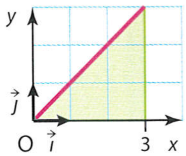
23 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - \dfrac{x^2}{4}$.
Calculer l'aire du domaine coloré en vert.



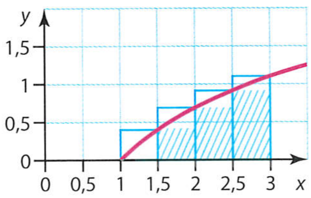
24 Soit l'intégrale $I = \int_0^3 x\mathrm{d}x$.

1. Déterminer la valeur exacte de cette intégrale.

2. On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(x) = x$. Retrouver le résultat de la question **1.** à l'aide de calculs d'aire.



25 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
À l'aide de la figure ci-dessous, donner un encadrement de l'intégrale de 1 à 3 de la fonction logarithme népérien.



→ Voir Exercice résolu 2 p. 239

26 Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Donner, pour chaque fonction, une primitive définie sur I :

a. $u'u^n$, n entier relatif différent de -1.

b. $u'\mathrm{e}^u$.

c. $u'\sin u$.

d. $u'\cos u$.

e. $\dfrac{u'}{u}$, strictement positive sur I.

*Dans les exercices **27** à **36**, calculer les intégrales données en cherchant les primitives :*

27 **a.** $\int_1^3 (2x+1)\,dx$ **b.** $\int_0^3 (3x^2+4x+1)\,dx$

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 241

28 **a.** $\int_0^2 3e^x\,dx$ **b.** $\int_0^3 e^{x+3}\,dx$

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 241

29 **a.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x\,dx$ **b.** $\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,dx$.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 241

30 **a.** $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$ **b.** $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 241

31 **a.** $\int_1^e \frac{1}{2x}\,dx$ **b.** $\int_0^3 \frac{2}{x+1}\,dx$

32 **a.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ **b.** $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 241

33 **a.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\,dx$ **b.** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

34 **a.** $\int_1^3 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ **b.** $\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}\,dx$

c. $\int_1^3 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ **d.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$.

Coup de pouce

• On cherchera une primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$.

35 **a.** $\int_0^{\ln 3} 2e^{2x}\,dx$ **b.** $\int_0^{\ln 3} 2xe^{x^2+1}\,dx$

c. $\int_{-1}^1 3x^2e^{x^3+1}\,dx$ **d.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

Coup de pouce

• On cherchera une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$.

36 **a.** $\int_{-1}^1 (x+3)^2\,dx$ **b.** $\int_0^2 3(3x-5)^2\,dx$

c. $\int_0^2 2(2x+1)^3\,dx$ **d.** $\int_0^1 2x(x^2+1)^2\,dx$.

Coup de pouce

• On cherchera une primitive d'une fonction de la forme $u'u^n$.

37 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-3)e^x$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. En déduire le calcul de l'intégrale $I=\int_0^{\frac{3}{2}} (2x-1)e^x\,dx$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 241

38 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x+1)e^{2x} \text{ et } g(x)=(2x+3)e^{2x}.$$

1. Justifier que la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. En déduire le calcul de l'intégrale $J=\int_{-1}^0 (2x+3)e^{2x}\,dx$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 241

39 On considère les deux fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}$ et $g(x)=2x\ln x$.

1. Vérifier que la fonction g est la fonction dérivée de f.

2. Calculer l'intégrale $I=\int_1^e 2x\ln x\,dx$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 241

Propriétés de l'intégrale

→ Aide **Cours 2** p. 242

Question de cours

40 $[a\,;b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, c un réel tel que $a<c<b$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Simplifier l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$.

41 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x+7}{x^2-x-2}$.

1. Vérifier que : $\frac{x+7}{x^2-x-2}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}$.

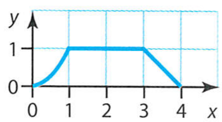
2. Calculer les intégrales $I=\int_3^5 \frac{3}{x-2}\,dx$ et $J=\int_3^5 \frac{2}{x+1}\,dx$.

3. En déduire l'intégrale $K=\int_3^5 \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx$.

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 243

42 On donne ci-contre la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ f(x)=1 & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 3 \\ f(x)=-x+4 & \text{si } 3\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$



Calculer $\int_0^4 f(x)\,dx$.

43 f est la fonction définie sur l'intervalle $I=[0\,;\pi]$ par $f(x)=1+\cos x$. Les fonctions g et h sont définies sur I par $g(x)=1{,}5f(x)$ et $h(x)=-2{,}5f(x)$.

a. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$.

b. En déduire les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx$.

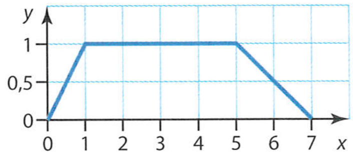
Valeur moyenne d'une fonction

→ Aide Cours 3 p. 242

Question de cours

44 Soit f une fonction définie sur un intervalle $[1\,;3]$ de $\mathbb{R}$.
Exprimer la valeur moyenne de f sur $[1\,;3]$.

45 À l'aide d'un GPS, un cycliste a mesuré sa vitesse instantanée pendant 7 minutes. Le temps est mesuré en minutes, les distances en kilomètres et la vitesse instantanée $v(t)$ en km·min^{-1}. On admet que :
$v(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$.
$v(t) = 1$ pour $1 \leqslant t \leqslant 5$.
$v(t) = -0{,}5t + 3{,}5$ pour $5 \leqslant t \leqslant 7$.



1. Calculer la distance parcourue pendant la première minute, puis pendant les 7 minutes.
2. Quelle est la vitesse moyenne du cycliste lors de son déplacement de 7 minutes ?

