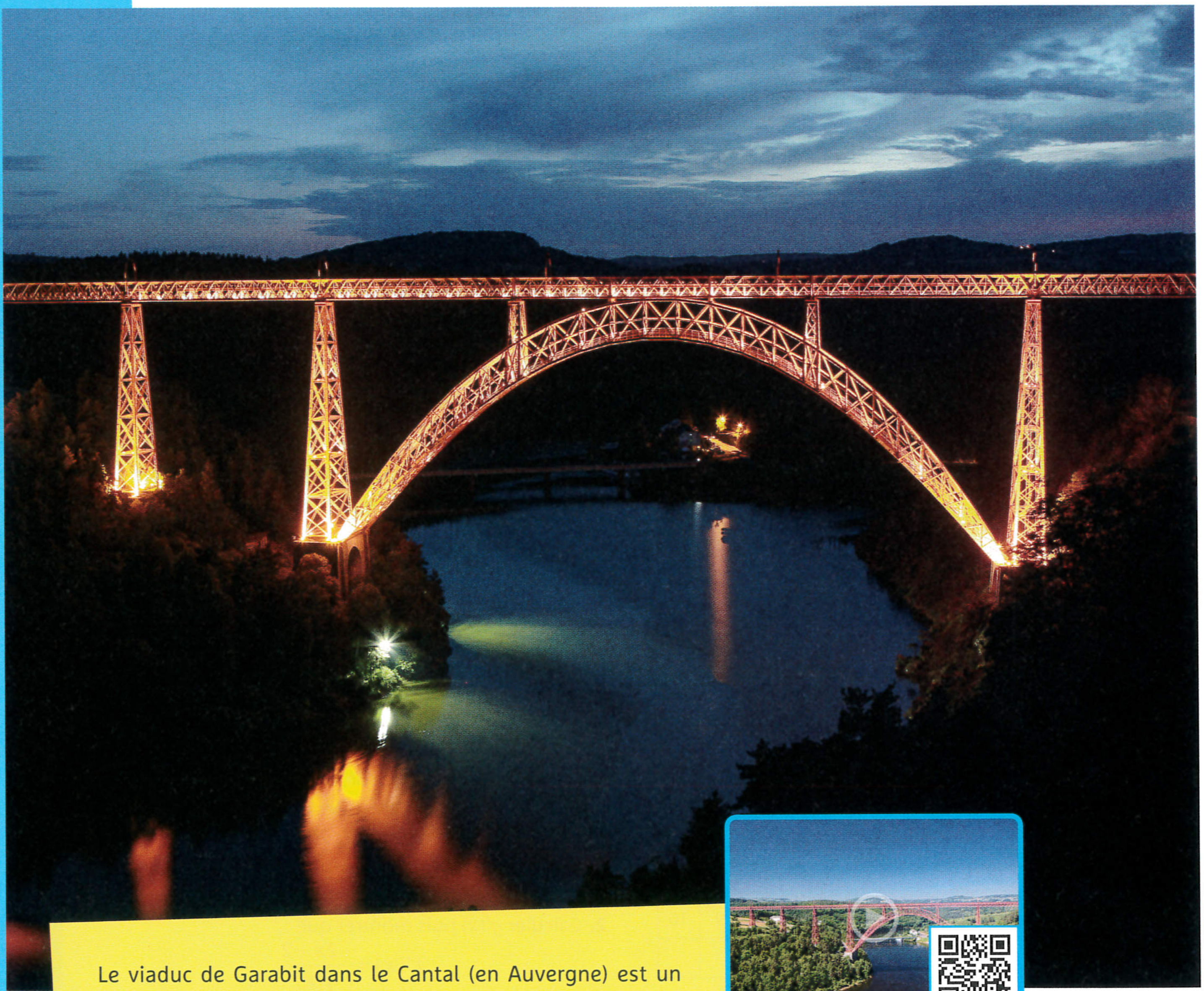
11 Intégration

CAPACITÉS

- Calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.
- Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.
- Calculer une aire sous une courbe ou entre deux courbes.



Le viaduc de Garabit dans le Cantal (en Auvergne) est un ouvrage d'art ferroviaire qui a été conçu par Léon Boyer, un jeune ingénieur de la maison Eiffel, et qui a été construit entre 1880 et 1884. Il permet le franchissement de la rivière de la Truyère, sur la ligne des Causses. Ce viaduc a une arche que l'on peut modéliser par une parabole, représentation graphique d'une fonction du second degré.

Comment calculer l'aire sous l'arche ?

→ Pour le découvrir **Activité 1** p. 236

1:35

Découvrons ce viaduc

▶ lienmini.fr/10445-21

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première et des chapitres précédents

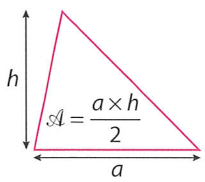
Questions Flash

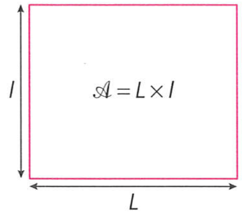
Diaporama

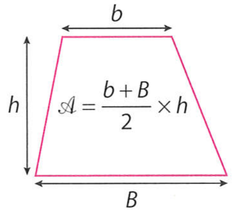
14 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-22

1 Aire de polygones remarquables







2 Primitives de quelques fonctions de référence

Dans le tableau, C désigne une constante réelle.

Intervalle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Fonction $f(x) =$	x^n n entier naturel	$\sin x$	$\cos x$	$\cos(ax+b)$ $a \neq 0$	$\sin(ax+b)$ $a \neq 0$	$\dfrac{1}{x}$	e^x
Primitives $F(x) =$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\ln x$	e^x

Voir aussi les primitives vues aux chapitres précédents : les primitives de $f(ax+b)$ (connaissant une primitive de f) et les primitives de $u'u^n$; $u'e^u$; $u'\cos u$; $u'\sin u$ (n entier relatif) p. 220.

