1 Questions Flash

Diaporama

18 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-08

Écrire une fonction comme composée de deux fonctions

2 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\sin(2x-\pi)$ $\qquad g(x)=(3x+8)^3$
Écrire chaque fonction sous la forme $v \circ u$ (u est une fonction polynôme).

3 Soit les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x)=e^{x^2-5}$ $\qquad k(x)=(\cos x)^2$
Pour chaque expression, identifier la composée de deux fonctions u et v et écrire la fonction sous la forme $v \circ u(x)$.

Calcul d'images par la composée de deux fonctions

4 Soit les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=5x+2$ et $v(x)=x^2$.
Reproduire et compléter les tableaux suivants :

x	-10	-3	0	$\sqrt{3}$	5	150
$u(x)$						
$v \circ u(x)$						

x	-10	-3	0	$\sqrt{3}$	5	150
$v(x)$						
$u \circ v(x)$						

A-t-on pour tout x réel $v \circ u(x)=u \circ v(x)$? Conclure.

5 Soit les fonctions u et v définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=7x+9$ et $v(x)=x^3$.
a. Calculer les images par $v \circ u$ des réels -5 ; -3 ; 0 ; 10.
b. Calculer les images de ces mêmes réels par $u \circ v$.
c. Comparer les résultats et conclure.

Expression de la composée de deux fonctions

6 Soit les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=5x+2$ et $v(x)=x^2$.
a. Déterminer les expressions de $v \circ u(x)$ et $u \circ v(x)$.
b. En déduire directement les images par $v \circ u$ et $u \circ v$ des réels -10 ; -3 ; 0 ; $\sqrt{3}$; 5 et 150.

7 Soit les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=8-x$ et $v(x)=x^3$.
a. Déterminer les expressions de $v \circ u(x)$ et $u \circ v(x)$.
b. En déduire les images par $v \circ u$ et $u \circ v$ des réels -5 ; -3 ; 0 et 10.

Dérivée d'une fonction composée

*Dans les exercices **8** à **11**, utiliser la dérivée de u^n pour déterminer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

8 $f(x)=(4x+5)^2$

9 $f(x)=(7x-5)^4$

10 $f(x)=(\sin x)^2$

11 $f(x)=(e^x)^3$

*Dans les exercices **12** à **15**, utiliser la dérivée de e^u pour déterminer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

12 $f(x)=e^{3x}$

13 $f(x)=e^{4x+8}$

14 $f(x)=e^{x^2+2x}$

15 $f(x)=e^{\cos x}$

*Dans les exercices **16** à **19**, utiliser les dérivées de $\cos u$ et $\sin u$ pour déterminer les dérivées des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

16 $f(x)=\cos(2x)$

17 $f(x)=\sin(3x)$

18 $f(x)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

19 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

*Dans les exercices **20** à **22**, utiliser les dérivées de $\ln u$ pour déterminer les dérivées des fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.*

20 $f(x)=\ln(4x)$ $\qquad \mathrm{I}=]0\,;+\infty[$

21 $f(x)=\ln(2x-4)$ $\qquad \mathrm{I}=]2\,;+\infty[$

22 $f(x)=\ln(x^2-4)$ $\qquad \mathrm{I}=]2\,;+\infty[$

Recherche de primitives

*Dans les exercices **23** à **26**, déterminer une primitive pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

23 $f(x)=4(4x+3)^2$

24 $f(x)=5e^{5x-3}$

25 $f(x)=2\sin(2x-\pi)$

26 $f(x)=4\cos(4x+1)$

*Dans les exercices **27** à **29**, déterminer une primitive pour chacune des fonctions définies sur I.*

27 $f(x)=\dfrac{5}{5x+2}$ $\qquad \mathrm{I}=\left]-\dfrac{2}{5}\,;+\infty\right[$

28 $f(x)=\dfrac{-2}{5-2x}$ $\qquad \mathrm{I}=]-\infty\,;2{,}5[$

29 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad \mathrm{I}=\mathbb{R}$

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Composée de deux fonctions

Question de cours

30 Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4x$ et $v(x)=x^2$. Reproduire et compléter :

u	v
$x \mapsto \ldots \mapsto \ldots$	

Donc $v \circ u(x)=v(u(x))=\ldots\ldots\ldots$

31 Écrire chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions :

a. $f(x)=(3x+8)^3$

b. $g(x)=(5x^2-2x+3)^4$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 217

32 Écrire chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions :

a. $h(x)=(\sin x)^3$

b. $k(x)=(x^2+4)^{-2}$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 217

33 Écrire chaque fonction comme la composée de deux fonctions que l'on définira. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x)=e^{-x}$

b. $g(x)=e^{2x^2-5x}$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 217

34 Dans chacun des cas, identifier la composée de deux fonctions et les définir. Les fonctions h et k sont définies sur $\mathbb{R}$.

a. $h(x)=(\sin x)^2+1$

b. $k(x)=2(\cos x)^3+3\cos x+2$

Coup de pouce

- Dans chaque cas, l'une des fonctions est une fonction polynôme.