→ Voir Exercice résolu 6 p. 243

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$.
Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

47 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - x^3$.
Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

48 Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}$.
Calculer la valeur moyenne de cette fonction sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

49 Calculer la valeur moyenne de la fonction h définie par $h(x) = 2\sin x + 3\cos x$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

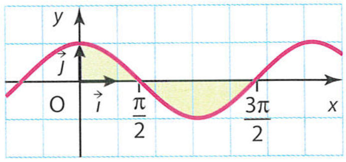
Calcul d'aires

→ Aide Cours 4 p. 244

Question de cours

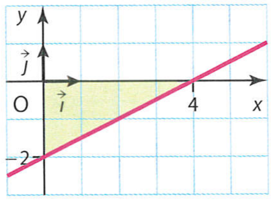
50 Soit f une fonction négative sur un intervalle $[-1\,;4]$ de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. À l'aide d'une intégrale, exprimer en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 4$.

51 Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction cosinus dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (figure ci-dessous).
1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer l'aire de la partie du plan colorée en vert.



→ Voir Exercice résolu 7 p. 245

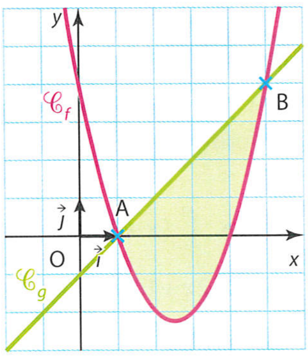
52 La figure ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{x}{2} - 2.$$



1. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier que $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x inférieur ou égal à 4.
3. En déduire l'aire de la partie colorée.
4. Retrouver ce résultat par des considérations géométriques.

53 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 16$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
1. Montrer que $f(x) \leqslant 0$ pour tout x de l'intervalle $[-2\,;2]$.
2. Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

54 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = x - 1$
(voir représentation graphique ci-contre).
On admet que les courbes se coupent aux points A et B. On admet que l'abscisse de A est égale à 1 et que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout réel x vérifiant $1 \leqslant x \leqslant 5$.

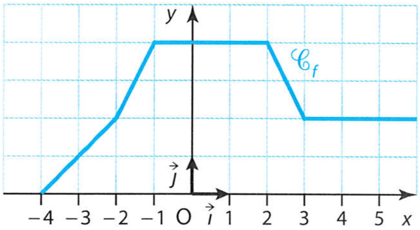


1. Déterminer les coordonnées des points A et B.
2. Calculer l'aire de la partie du plan colorée en vert.

→ Voir Exercice résolu 8 p. 245

Intégrale d'une fonction positive

55 En utilisant la représentation graphique ci-dessous de la fonction f, définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$, calculer les intégrales suivantes :



a. $I=\int_{-4}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x$

b. $J=\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x$

c. $K=\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

d. $L=\int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$

56 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par :

$$\begin{cases} g(x)=4 & \text{si } -4\leqslant x\leqslant 2 \\ g(x)=-2x+8 & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

2. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide d'un calcul d'aire :

a. $I=\int_{-4}^{-2} g(x)\,\mathrm{d}x$

b. $J=\int_{-4}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$

c. $K=\int_{3}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x$

d. $L=\int_{-4}^{4} g(x)\,\mathrm{d}x$

57 Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;5]$ par :

$$\begin{cases} h(x)=0{,}5x+2 & \text{si } -4\leqslant x\leqslant 2 \\ h(x)=5-x & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 5 \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de la fonction h.

2. Déterminer les intégrales suivantes :

a. $I=\int_{-4}^{-2} h(x)\,\mathrm{d}x$

b. $J=\int_{-4}^{2} h(x)\,\mathrm{d}x$

c. $K=\int_{2}^{5} h(x)\,\mathrm{d}x$

d. $L=\int_{-4}^{5} h(x)\,\mathrm{d}x$

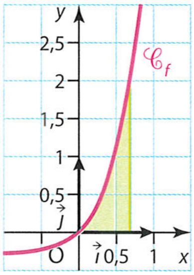
58 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. Calculer l'intégrale $\int_{1}^{5} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Interpréter géométriquement ce résultat.

59 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}-e^{x}$. On admet que pour tout réel x strictement positif, $f(x)\geqslant 0$.

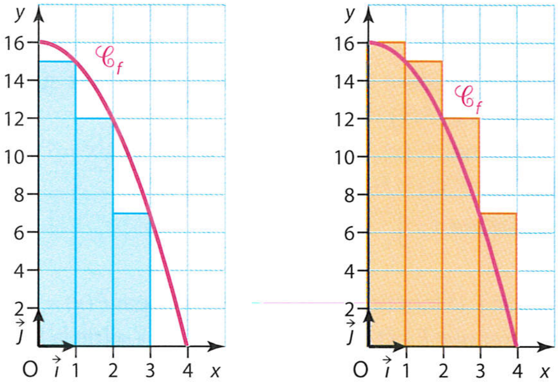
Calculer l'aire du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln(2)$.



60 ALGO **Tester et modifier un programme**

Soit la fonction f définie sur $[0\,;4]$ par $f(x)=16-x^2$.

On désire encadrer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et les axes de coordonnées, sans l'aide d'une intégrale.



1. a. Calculer la somme des aires des rectangles bleus situés sous la courbe.

b. Voici un algorithme permettant de retrouver ce résultat :

```
X ← 1
S ← 0
Tant que X ⩽ 4
    S ← (16 − X²) + S
    X ← 1 + X
Fin Tant que
```

Programmer la calculatrice et retrouver le résultat précédent.

2. a. En modifiant l'algorithme précédent, proposer un algorithme permettant d'évaluer la somme des aires des rectangles orange situés au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b. Calculer la somme des aires des rectangles orange situés au-dessus de la courbe et retrouver le résultat à l'aide du programme élaboré à la question **2. a**.

c. Calculer l'intégrale $\int_{0}^{4}(16-x^2)\,\mathrm{d}x$ et comparer le résultat obtenu aux deux précédents.