Vérifier les acquis de Première et des chapitres précédents

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	Aide
1. ABCD est un trapèze convexe, les côtés [AB] et [CD] sont parallèles, AB = 5, CD = 7 et la hauteur est égale à 5. Son aire, en unités d'aire, est égale à :	175	60	30	1
2. F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 4x^2 + 2x - 3$ est une primitive de f définie par $f(x) =$	$4x+2$	$8x-2$	$8x+2$	2
3. Une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ est F définie par $F(x) =$	$3x^2 - 6x - 2$	$\dfrac{x^4}{4} - x^3 + 5x$	$4x^3 - 9x^2 + 5$	2
4. F la primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$ et vérifiant $f(0) = 2$ est $F(x) =$	$2 + 2\cos 2x$	$x^2 - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{5}{2}$	$x^2 + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{2}$	2
5. Une primitive F de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ est $F(x) =$	$2x + 3\ln x + 1$	$2x - \dfrac{3}{x^2} + 1$	$2x + \ln(3x)$	2
6. Une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2e^{3x+1}$ est F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) =$	$\dfrac{x^3}{3} + 2e^{3x+1}$	$\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}e^{3x+1}$	$\dfrac{x^3}{3} + 6e^{3x+1}$	1
7. Une primitive de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{2x^2+1}$ est F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) =$	$\dfrac{2x^2}{(2x^2+1)^2}$	$\dfrac{2x^2}{1{,}5x^3 + x}$	$\ln(2x^2+1)$	2

→ Voir Corrigé p. 324

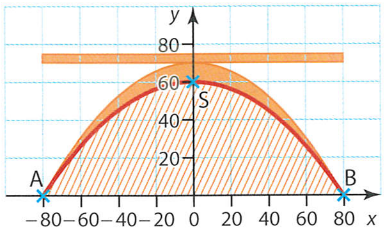
Activités

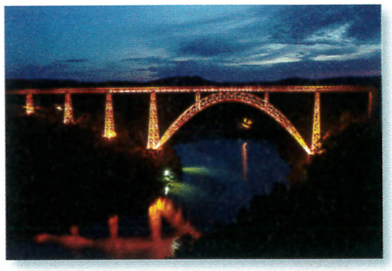
1 Aire sous une voûte avec GeoGebra

→ Mémento GeoGebra p. 319

OBJECTIF Calculer une aire sous une courbe → Cours 1 p. 238

On veut déterminer à l'aide de GeoGebra l'aire sous la voûte $\mathscr{C}$, c'est-à-dire la surface hachurée sur la figure schématisée ci-contre.
AB = 80 et OS = 60 (en mètres).



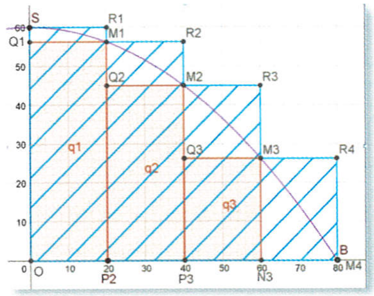


1. On cherche **l'équation de la courbe** $\mathscr{C}$ (en rouge). La courbe est une parabole, représentation graphique de la fonction f définie sur $[-80\,;80]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\mathscr{C}$ passe par B(80 ; 0) et a pour sommet S(0 ; 60). En déduire le système d'équations : $\begin{cases} f(0) = 60 & ① \\ f(80) = 0 & ② \end{cases}$

Déterminer b et c à partir des équations ① et ②. En remarquant que $f'(0) = 0$, obtenir a.

2. On suppose maintenant que $f(x) = -\dfrac{3}{320}x^2 + 60$. (OS) étant un axe de symétrie, on se restreint aux abscisses positives. L'aire sous la courbe est comprise entre celles des deux polygones $OQ_1M_1Q_2M_2Q_3M_3N_3$ et $OSR_1M_1R_2M_2R_3M_3R_4B$.

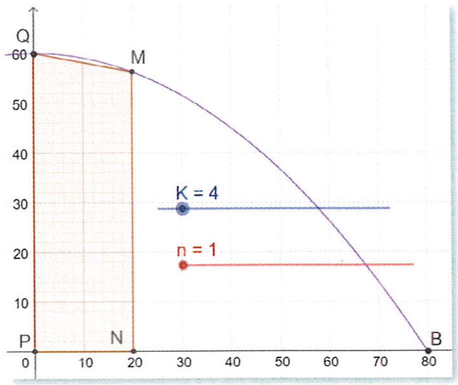


a. Reproduire la figure avec GeoGebra.
b. Lire les aires de deux polygones et encadrer l'aire sous la courbe, puis sous la voûte.
L'aire sous la courbe est appelée **intégrale** de la fonction f de 0 à 80.
L'aire sous la voûte est **l'intégrale** de la fonction f de -80 à 80.

2 Aire avec des trapèzes

→ Mémento GeoGebra p. 319

OBJECTIF Estimer l'aire sous une courbe à l'aide de trapèzes → Cours 1 p. 238



1. Ouvrir GeoGebra et tracer $\mathscr{C}$, la courbe représentative de f définie par :
$$f(x) = -\frac{3}{320}x^2 + 60.$$

2. On veut construire plusieurs trapèzes de même largeur a sous la courbe de $\mathscr{C}$. Créer le curseur K $(1 \leqslant K \leqslant 30)$, K sera le nombre de trapèzes.