QCM

35 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+2$ et $v(x)=e^x$. Alors :

a. $v \circ u(x)=(e^x)^2+2$ **b.** $v \circ u(x)=e^{x^2+2}$

c. $v \circ u(x)=e^{2x}+2$

2. f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+5$ et $g(x)=x^3$. Alors :

a. $g \circ f(x)=(2x+5)^3$ **b.** $g \circ f(x)=2x^3+5$

c. $g \circ f(x)=2x^3+5^3$

Vrai ou faux

36 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. Si $u(x)=x+2$ et $v(x)=x^2$ alors $v \circ u(x)=(x+2)^2$.

2. $f(x)=x^2$ et $g(x)=e^x$ alors $g \circ f(x)=(e^x)^2$.

37 Soit les fonctions u et v définie sur $u(x)=2x-5$ et $v(x)=2x^2$.

1. Calculer les images par $v \circ u$ des réels 0 ; 5 et -2.

2. Calculer les images de ces mêmes réels par $u \circ v$.

3. Comparer et conclure.

38 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sin x$ et $g(x)=2x+\frac{\pi}{3}$.

Reproduire et compléter les tableaux suivants :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x)$						
$g \circ f(x)$						

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$						
$f \circ g(x)$						

39 Soit les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=7t+9$ et $v(t)=2t^3$.

1. Calculer les images par $v \circ u$ des réels 0 ; 1 ; -1 ; 5 et 10.

2. Calculer les images de ces mêmes réels par $u \circ v$.

40 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^t$ et $g(t)=t+5$.

1. Calculer les images par $f \circ g$ des réels -5 ; $\frac{4}{3}$; 0 ; $-\frac{5}{3}$.

2. Calculer les images de ces mêmes réels par $g \circ f$.

41 Soit les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4x-8$ et $v(x)=3x^2$.

1. Déterminer $v \circ u(x)$ et $u \circ v(x)$.

2. Calculer $v \circ u(2)$ et $u \circ v(2)$; en déduire que $v \circ u \neq u \circ v$.

42 Soit les fonctions u et v définies sur $]0;+\infty[$ par $u(t)=4t^4$ et $v(t)=\frac{1}{t}$.

Déterminer $v \circ u(t)$ et $u \circ v(t)$. Conclure.

43 Soit les fonctions u et v définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x-2$ et $v(x)=\ln(x^2+4)$.

1. Déterminer $v \circ u(x)$ et $u \circ v(x)$.

2. Calculer $v \circ u(2)$ et $u \circ v(2)$; en déduire que $v \circ u \neq u \circ v$.

Dérivée de la composée de deux fonctions

Question de cours

44 Soit u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $u(x)=2x+7$ et $v(x)=x^2$. Quelle est l'expression de la dérivée de la fonction composée $v\circ u$?

Dans les exercices 45 à 48, donner l'expression de la dérivée de $v\circ u$, u et v étant deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

45 **a.** $u(x)=3x-4$ et $v(x)=2x^2$.
b. $u(x)=2x^2-x$ et $v(x)=x^3$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 217

46 **a.** $u(x)=3x-4$ et $v(x)=e^x$.
b. $u(x)=2x^2-x$ et $v(x)=e^x$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 217

47 **a.** $u(x)=2x+\pi$ et $v(x)=\sin x$.
b. $u(x)=4x-\dfrac{\pi}{3}$ et $v(x)=\cos x$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 217

48 **a.** $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin x$.
b. $u(x)=\cos x$ et $v(x)=e^x$.

QCM

49 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2+1}$.
La fonction dérivée de f est :
a. $f'(x)=e^{2x}$
b. $f'(x)=2e^{x^2+1}$
c. $f'(x)=2xe^{x^2+1}$
2. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(2x+1)^3$.
La fonction dérivée de g est :
a. $g'(x)=6x$
b. $g'(x)=6(2x+1)^2$
c. $g'(x)=3(2x+1)^2$

Vrai ou faux

50 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*
Soit f, g, k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=(x^2+2)^3$, $g(x)=e^{3x}$ et $k(x)=\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
1. $f'(x)=6x(x^2+2)^2$
2. $g'(x)=3xe^3$
3. $k'(x)=5\cos\left(5x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Dans les exercices 51 à 55, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 219

51 **a.** $f(x)=(3x^2+5x-3)^2$
b. $f(x)=(x^2-4)^5$
c. $f(x)=(2+\sin x)^2$

Coup de pouce
- Ces fonctions peuvent s'écrire sous la forme u^n.