3. On désire plus de précisions dans les résultats, on partage l'intervalle $[0\,;4]$ en n intervalles, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Établir les algorithmes permettant d'évaluer S_1 la somme des aires des rectangles bleus situés en dessous de la courbe et S_2 la somme des aires des rectangles orange situés au-dessus de la courbe.
Reproduire et compléter le tableau suivant. Que remarque-t-on ?

n	4	10	20	50	100
S_1					
S_2					

61 On appelle g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x)=x\ln x.$$
1. Déterminer la fonction dérivée de g.
2. En déduire une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x+2x+1$.
3. Calculer l'intégrale $I=\int_1^e(\ln x+2x+1)\,\mathrm{d}x$.

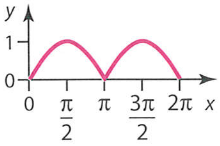
62 On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin^2 x$ et $F(x)=x-\sin x\cos x$.
1. Déterminer $F'(x)$. En remarquant que $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, vérifier que $F'(x)=f(x)$.
2. En déduire $J=\int_0^{2\pi}2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

63 Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$.
1. Montrer que F est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $f:x\mapsto\ln x$.
2. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_1^e\ln x\,\mathrm{d}x$.

Propriétés de l'intégrale

64 **1.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $]-3\,;3[$:
$$\frac{1}{3-x}+\frac{1}{3+x}=\frac{6}{9-x^2}.$$
2. Calculer les intégrales $I=\int_{-2}^{2}\frac{1}{3-x}\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^{2}\frac{6}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$ puis celle de l'intégrale $\int_{-2}^{2}\frac{1}{9-x^2}\,\mathrm{d}x$.

65 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ par :
$$\begin{cases}f(x)=\sin x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\pi\\ f(x)=-\sin x & \text{si } \pi< x\leqslant 2\pi\end{cases}$$



1. Calculer $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\int_{\pi}^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$.

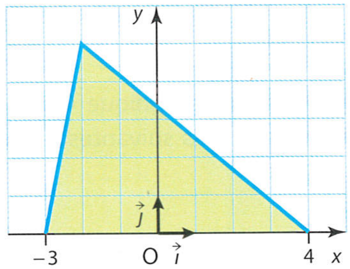
66 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$.
a. Calculer $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.
b. En déduire les intégrales :
- $\int_1^3 4x^2\,\mathrm{d}x$
- $\int_1^3 5x\,\mathrm{d}x$
- $\int_1^3(4x^2-5x)\,\mathrm{d}x$.

Valeur moyenne d'une fonction

67 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\frac{x}{2}$.
1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2\,;2]$, puis sur l'intervalle $[3\,;6]$ et enfin sur l'intervalle $[0\,;4]$.
2. Pouvait-on prévoir les signes des deux premiers résultats ?

68 Calculer la valeur moyenne de la fonction :
$x\mapsto\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

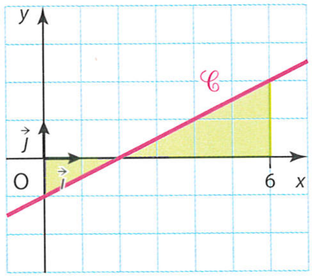
69 La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;4]$.



1. Déterminer l'intégrale $\int_{-3}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x$ par un calcul d'aires.
2. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;4]$.

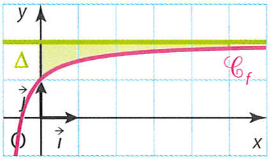
Calcul d'aires

70 On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{2}-1$ (voir figure ci-dessous).



On admet que $f(x)<0$ pour $x<2$ et que $f(x)>0$ pour $x>2$.
1. Calculer les intégrales $I=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_2^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire l'aire de la partie colorée du plan.

71 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$, de représentation graphique $\mathscr{C}_f$. On appelle Δ la droite d'équation $y=2$.



a. Vérifier que : $\dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$.
b. Calculer l'aire de la partie colorée du plan.

72 Les unités de mesure utilisées sont les unités du système SI.
Un condensateur de capacité $C=0{,}0001$ F (farad) est chargé sous une tension initiale de 20 V (volts). Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance $R=1\,000\ \Omega$ (ohm) ; on note $a=RC$. On démontre que la tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$V(t)=20\mathrm{e}^{-10t}.$$

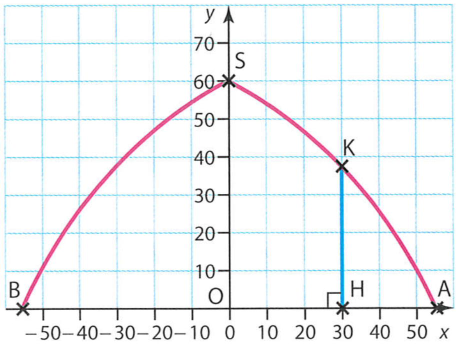
a. Étudier les variation de la fonction V.
b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles on a $V(t)\geqslant 0{,}02$.
c. L'intensité traversant le circuit est une fonction I du temps ; on a : $I(t)=CV'(t)$. Déterminer $I(t)$.
d. Calculer l'énergie W dissipée dans le résistor entre les instants $t=0$ et $t=0{,}69$ sachant que $W=\int_0^1 RI^2(t)\,\mathrm{d}t$.

73 **À chacun sa série** STL

On éteint le chauffage dans un laboratoire à 22 h. La température y est alors de 20 °C.
On souhaite étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis calculer l'énergie dissipée à l'extérieur de 22 h à 7 h le lendemain matin.
On suppose que la température extérieure est constante et égale à 11 °C. On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce, exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;9]$.
1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;9]$. On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ par $f(t)=9\mathrm{e}^{-0{,}12t}+11$.
2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé en **1.**
3. Calculer $f(9)$ (arrondir à 10^{-1}) puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, avec la calculatrice, l'heure à partir de laquelle $t<15$ °C.
5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.
6. Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;9]$, $g(t)=0{,}7\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.
L'énergie E ainsi dissipée entre 22 h et 7 h s'obtient en calculant l'intégrale $E=\int_0^9 g(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.
7. En déduire une valeur arrondie de E à 0,1 kWh près.