3. Justifier que $a = \dfrac{80}{K}$.

4. On numérote chaque trapèze par l'entier n, n variant de 1 à K. Créer le curseur n.
a. On choisit $K = 4$. Calculer a puis placer les points $M(na\,;f(na))$, $N(na\,;0)$, $P((n-1)a\,;0)$, $Q((n-1)a\,;f((n-1)a))$ et créer le polygone MNPQ. Son aire apparaît dans la fenêtre **Algèbre**.
b. Faire varier n. Les quatre trapèzes devraient apparaître successivement.
c. On note s_i l'aire de chacun des trapèzes pour i variant de 1 à 4. Si $\mathscr{A}$ désigne l'aire totale, on écrira :
$\mathscr{A} = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \sum_1^4 s_i$. Calculer $\mathscr{A}$.

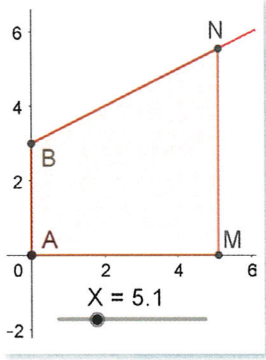
5. a. On choisit maintenant $K = 20$. Activer la fonction **Afficher la trace** et faire varier n de 1 à 20. Que remarque-t-on ?
b. L'aire $\mathscr{A}'$ du polygone situé sous la courbe est la somme des aires de chacun des trapèzes, on écrira $\mathscr{A}' = \sum_1^{20} s_i$.
$(\mathscr{A}' = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_{20})$. Calculer $\mathscr{A}'$ à l'aide de la fonction **Somme** de GeoGebra.

6. Faire varier K et conjecturer. Donner une valeur approchée de l'aire sous la voûte.

3 Aire sous la courbe d'une fonction positive

→ Mémento GeoGebra p. 319

OBJECTIF Faire le lien entre intégrale et primitive → Cours 1C p. 240



1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=0{,}5x+3$.
a. Ouvrir GeoGebra, représenter f et créer le curseur X ($0<X<20$).
b. Construire le polygone AMNB avec A(0 ; 0), B(0 ; f(0)), M(X ; 0) et N(X ; f(X)).
Son aire s'affiche : **poly 1**.
c. Ouvrir la fenêtre **Graphique 2**, y placer le point P(X ; poly1) avec la trace active.
d. Faire varier le curseur, on obtient la courbe représentative d'une fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$.
e. En calculant l'aire du trapèze AMNB, déterminer $F(x)$. Vérifier le résultat sur Graphique 2.
Que peut-on dire de f par rapport à F ? de F par rapport à f ?

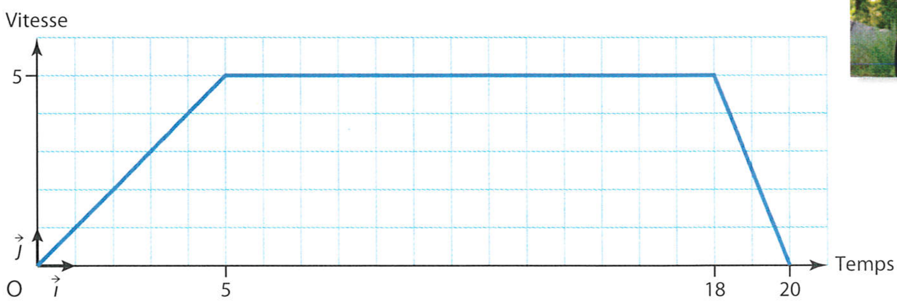
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$.
a. Représenter g et placer un curseur X ($0<X<20$).
b. Pour déterminer l'aire sous la courbe, on utilise la fonction appelée **Intégrale**.
Instruction : Intégrale[<Fonction>,<x min>,<x max>] avec x min = 0 et x max = X.
GeoGebra la nomme a. Ouvrir une seconde fenêtre, y placer le point P(X ; a), avec trace activée.
c. Faire varier le curseur. On obtient une courbe représentative d'une fonction G définie sur $[1\,;+\infty[$.
Vérifier graphiquement que G est une fonction connue. Que peut-on dire de g par rapport à G ?
d. Procéder de même avec la fonction h définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=e^x$.

4 Valeur moyenne d'une fonction

OBJECTIF Calculer la valeur moyenne d'une fonction → Cours 3 p. 242

Une cycliste se déplace en ligne droite pendant 20 secondes. Sa vitesse est représentée graphiquement sur la figure ci-dessous, le temps est exprimé en secondes et la vitesse en m·s^{-1}.

On donne : $\begin{cases} v(t)=t & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 5\\ v(t)=5 & \text{si } 5\leqslant t\leqslant 18\\ v(t)=-2{,}5t+50 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 5\end{cases}$

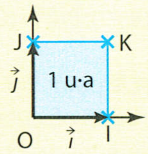


1. a. La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 est l'intégrale de la vitesse entre ces instants. Quelle est la distance parcourue entre les instants $t_1=0$ et $t_2=5$?
b. En déduire la vitesse moyenne de la cycliste entre les instants 0 et 5. Rappel : $v_{moy}=\dfrac{d}{t}$ où d représente la distance parcourue et t la durée.
c. Vérifier que $v_{moy}=\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 v(t)\,dt$.
2. Mêmes questions avec $t_1=0$ et $t_3=18$, puis avec $t_1=0$ et $t_4=20$.
On généralisera cette formule : la **valeur moyenne d'une fonction f** sur un intervalle $[a\,;b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

1 Intégrale d'une fonction positive

A Intégrale d'une fonction positive sur un intervalle

Définition Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On appelle **unité d'aire**, notée **u.a.** l'aire du rectangle OIKJ, les points I, J, K ayant pour coordonnées respectives $(1\,;0)$, $(0\,;1)$ et $(1\,;1)$.



Exemple • Si $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal d'unités graphiques 3 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées alors 1 u.a $= 2 \times 3\text{ cm}^2 = 6\text{ cm}^2$.

Définition Soit f une fonction **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On appelle **intégrale de f de a à b** et on note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par :
- l'axe des abscisses ;
- la courbe $\mathscr{C}$;
- les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

→ Voir Exercice résolu 1

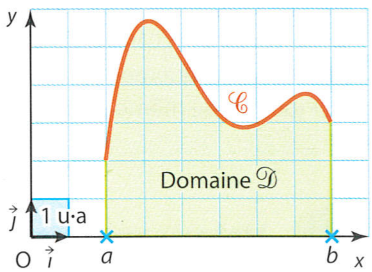
Vocabulaire

- On dit que a et b sont les **bornes de l'intégrale.**
- La variable x est appelée **variable d'intégration.**

Cette variable peut être notée indifféremment y, t, θ…

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\theta)\mathrm{d}\theta = \ldots$$

On dit que la variable d'intégration est « **muette** ».



B Approximation d'une intégrale

Soit f une fonction positive et croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, est égale à l'aire de la partie du plan située sous la courbe $\mathscr{C}$.
Pour estimer $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, on construit n rectangles de largeur Δx situés sous la courbe $\mathscr{C}$ (figure 1) et au-dessus de $\mathscr{C}$ (figure 2).
Notons $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les aires des n rectangles orange et $s_1, s_2, \ldots, s_n$ celles des n rectangles verts.
$q_1 = f(x_1) \times \Delta x, \ldots, q_n = f(x_n) \times \Delta x$; de même, $s_1 = f(x_2) \times \Delta x, \ldots,$
$s_n = f(x_{n+1}) \times \Delta x$.
On écrira : $q_i = f(x_i) \times \Delta x$ et $s_i = f(x_{i+1}) \times \Delta x$, $1 < i < n$.
I est compris entre la somme des aires de rectangles orange et la somme des aires des rectangles verts. On note :
$q_1 + \ldots + q_i + \ldots + q_n = \sum_1^n q_i$ et $s_1 + \ldots + s_i + \ldots + s_n = \sum_1^n s_i$.
$\sum_1^n s_i$ se lit « somme de 1 à n des s_i ».
On écrira : $\sum_1^n q_i \leqslant I \leqslant \sum_1^n s_i$.

Remarques
- Si f est positive et décroissante, on procède de la même manière en faisant attention à la hauteur des rectangles.
- Si f n'est pas monotone, on découpera l'intervalle d'intégration en plusieurs intervalles, la fonction f étant monotone sur chacun des intervalles.

→ Voir Exercice résolu 2

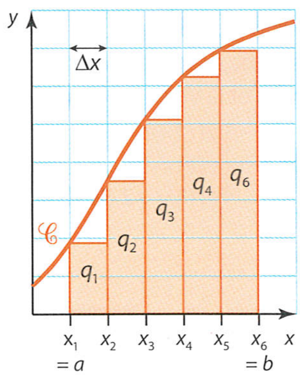


Figure 1

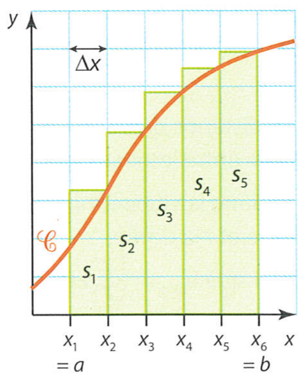
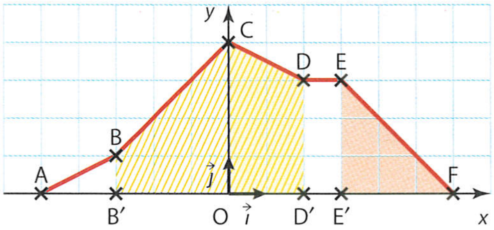


Figure 2

Exercice résolu 1

Calculer des intégrales d'une fonction affine par intervalles

La représentation graphique ci-contre est celle d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-5\,;6]$.



Calculer les intégrales :

1. $\int_3^6 f(t)\,dt$ **2.** $\int_0^2 f(t)\,dt$ **3.** $\int_{-3}^2 f(t)\,dt$

Méthode

Pour calculer des intégrales d'une fonction affine par intervalles

❶ On **s'assure** que $f \geqslant 0$ sur $[-5\,;6]$.

❷ On **calcule** l'aire du domaine situé « sous la courbe » en utilisant les formules d'aire des polygones remarquables.

Solution

1. L'intégrale $\int_3^6 f(t)\,dt$ est égale à l'aire du triangle EE'F donc : $\int_3^6 f(t)\,dt = \frac{1}{2} \times EE' \times E'F = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$.

2. L'intégrale $\int_0^2 f(t)\,dt$ est égale à l'aire du trapèze OD'DC donc : $\int_0^2 f(t)\,dt = \frac{(OC + D'D)}{2} \times OD' = \frac{4+3}{2} \times 2 = 7$.

3. L'intégrale $\int_{-3}^2 f(t)\,dt$ est égale à la somme des aires des trapèzes B'OCB et OD'DC donc :

$$\int_{-3}^2 f(t)\,dt = \frac{(B'B + OC)}{2} \times B'O + \frac{(OC' + D'D)}{2} \times OD' = \frac{1+4}{2} \times 3 + 7 = \frac{15}{2} + 7 = \frac{29}{2}.$$

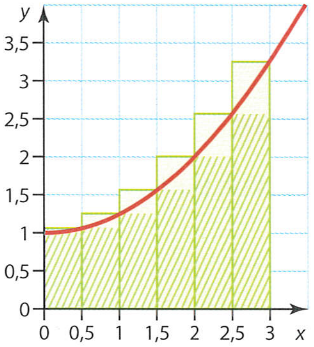
→ Voir **Exercices 16 à 18** p. 248

Exercice résolu 2

Calculer la valeur approchée d'une intégrale d'une fonction positive par la méthode des rectangles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$.