74 **À chacun sa série** STI2D

Un architecte a fait les plans d'un hangar pour ballon dirigeable. La forme de la façade avant de ce hangar et les points O, A, B, S, H et K sont donnés sur le schéma ci-dessous.



Cette façade avant est symétrique par rapport au segment vertical [OS] et OH = 30 m.
L'arc $\overset{\frown}{SA}$ de la façade avant correspond à une partie de la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;60]$, dans un repère orthonormal directd'origine O du plan, l'unité étant le mètre.
Le cahier des charges impose quatre conditions :
$OS=60$;
$HK>35$;
la fonction évoquée ci-dessus doit être strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;60]$
et $OA\leqslant 60$.
1. Vérifier que f, définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $f(x)=80-20\mathrm{e}^{0{,}025x}$, vérifie les trois premières conditions du cahier des charges.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur décimale approchée à 10^{-1} près par excès du réel a qui vérifie $f(a)=0$.
Vérifier que la 4$^{\text{e}}$ condition du cahier des charges est remplie.
3. a. La fonction F est définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $F(x)=80x-800\mathrm{e}^{0{,}025x}$.
Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;60]$.
b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $J=\int_0^{55{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$
c. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près de J.
2. On veut peindre la surface extérieure de la façade avant.
a. Déterminer à 10^{-2} près l'aire de cette surface (en m²).
b. La peinture utilisée est vendue en bidons de 68 litres. Sachant que cette peinture a une propriété de recouvrement de 0,2 m²·L⁻¹, combien de bidons sont nécessaires pour peindre la façade avant ?

Exercices

Pour faire le point

Tests

S'entraîner en ligne

lienmini.fr/10445-24

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

f est une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

	V	F
75 Si f est positive sur $[a\,;b]$ alors son intégrale est positive.		
76 Si $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un réel positif, alors f est positive sur $[a\,;b]$.		
77 Si f change de signe sur $[a\,;b]$, alors on ne peut pas calculer son intégrale.		
78 Le réel $I = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est toujours négatif.		
79 $\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.		
80 Le réel $J = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ représente l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ ainsi que la courbe représentative de f.		
81 Le réel $K = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\mathrm{d}x$ représente l'aire (exprimée en unités d'aire) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = -1$ ainsi que la courbe représentative de f.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

82 $\int_{-4}^{2} (x^2 + 3x - 5)\mathrm{d}x =$

a. 6 **b.** -24 **c.** 24 **d.** 0

83 $\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x =$

a. 1 **b.** 4 **c.** 2π **d.** 0

84 $\int_0^{\ln 2} 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x =$

a. 2 **b.** $2e^2$ **c.** $2e^2 - 2$ **d.** $2\ln 2 - 2$

85 $\int_1^{\mathrm{e}} \left(2x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$

a. e^2 **b.** $2e + \frac{1}{e} - 3$ **c.** $2e + \frac{1}{e} - 2$ **d.** $\ln e$

86 $\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x =$

a. 8 **b.** 5 **c.** 16 **d.** 4

87 $\int_{-1}^{1} (2x+1)^3\,\mathrm{d}x =$

a. 40 **b.** 10 **c.** -40 **d.** 80

→ Vérifier les résultats p. 324

88 **In English**

The area under the graph of a positive function $f(x)$ between $x=a$ and $x=b$ is given by the definite integral:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

We can use integration to find area enclosed by curves.

The questions **1.** and **2.** are independent.

1. a. Explain why the curve with equation $y=f(x)$, where $f(x)=\dfrac{1}{x}+\mathrm{e}^{2x}$, is positive for $x>0$.

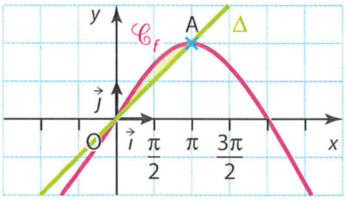
b. Determine the area of a region enclosed by the curve, the x-axis, $x=1$ and $x=2$.

2. a. Show that the curve $y=\dfrac{2}{x}$ and the straight line $y=3-x$ intersect where $x=1$ and $x=2$.

b. Determine the area enclosed between the two curves.

89 COMPÉTENCE **Réaliser**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et Δ la droite d'équation $y=\dfrac{2}{\pi}x$ (voir la figure ci-dessous).



On admet que le point A a pour coordonnées $A(\pi\,;2)$.

On note $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{2}{\pi}x\right)\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que $I=4-\pi$.

2. Interpréter géométriquement ce résultat.

90 COMPÉTENCE **Analyser, raisonner**

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(2-\ln x)\ln x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous.

1. On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses. Calculer les abscisses des points A et B.

2. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x)=-x(\ln x)^2+4x\ln x-4x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

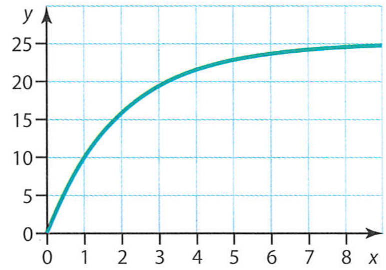
3. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan coloré. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

91 COMPÉTENCE **Analyser, raisonner**

L'étude de l'accélération d'une voiture a montré que la vitesse exprimée en mètres par seconde est une fonction dérivable de la variable réelle t, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=25(1-\mathrm{e}^{-0,5t})$, t représentant le temps exprimé en secondes.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En utilisant ce graphique, estimer l'aire en unités d'aire de la partie du plan comprise entre la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t=1$ et $t=2$.



3. a. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;+\infty[$.

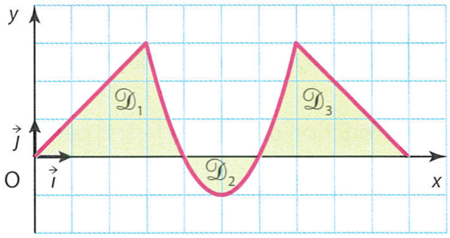
b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation graphique.

c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la distance parcourue par la voiture pendant les six premières secondes.