Donner une valeur approchée de $\int_0^3 f(x)\,dx$ en découpant l'intervalle $[0\,;3]$ en six intervalles.



Méthode

Pour calculer la valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles

❶ On **partage** l'intervalle en n intervalles de même longueur.

❷ On **construit** sur chaque intervalle le rectangle sous la courbe.

❸ On **calcule** la somme des aires des rectangles situés « sous la courbe ».

❹ On **fait de même** avec les rectangles situés « au-dessus de la courbe ».

Solution

Les rectangles **sous** la courbe de f ont pour largeur $\frac{3}{6} = 0{,}5$ et pour hauteurs respectives $f(0), f(0{,}5), \ldots, f(2{,}50)$. Posons $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, …, $x_6 = 2{,}5$ et $x_7 = 3$. L'aire des rectangles **sous** la courbe est la somme des aires de chaque rectangle :

$$\sum_1^6 f(x_i) \times \Delta x = f(0) \times 0{,}5 + f(0{,}5) \times 0{,}5 + f(1) \times 0{,}5 + f(1{,}5) \times 0{,}5 + f(2) \times 0{,}5 + f(2{,}5) \times 0{,}5$$

$$= 1 \times 0{,}5 + \frac{17}{16} \times 0{,}5 + \frac{5}{4} \times 0{,}5 + \frac{25}{16} \times 0{,}5 + 2 \times 0{,}5 + \frac{41}{16} \times 0{,}5 = 4{,}718\,75.$$

Les rectangles **au-dessus** de la courbe de f ont aussi pour largeur $\frac{3}{6} = 0{,}5$ mais ils ont pour hauteurs respectives $f(0{,}5)$, $f(1), \ldots, f(3)$. On calcule de la même manière la somme des aires des rectangles **au-dessus** de la courbe :

$$f(0{,}5) \times 0{,}5 + f(1) \times 0{,}5 + f(1{,}5) \times 0{,}5 + f(2) \times 0{,}5 + f(2{,}5) \times 0{,}5 + f(3) \times 0{,}5 = \sum_1^6 [f(x_{i+1}) \times 0{,}5] = 5{,}843\,75.$$

On en déduit que $4{,}718\,75 < \int_0^3 f(x)\,dx < 5{,}843\,75$.

→ Voir **Exercice 25** p. 248

C Intégrale et primitive

Dans l'activité 3, on a conjecturé que la fonction F qui donnait l'aire sous la courbe entre 0 (ou 1) et X était une primitive de la fonction f. En généralisant :

Théorème Soit f une fonction monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction $\boldsymbol{F : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ pour tout x appartenant à $[a\,;b]$.

Remarques

- Ce résultat reste valable pour une fonction f non monotone sur $[a\,;b]$. On décompose cet intervalle en une réunion d'intervalles tels que, sur chacun de ceux-ci, f soit monotone.
- Dans l'intégrale $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, la variable d'intégration doit être différente de x.

Propriété Soit f une fonction positive sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On a alors : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

Notation

On écrit :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemples

- $\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$
- $\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}.$

Remarque • Le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F de f. En effet, soit G une autre primitive de f, il existe un unique réel k tel que pour tout x de $[a\,;b]$, $G(x) = F(x) + k$. Alors :
$G(b) - G(a) = [F(b) + k] - [F(a) + k] = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$.

→ Voir **Exercices résolus 3 et 4**

D Intégrale d'une fonction de signe quelconque

On utilise la formule $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, valable pour une fonction positive, pour définir l'intégrale d'une fonction de signe quelconque.

Définition Soit f une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$.
Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$. On a alors : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$.

Exemples

- $\int_{-1}^2 x^3\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4}.$
- $\int_0^\pi \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = [\sin(\theta)]_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

Remarques

- Comme le montre le deuxième exemple ci-dessus, on peut avoir $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$ sans que f ne soit nulle sur l'intervalle $[a\,;b]$.
- Certains logiciels et les calculatrices scientifiques nous permettent d'obtenir une valeur approchée voire exacte d'une intégrale. Instructions :

GeoGebra : `Intégrale[<Fonction>, <x min>, <x max>]`
TI : **MATH** **9 fnInt**(f(X),X,xmin,xmax)
Casio : menu **RUN OPTN CALC** syntaxe : $\int(f(x), x\min, x\max)$.

Exercice résolu 3 — Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I=\int_1^3(3x^2+4x+5)\mathrm{d}x$

2. $J=\int_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

3. $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$

4. $L=\int_0^2\frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$

Méthode — **Pour calculer une intégrale à l'aide d'une primitive**

1 On **recherche** une primitive F de la fonction f. Pour déterminer une primitive d'une fonction f :
- si f s'exprime sous forme d'une somme, on cherche une primitive pour chaque terme de la somme ;
- si f s'exprime sous forme d'un produit, on cherche à utiliser les formules $u'u^n$, $u'\mathrm{e}^u$, $\frac{u'}{u}$.

2 On **calcule** $F(b)-F(a)$.

Solution

1. Une primitive de la fonction $f : x\mapsto 3x^2+4x+5$ est la fonction $F : x\mapsto x^3+2x^2+5x$. Donc :
$I=\int_1^3(3x^2+4x+5)\mathrm{d}x=[x^3+2x^2+5x]_1^3=(3^3+2\times3^2+5\times3)-(1^3+2\times1^2+5\times1)=52.$

2. Une primitive de la fonction $f : x\mapsto 2\mathrm{e}^x$ est la fonction $F :\mapsto 2\mathrm{e}^x$. Donc : $J=\int_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[2\mathrm{e}^x]_0^1=2\mathrm{e}-2.$

3. Une primitive de la fonction $f : x\to\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ est la fonction $F : x\to-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Donc :

$$\mathrm{K}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\left[-\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

4. Une primitive de la fonction $f : x\to\frac{2x}{x^2+4}$ est la fonction $F : x\mapsto\ln(x^2+4)$ car f peut s'écrire sous la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x^2+4$ et $u'(x)=2x$: la primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln u$. Donc : $L=\int_0^2\frac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x=[\ln(x^2+4)]_0^2=\ln8-\ln4=\ln2.$

→ Voir Exercices 27 à 36 p. 249

Exercice résolu 4 — Calculer une intégrale, une primitive étant donnée

Soit l'intégrale $I=\int_1^{\mathrm{e}}(2x+1+\ln x)\mathrm{d}x$ et la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=x^2+x\ln x.$$

1. Déterminer F', la fonction dérivée de F.

2. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Méthode — **Pour calculer une intégrale, une primitive étant donnée**

1 On **ne connaît pas** de primitive de la fonction à intégrer, on **suit** l'énoncé qui nous donne des pistes.

2 On est très attentif à l'expression « en déduire » qui signifie que les résultats de la question précédente doivent être utilisés.

Solution

1. La fonction $x\mapsto x^2$ a pour fonction dérivée $x\mapsto 2x$.
La fonction $x\mapsto x\ln x$ a pour fonction dérivée $x\mapsto 1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$ soit $x\mapsto\ln x+1$.
$F'(x)=2x+\ln x+1=2x+1+\ln x=f(x)$.

2. On remarque que F est une primitive de la fonction f donc :
$I=\int_1^{\mathrm{e}}(2x+1+\ln x)\mathrm{d}x=[x^2+x\ln x]_1^{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}\ln\mathrm{e})-(1^2+\ln1)=\mathrm{e}^2+\mathrm{e}-1.$

→ Voir Exercices 37 à 39 p. 249

2 Propriétés de l'intégrale

A Positivité

Théorème Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$, avec $a<b$.
Si $f(x)\geqslant 0$ pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, alors $\int_a^b \boldsymbol{f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0}$.

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a\,;b]$, avec $a<b$.
Si $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

B Linéarité

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[a\,;b]$ et soit k une constante réelle. Alors :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (kf(x))\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

→ Voir Exercice résolu 5

C Relation de Chasles

Théorème Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ et soit c un réel quelconque de $[a\,;b]$. On a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

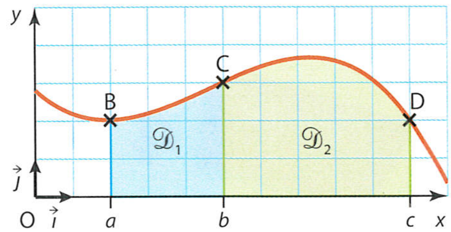


Illustration : si f est une fonction positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire colorée est la somme des aires des domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Conséquence • Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **périodique** de période T, et soit a un réel quelconque, $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

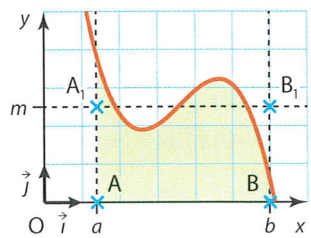
Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$. On appelle **valeur moyenne de f** sur l'intervalle $[a,b]$ le nombre réel m :

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarques

- Cette formule reste vraie si $a>b$.
- Pour définir une valeur moyenne, il faut **deux** éléments : une fonction « intégrable » et un intervalle.

Illustration : l'aire du rectangle AA_1B_1B est égale à l'aire colorée en vert.



→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Utiliser la linéarité pour le calcul de l'intégrale d'une fonction

On considère les intégrales :
$I=\int_3^4 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x$, $J=\int_3^4 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x$ et $K=\int_3^4 \frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $K=I-J$.

2. Calculer les intégrales I et J. En déduire K.

Méthode — Pour utiliser la linéarité pour le calcul de l'intégrale d'une fonction

1 Comme l'énoncé le sous-entend, on **ne calcule pas** les intégrales I, J, K lors de la première question.

2 Pour I et J, on **cherche** les primitives mais on ne connaît pas de primitive de la fonction $x \mapsto \frac{4}{x^2-4}$ donc on suit la méthode proposée par l'énoncé.

Solution

1. $I-K=\int_3^4 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x-\int_3^4 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x=\int_3^4\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x.$

$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{4}{x^2-4}$

$I-K=\int_3^4 \frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x=K.$

Donc $K=I-J$ (linéarité de l'intégrale).

2. $\frac{1}{x-2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x-2$ et $u'(x)=1$.
Donc une de ses primitives est $\ln u$.

$I=\int_3^4 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x=[\ln(x-2)]_3^4=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2.$

De même, $\frac{1}{x+2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x)=x+2$ et $u'(x)=1$. Donc une de ses primitives est $\ln u$.