92 COMPÉTENCE **Réaliser**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 3\\ f(x)=x^2-10x+24 & \text{si } 3\leqslant x\leqslant 7\\ f(x)=10-x & \text{si } 7\leqslant x\leqslant 10\end{cases}$$



1. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la surface colorée.

2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;4]$.

93 COMPÉTENCE **Analyser, raisonner**

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ sont définies par :

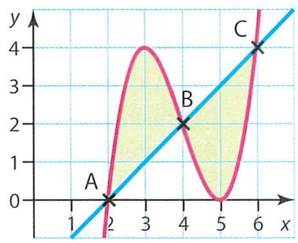
$f(x)=x^3-12x^2+45x-50$ et $g(x)=x-2$.

a. Représenter f et g, puis lire sur la figure les coordonnées des points A, B, C, points d'intersection des deux courbes.

b. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)<g(x)$.

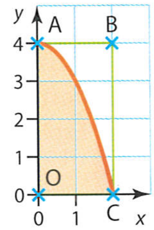
c. Calculer l'aire de la surface colorée ci-contre.

d. Calculer les valeurs moyennes de f et de g sur l'intervalle $[2\,;4]$.



Méthode de Monte-Carlo

CAPACITÉ Estimer la proportion de l'aire située sous la courbe représentative d'une fonction par rapport à l'aire du rectangle.



L'expression « méthode de Monte-Carlo » désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4-x^2$ et le rectangle OABC. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la surface colorée en orange.

1. Quelle est l'aire du carré OABC ?

2. On considère un point M de coordonnées $(x\,;y)$. Quelles conditions doivent vérifier les cordonnées de M pour que celui-ci soit dans le carré OABC ?

3. Quelles conditions doivent vérifier les cordonnées de M pour que celui-ci soit dans la surface colorée en orange ?

PYTHON En salle informatique lienmini.fr/10445-25

1. On considère l'algorithme ci-dessous :

$N \leftarrow 1\,000$
$S \leftarrow 0$
Pour i allant de 1 à N
  $x \leftarrow$ valeur aléatoire entre 0 et 2
  $y \leftarrow$ valeur aléatoire entre 0 et 4
    Si $4-x^2>y$
      $S \leftarrow S+1$
    Fin Si
Fin Pour

```python
n=1000
s=0
for i in range(n):
    x=2*random.random()
    y=4*random.random()
    if 4-x**2>y:
        s=s+1
print(8*s/n)
```

a. Que représentent les nombres N et S ?

b. Que fait l'algorithme ?

c. Comment obtenir une valeur approchée de $\mathscr{A}$?

d. Modifier l'algorithme pour obtenir directement l'aire $\mathscr{A}$.

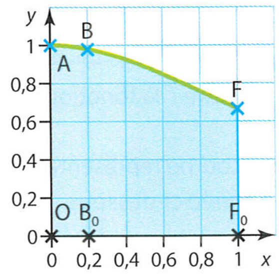
2. Exécuter le programme et évaluer $\mathscr{A}$.

3. Calculer l'intégrale $\int_1^2 (4-x^2)\,dx$ et comparer le résultat avec celui de la question **2.**

4. Appliquer cette méthode pour évaluer l'intégrale $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

Méthodes des trapèzes et de Simpson

CAPACITÉ Calculer des valeurs approchées d'une intégrale.



Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{0{,}5x^2+1}$.

On désire évaluer les intégrales $I=\int_0^{0,2} f(x)\,dx$ et $J=\int_0^1 f(x)\,dx$. $\mathscr{D}_1$ est le domaine limité par la courbe, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x=0{,}2$.

1. La figure représente la fonction f. Calculer l'aire du trapèze ABB_0O.

2. À partir de la figure, évaluer l'aire de la surface colorée en bleu.

3. En déduire une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

GEOGEBRA En salle informatique lienmini.fr/10445-26

1. Représenter f dans GeoGebra.

2. Placer les points $A(0\,;f(0))$, $B(0{,}2\,;f(0{,}2))$ et $B_0(0{,}2\,;0)$. Encadrer l'aire du domaine $\mathscr{D}_1$ par les aires de deux rectangles.

3. On considère que l'aire du trapèze $OABB_0$ est une bonne approximation de l'intégrale I. Calculer cette aire.

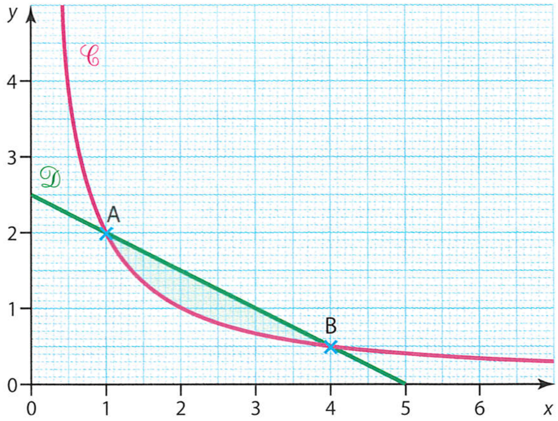
4. Reprendre les questions **2.** et **3.** pour les intervalles [0,2 ; 0,4], [0,4 ; 0,6], [0,6 ; 0,8], [0,8 ; 1]. En déduire un encadrement de J et une valeur approchée de J.

5. On désire améliorer l'approximation. On appelle M_1 le point de coordonnées $(0{,}1\,;f(0{,}1))$. À l'aide de GeoGebra, déterminer la fonction polynôme du second degré g_1, dont la représentation graphique passe par les points A, M_1 et B (instruction : $\boxed{\text{g1(x) = Polynome[<ListePoints>]}}$.

Calculer $\int_0^{0,2} g_1(x)\,dx$.

Réitérer avec les intervalles $[0{,}2\,;0{,}4]$; $[0{,}4\,;0{,}6]$; $[0{,}6\,;0{,}8]$; $[0{,}8\,;1]$. En déduire une nouvelle valeur approchée de J.