$J=\int_3^4 \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x=[\ln(x+2)]_3^4=\ln 6-\ln 5=\ln 2+\ln 3-\ln 5.$

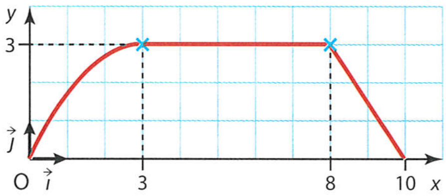
$K=I-J=\ln 2-(\ln 2+\ln 3-\ln 5)=\ln 5-\ln 3.$

→ Voir Exercices 40 à 43 p. 249

Exercice résolu 6 — Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Les distances sont exprimées en mètres, le temps en secondes et la vitesse en m·s^{-1}. Olivia et Oscar veulent tester les performances d'une voiture radiocommandée sur un départ arrêté. Ils réalisent sur une durée de 10 secondes le relevé de vitesse ci-dessous. Ils admettent que :

- $v(t)=2t-\frac{t^2}{3}$ pour $0\leqslant t\leqslant 3$
- $v(t)=3$ pour $3\leqslant t\leqslant 8$
- $v(t)=15-\frac{3}{2}t$ pour $8\leqslant t\leqslant 10$.



1. Calculer la distance parcourue les 5 premières secondes.

2. Calculer la vitesse moyenne μ sur les 10 secondes.

Méthode — Pour calculer la valeur moyenne d'une fonction

1 La distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 est égale à l'intégrale de la fonction vitesse entre t_1 et t_2.

2 La vitesse moyenne est donnée par la formule du cours $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Solution

1. La vitesse est la fonction dérivée du déplacement. Pour calculer la distance parcourue, on calcule l'intégrale :

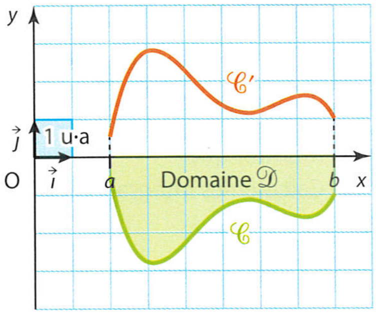
$$\int_0^5 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t+\int_3^5 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^3 2t-\frac{t^2}{3}\mathrm{d}t+\int_3^5 3\mathrm{d}t=\left[t^2-\frac{t^3}{9}\right]_0^3+3\times 2=\left(3^2-\frac{3^3}{9}\right)-0+6=12.$$

2. $$\mu=\frac{1}{10-0}\times\int_0^{10} v(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{10}\times\left[\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t+\int_3^8 v(t)\mathrm{d}t+\int_8^{10} v(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\frac{1}{10}\times\left[\int_0^3\left(2t-\frac{t^3}{3}\right)\mathrm{d}t+\int_3^8 3\mathrm{d}t+\int_8^{10}\left(15-\frac{3}{2}t\right)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{10}\times\left[6+3\times(8-3)+\left[15t-\frac{3}{4}t^2\right]_8^{10}\right]=\frac{1}{10}\times 24=2,4.$$

→ Voir Exercices 44 à 49 p. 250

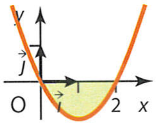
4 Calculs d'aires

A Aire d'un domaine limité une courbe



La symétrie axiale conservant l'aire, on en déduit :
Soit f une **fonction négative** sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$.
L'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale, en unités d'aire, à :

$$\int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Exemple • f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$. La fonction f est négative sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'aire exprimée en unités d'aire de la surface colorée en vert est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_0^2 -f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

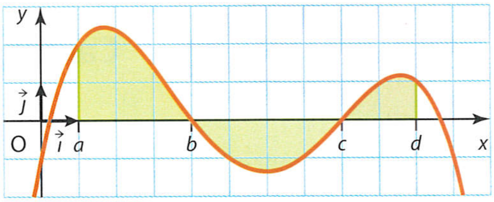
B Aire définie par la représentation graphique d'une fonction changeant de signe

Si la **fonction change de signe**, on découpe l'intervalle d'intégration en plusieurs intervalles, la fonction gardant un même signe sur chacun.
L'aire totale est la somme des aires de chacun des domaines.

Exemple • Sur la figure ci-contre, l'aire totale a pour expression, en unités d'aire :

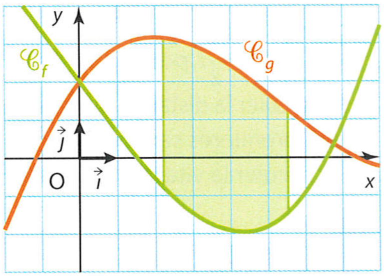
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$$

On notera le signe « – » devant l'intégrale de b à c puisque la fonction f est **négative** sur l'intervalle $[b\,;c]$.



→ Voir **Exercice résolu 7**

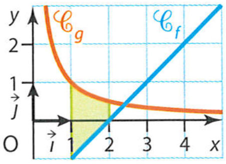
C Aire entre deux courbes



Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ $(a < b)$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$. L'aire de la partie du plan limitée pas les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\mathscr{A} = \int_a^b (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\mathbf{dx}.$$

Cette formule est vraie, quels que soient les signes des fonctions f et g sur l'intervalle $[a\,;b]$.



Exemple • Les fonctions f et g sont définies sur $]0\,;+\infty$ par $f(x) = x - 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;2]$, $f(x) < g(x)$ donc l'aire exprimée en unités d'aire de la surface colorée est égale à :

$$\int_1^2 [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (x-2)\right]\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x + 2\right)\mathrm{d}x$$
$$= (\ln 2 - 2 + 4) - (0 - 0{,}5 + 2) = \ln 2 + 0{,}5$$

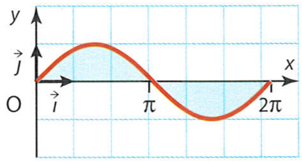
→ Voir **Exercice résolu 8**

Exercice résolu 7 Calculer une aire associée à une fonction changeant de signe

Soit f la fonction définie sur $[0\,;2\pi]$ par $f(x)=\sin x$.

1. Calculer $I=\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer l'aire de la surface colorée en bleu.



Méthode — Pour calculer une aire associée à une fonction changeant de signe

❶ On **détermine** les intervalles sur lesquels la fonction a un signe constant.

❷ On **calcule** l'aire de chacun des domaines.

❸ On **effectue** la somme de ces résultats.

Solution

1. $I=\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{2\pi}=-\cos(2\pi)-(-\cos 0)=-1-(-1)=0.$

L'intégrale est nulle bien que la fonction f ne soit pas identiquement nulle, on peut déjà conjecturer que l'aire de la question **2.** ne sera pas nulle.

2. La fonction sinus est positive sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ et négative sur l'intervalle $[\pi\,;2\pi]$ (résultat connu), donc :

$\mathcal{A}=\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi}-\sin x\,\mathrm{d}x=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{2\pi}=[-\cos\pi-(-\cos 0)]+[\cos 2\pi-\cos\pi]=[1-(-1)]+[1-(-1)]=4.$

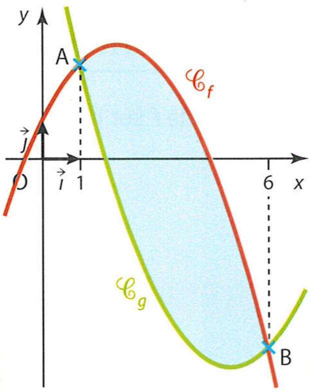
→ Voir **Exercices 50 à 53** p. 250

Exercice résolu 8 Calculer une aire entre deux courbes

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-0{,}5x^2+2x+1$ et $g(x)=0{,}5x^2-5x+7$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B, points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On admet que A a pour abscisse 1.

2. Déterminer l'aire du domaine colorié.



Méthode — Pour calculer une aire entre deux courbes

❶ On **s'assure** que $f(x)-g(x)$ est positif sur l'intervalle $[a\,;b]$.

❷ On **calcule** l'intégrale.

Solution

1. Les abscisses des points A et B sont les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\Leftrightarrow -0{,}5x^2+2x+1=0{,}5x^2-5x+7\\ &\Leftrightarrow -x^2+7x-6=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)(-x+6)=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=6\end{aligned}$$

$f(1)=g(1)=2{,}5$ et $f(6)=g(6)=-5$.

Les points ont pour coordonnées A$(1\,;2{,}5)$ et B$(6\,;-5)$.

2. $f(x)-g(x)=-x^2+7x-6$ est un polynôme du second degré qui a pour racines 1 et 6 et qui est donc positif sur $[1\,;6]$.

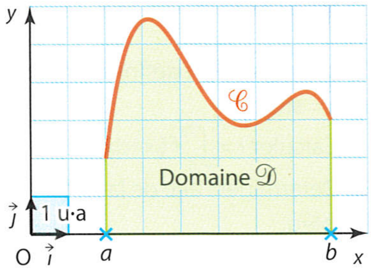
On peut appliquer la formule de calcul d'aire :

$$\mathcal{A}=\int_1^6 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_1^6(-x^2+7x-6)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}x^2-6x\right]_1^6=\frac{125}{6}.$$

→ Voir **Exercice 54** p. 250

L'essentiel

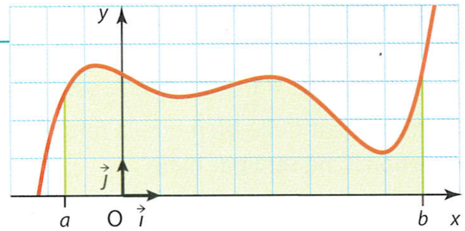
1 Intégrale d'une fonction positive



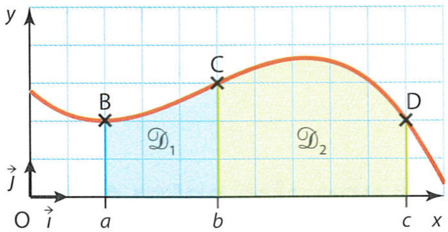
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, **l'intégrale** de a à b de la fonction positive f, est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire **(u.a.)**.
- Si F est une primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

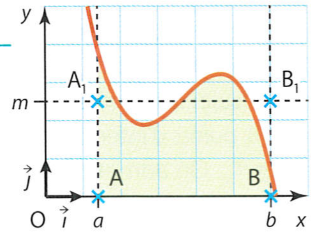
2 Propriétés de l'intégrale



- Si f est **positive** sur $[a\,;b]$ avec $a < b$ alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b (kf(x))\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$



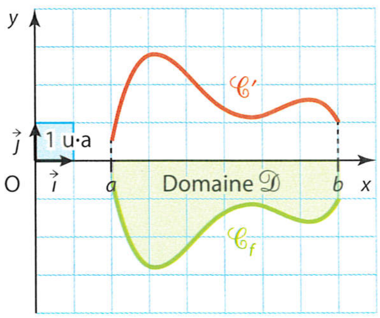
3 Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle



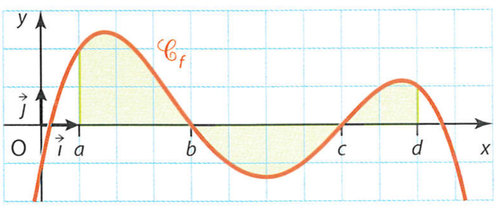
- Soit f une fonction définie sur $[a\,;b]$. La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

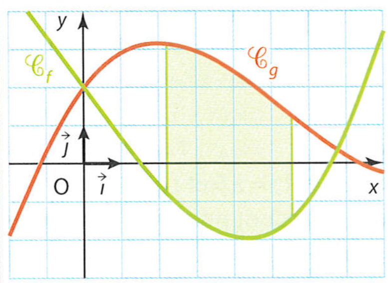
4 Calculs d'aires



$A = \int_a^b -f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$



$A = \int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x$

si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x de $[a\,;b]$.