SUJET RÉSOLU BAC



94 On considère la courbe $\mathscr{C}$, représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x}$ et la droite $\mathscr{D}$, représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

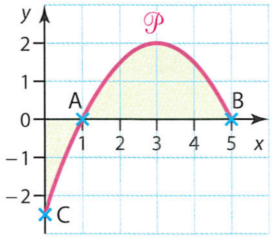
$$g(x)=-0,5x+2,5.$$

1. a. Montrer que : $f(x)-g(x)=\frac{(x-1)(x-4)}{2x}$.

b. En déduire le signe de $f(x)-g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

2. Calculer l'aire colorée.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. a. On calcule $f(x)-g(x)$ et on réduit au même dénominateur ; on développe $(x-1)(x-4)$ pour constater l'égalité. → Voir Exercice résolu 8 p. 245 **b.** On détermine le signe de chaque facteur puis du produit.	**1. a.** $f(x)-g(x)=\frac{2}{x}-(-0,5x+2,5)=\frac{2}{x}+0,5x-2,5=\frac{x^2-5x+4}{2x}$. $\frac{(x-1)(x-4)}{2x}=\frac{x^2-x-4x+5}{2x}=f(x)-g(x)$. **b.** Si $1\leqslant x\leqslant 4$, alors $x-1\geqslant 0$ et $x-4\leqslant 0$ donc $f(x)-g(x)\leqslant 0$.
2. On a démontré que $f(x)-g(x)$ est négatif sur l'intervalle $[1\,;4]$ donc l'aire est égale à l'intégrale de $g-f$ sur l'intervalle $[1\,;4]$. → Voir Exercice résolu 8 p. 245	**2.** La fonction $f-g$ est négative sur $[1\,;4]$ donc la fonction $g-f$ est positive sur $[1\,;4]$. $\int_1^4[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x=-0,5x+2,5-\frac{2}{x}=[-0,25x^2+2,5x-2\ln x]_1^4$ $=6-4\ln 2-2,25=3,75-4\ln 2$ (unités d'aire).



95 On considère la parabole $\mathscr{P}$, représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x)=-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}$.

1. Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la parabole $\mathscr{P}$ et le segment $[AB]$.

2. En déduire l'aire $\mathscr{A}_2$ de la partie du plan colorée en vert.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On vérifie le signe de f sur l'intervalle considéré puis on calcule l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;5]$. Si F est une primitive de f, l'intégrale est égale à $F(5)-F(1)$. → Voir Exercice résolu 3 p. 241	**1.** La fonction f est positive sur l'intervalle $[1\,;5]$. L'aire est égale à l'intégrale de f sur cet intervalle donc : $\mathscr{A}_1=\int_1^5\left(-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x$. Soit F une primitive de f. On a : $F(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{3}{2}x^2-\frac{5x}{2}$. Soit $\mathscr{A}_1=[F(x)]_1^5=F(5)-F(1)=\frac{25}{6}-\left(\frac{-7}{6}\right)=\frac{16}{3}$.
2. On partage l'intervalle en deux sous-intervalles $[0\,;1]$ et $[1\,;5]$. Le signe de f est constant sur chacun des intervalles. On calcule l'intégrale de $-f$ si f est négative sur l'intervalle. → Voir Exercice résolu 7 p. 245	**2.** La fonction f étant négative sur l'intervalle $[0\,;1]$, on calcule l'intégrale de $-f$ sur cet intervalle. $-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-[F(x)]_0^1=-(F(1)-F(0))=-\left(-\frac{7}{6}-0\right)=\frac{7}{6}$. $\mathscr{A}_2=-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{7}{6}+\frac{16}{3}=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$.

Sujet guidé BAC

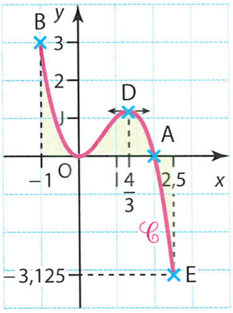
96 CAPACITÉS

- Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.
- Calculer l'intégrale d'une fonction.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1\,;2{,}5]$ par :

$$f(x)=-x^3+2x^2.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I, J), unité : 2 cm. On précise que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points O et A d'abscisses respectives 0 et 2.



1. À l'aide de la figure, indiquer le signe de la fonction f lorsque x varie sur l'intervalle $[-1\,;2{,}5]$.

2. Déterminer l'aire, en cm², de la partie du plan colorée. Vérifier l'ordre de grandeur du résultat sur la figure.

Méthode Utiliser une intégrale. Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f garde un signe constant. Déterminer une primitive de f, calculer les intégrales de f ou de $-f$ selon le signe de f sur chacun de ces intervalles. Calculer la somme de ces intégrales.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 241

97 CAPACITÉS

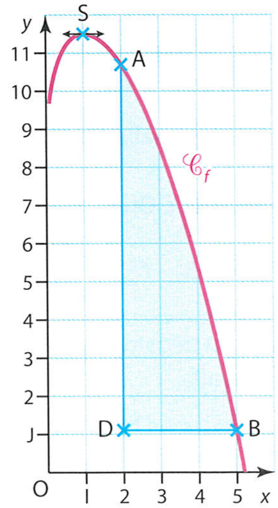
- Calculer une intégrale, une primitive étant donnée.
- Calculer l'aire d'un domaine situé entre deux courbes.

Dans cet exercice, ln désigne la fonction logarithme népérien et l'unité de longueur est le mètre (m). Un ingénieur prépare un plan pour fabriquer la voile d'un petit bateau. La voile est représentée en bleu dans le repère orthonormé ci-contre où une unité représente un mètre.

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=12+ax^2+\ln(x)$$

où a est un nombre réel qui sera déterminé dans la Partie A.



S est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1.
A est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2.
B est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5.
D est le point d'intersection de la droite d'équation $x=2$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point B.
La voile est représentée par le domaine délimité par le segment [AD], le segment [DB] et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie A

La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

1. On suppose que la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point S est horizontale.
Que vaut $f'(1)$?

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0{,}1\,;+\infty[$.

3. a. Exprimer $f'(1)$ en fonction de a.
b. Démontrer que $a=-0{,}5$.

Partie B

On admet que :

$$f(x)=12-0{,}5x^2+\ln(x).$$

1. Montrer que la fonction F définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=11x-\frac{1}{6}x^3+x\ln(x)$$

est une primitive de f sur $[0{,}1\,;+\infty[$.

Méthode Il suffit de vérifier que $F'(x)=f(x)$ pour tout x de l'intervalle de définition.

2. a. La fonction g, définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$, a pour représentation graphique la droite (BD).
Quelle est l'ordonnée du point B ?
En déduire que $g(x)=\ln 5-0{,}5$.

b. Calculer la valeur exacte, exprimée en unités d'aire, de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite (BD) et la droite d'équation $x=2$.

Méthode Si $f(x)\geqslant g(x)$, pour tout x de l'intervalle de définition, l'aire est égale à l'intégrale de $f-g$ sur l'intervalle $[2\,;5]$.

→ Voir Exercice résolu 8 p. 245

c. Vérifier qu'une valeur approchée de cette aire, arrondie au dixième, est 16,8 m².

3. Cette voile doit être légère tout en étant suffisamment résistante. Elle est fabriquée dans un tissu ayant une masse de 260 grammes par mètre carré.
La voile pèsera-t-elle moins de 5 kg ?
Justifier la réponse.

Sujet BAC

98 Un antibiotique est une substance chimique organique inhibant ou tuant des bactéries pathogènes.

Partie A

Un laboratoire affirme que 48 % de toutes les souches bactériennes sont résistantes aux antibiotiques.
Dans un échantillon de 50 souches bactériennes prises au hasard, on constate que 29 souches sont résistantes. Cela remet-il en cause l'affirmation du laboratoire ? Justifier.

Partie B

On injecte un antibiotique à un patient. On modélise cette situation par une fonction f qui, à tout temps t, exprimé en heures, écoulé depuis l'injection, associe la concentration, exprimée en mg·L^{-1}, de l'antibiotique dans le sang du patient.
Cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t)=\frac{8t}{t^2+1}.$$

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
a. Montrer que pour tout réel t positif ou nul, on a :

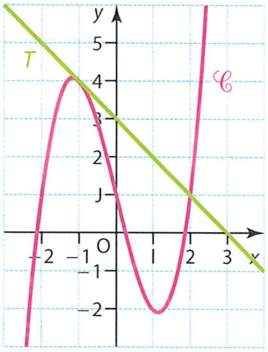
$$f'(t)=\frac{8(1-t)(1+t)}{(t^2+1)^2}.$$

Étudier le signe de f' sur $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variation de f.
b. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration de l'antibiotique est-elle maximale ? Préciser cette concentration maximale en mg·L^{-1}.
2. En antibiothérapie, on définit la CMI comme la concentration minimale d'antibiotique permettant d'empêcher la multiplication bactérienne. La CMI de l'antibiotique injecté est égale à 2,4 mg·L^{-1}.
a. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

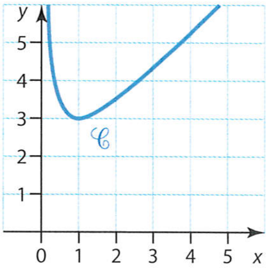
$$f(t)-2{,}4=\frac{-2{,}4t^2+8t-2{,}4}{t^2+1}.$$

b. Vérifier que $f(t)-2{,}4=\dfrac{0{,}8(3-t)(3t-1)}{t^2+1}$, en déduire le signe de cette expression sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
c. Montrer que la concentration de l'antibiotique injecté est supérieure à sa CMI pendant 2 h 40.
3. a. Déterminer une fonction F définie sur $[0,+\infty[$ primitive de f sur cet intervalle.
b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $J=\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$.
c. On admet que la valeur moyenne de la concentration de l'antibiotique en mg·L^{-1} durant les douze premières heures après l'injection est égale à $\dfrac{1}{12}J$.
Déterminer cette valeur moyenne, arrondie au centième de mg·L^{-1}.

99 Les questions sont indépendantes entre elles.



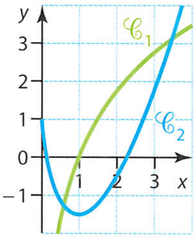
1. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.
Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(-1)$ et de $f'(-1)$ où f' est la fonction dérivée de f.



2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;5]$ par :

$$g(x)=\frac{1}{x}+x+1.$$

Déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$.
3. Le graphique ci-contre donne deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



Ces deux courbes sont représentatives de deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$: une fonction h et une de ses primitives H.
Indiquer, en justifiant votre réponse, laquelle des deux courbes $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction H.

100 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x^2-1{,}5x)\mathrm{e}^x+b.$$

où b désigne un nombre réel. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\mathrm{I}\,;\mathrm{J})$ du plan.

PARTIE A : Détermination de la fonction f

Supposons que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 3).
1. En déduire la valeur de $f(0)$.
2. En utilisant la question **1.**, déterminer la valeur du nombre b.
Dans toute la suite du problème, on admettra que pour tout réel x,

$$f(x)=(x^2-1{,}5x)\mathrm{e}^x+3$$

SUJET BAC

PARTIE B : Étude de la fonction f

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f'(x) = (x^2 + 0,5x - 1,5)\mathrm{e}^x.$$

2. a. Montrer que :

$$x^2 + 0,5x - 1,5 = (x-1)(x+1,5).$$

b. En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

4. a. Compléter le tableau de valeurs, arrondir les résultats à 10^{-1} près.

b. Représenter sur une feuille de papier millimétré la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T dans le repère (O ; I ; J). On prendra comme unité 1 cm.

x	$f(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
$-1,5$	
-1	
$-0,5$	
0	3
0,5	
1	
1,5	3
2	10,4

PARTIE C

1. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (x^2 - 3,5x + 3,5)\mathrm{e}^x + 3x.$$

Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

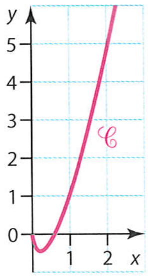
2. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Le résultat, dont on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au dixième, sera exprimé en centimètres carrés.

101 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x\ln(x) + x.$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.



1. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de f.

2. Calculer :

$$\mathscr{A} = \int_1^2 (2x\ln(x) + x)\,\mathrm{d}x.$$

On donnera la valeur exacte du résultat, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. À quoi cette intégrale correspond-elle sur le graphique ci-dessus ?

Après avoir reproduit ce graphique, illustrer la réponse en hachurant la zone correspondante de celui-ci.

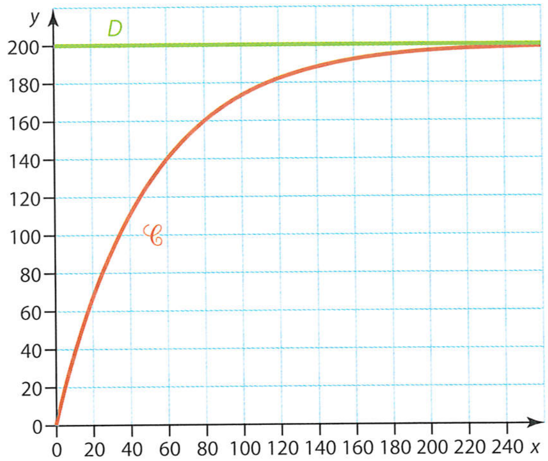
102 À un patient souffrant de douleurs intenses, on injecte un antidouleur en perfusion au rythme de 4 milligrammes par heure. La quantité d'antidouleur présent à un instant donné est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps écoulé, en heure, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antidouleur présent dans le sang.

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = -200\mathrm{e}^{-0,02t} + 200$.

1. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, montrer que : $f'(t) = 4\mathrm{e}^{-0,02t}$. Quelle information peut-on en déduire sur les variations de la fonction f ?

On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite D, d'équation $y = 200$ et asymptote à $\mathscr{C}$.



2. Donner, à l'aide du graphique, la limite de la fonction f en $+\infty$. Cette valeur représente la quantité limite de l'antidouleur présent dans le sang.

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si au bout de 24 heures, le sang contient au moins 50 % de la quantité limite de l'antidouleur. Déterminer si le débit de perfusion est satisfaisant.

4. On admet que la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion est égale à : $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer une primitive F, définie sur $[0\,;+\infty[$, de la fonction f.

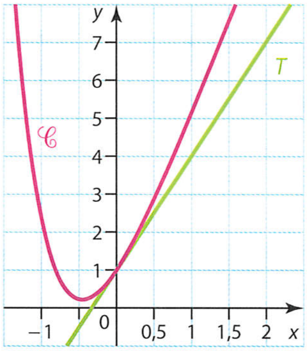
b. On pose $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la valeur exacte, puis la valeur arrondie au centième de I.

c. Donner une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antidouleur présent dans le sang pendant les dix premières heures de perfusion.

SUJET BAC

103 **Partie A : Lecture graphique**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ associée à une fonction f représentée ci-contre avec la droite T, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1\,;1{,}5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations :

a. $f(x) \geqslant 1$ **b.** $f'(x) \geqslant 0$.

2. a. Donner l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(0\,;1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2\,;7)$.

b. En déduire le nombre dérivé $f'(x)$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 5x.$$

1. Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.

On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire le tableau des variations de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

4. a. Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

b. Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

Partie C : Calcul d'aire

On admet :

• que la courbe $\mathscr{C}$ de la Partie A est la représentation de la fonction f définie dans la Partie B ;

• que la courbe $\mathscr{C}$ se situe « au-dessus » de la droite tangente T sur $\mathbb{R}$.

L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1{,}5$.

1. Après avoir reproduit la figure ci-dessus, hachurer sur le dessin l'aire $\mathscr{A}$ que l'on veut déterminer.

2. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

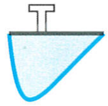
$$g(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1.$$

b. Justifier que l'aire $\mathscr{A}$ recherchée vaut, en unités d'aire :

$$\mathscr{A} = \int_0^{1,5} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

c. En déduire la valeur exacte puis l'arrondi à 10^{-2} de $\mathscr{A}$.

104 Une entreprise fabriquant des planches de surf conçoit un nouveau modèle d'aileron. Cet aileron est composé de deux parties :



– la partie supérieure ou « boîtier » permettant de fixer l'aileron à la planche ;

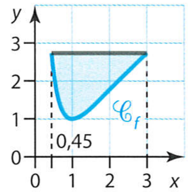
– la partie inférieure destinée à être immergée dans l'eau.

Pour estimer la quantité de matière nécessaire à la fabrication de la partie inférieure de l'aileron, l'entreprise souhaite connaître le mieux possible l'aire $\mathscr{A}$ du domaine bleu.

Pour modéliser le profil latéral de la partie inférieure, on se place dans un repère orthonormé avec une échelle de 1 carreau pour 10 cm et on se propose d'utiliser, pour des abscisses comprises entre 0,45 et 3, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a}{x} + b + 4\ln(x)$$

où a et b sont des constantes réelles qui restent à déterminer.



1. Évaluer l'aire $\mathscr{A}$ en nombre entier de carreaux en expliquant votre démarche.

2. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

3. Vérifier que le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.

4. Soit la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = (4x + 4)\ln(x) - 7x.$$

Montrer que F est une primitive de f.

5. Déterminer au cm^2 près une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$.

105 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x) = \frac{x}{12}(x^2 + 6 - 6\ln x).$$

2. En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_1^{e} f(x)\,\mathrm{d}x$.