52 **a.** $f(x)=(3x+e^x)^2$
b. $f(x)=\left(\dfrac{3}{2}x^2+4x-\dfrac{7}{3}\right)^3$
c. $f(x)=(\cos x+\sin x)^2$

53 **a.** $f(x)=3-e^{4x}$
b. $f(x)=2e^{5x-3}$
c. $f(x)=3-e^{x^2-4}$

Coup de pouce
- Ces fonctions peuvent s'écrire sous la forme e^u+C.

54 **a.** $f(x)=e^{1-\cos x}$
b. $f(x)=2e^{2+2\sin x}$
c. $f(x)=3-e^{\sin x+\cos x}$

55 **a.** $f(x)=1-3\cos\left(2x+\dfrac{3\pi}{4}\right)$
b. $f(x)=2\sin(x^2)$
c. $f(x)=3\cos(x^2-1)$

Dans les exercices 56 à 62, déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

56 **a.** $I=\mathbb{R}$ et $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$.
b. $I=]-3\,;+\infty[$ et $f(x)=\dfrac{3}{(x+3)^3}$.

57 **a.** $I=\left]\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et $f(t)=\dfrac{3}{(2t-5)^2}$.
b. $I=]0\,;\pi[$ et $g(t)=\dfrac{1}{\sin t}$.

58 **a.** $I=]-1\,;1[$ et $f(x)=\dfrac{5x-4}{x^2-1}$.
b. $I=\mathbb{R}$ et $g(x)=\dfrac{4-2x}{x^2+2}$.

59 **a.** $I=]0\,;\pi[$ et $f(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$.
b. $I=]0\,;\pi[$ et $g(t)=\dfrac{1+\cos t}{\sin t}$.

60 **a.** $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f(x) = \ln(4x-2)$.

b. $I = \left]-\frac{5}{3};-\infty\right[$ et $f(x) = \ln(5+3x)$.

61 **a.** $I = \mathbb{R}$ et $g(t) = \ln(t^2+2)$.
b. $I =]-1;1[$ et $g(t) = 2\ln(1-t^2)$.

62 **a.** $I = \mathbb{R}$ et $u(x) = \ln(1+e^x)$.
b. $I =]0;\pi[$ et $v(t) = \ln(\sin t)$.

Primitive de $u'f(u)$

Question de cours

63 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Donner une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a. $u'e^u$ **b.** $u'\sin u$
c. $u'\cos u$ **d.** $u'u$
e. $u'u^4$ **f.** $u'u^n$, avec n entier naturel non nul.

QCM

64 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. Une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x(x^2+1)^2$ est :
a. $F(x) = x^2(x^2+1)^3$
b. $F(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)^2$
c. $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^3$

2. Une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{4x-2}$ est :
a. $F(x) = 4e$
b. $F(x) = e^{4x-2}$
c. $F(x) = 4e^4$

3. Une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x^2-5}$ est :
a. $F(x) = e^{x^2-5}$
b. $F(x) = x^2e^{x^2-5}$
c. $F(x) = e^{x^3-5x}$

Vrai ou faux

65 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x(3x^2-4)^2$.
Une primitive F de f est : $F(x) = (3x^2-4)^3$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5-3x^2)e^{5-3x^2}$.
Une primitive F de f est : $F(x) = e^{5-3x^2}$.

*Dans les exercices **66** à **69**, déterminer une primitive pour chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$.*

66 **a.** $f(x) = 5(5x-1)^2$
b. $f(x) = \left(x-\frac{5}{3}\right)^3$
c. $f(x) = 2x(x^2+4)$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

67 **a.** $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$
b. $f(x) = 3x^2(x^3-1)$
c. $f(x) = (3x^2+3)(x^3+3x)^2$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

68 **a.** $f(x) = 2e^{2x+3}$
b. $f(x) = 2xe^{x^2+2}$
c. $f(x) = (3x^2+2)e^{x^3+2x}$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

69 **a.** $f(x) = 3\sin(3x+2)$
b. $f(x) = 2x\cos(x^2-1)$
c. $f(x) = (2x+1)\cos(x^2+x+1)$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

*Dans les exercices **70** et **71**, déterminer une primitive pour chacune de ces fonctions définies sur I.*

70 **a.** $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$ $\quad I = \mathbb{R}$
b. $f(x) = \frac{-4}{3-4x}$ $\quad I =]-\infty;0,75[$
c. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

71 **a.** $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$
b. $f(t) = \frac{\cos t}{1+\sin t}$ $\quad I =]0;\pi[$
c. $f(t) = \frac{-\sin 2t}{1+\cos 2t}$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

72 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x)^2$.
1. Posons $u(x) = e^x$, calculer $u'(x)$. En déduire $f'(x)$.
2. a. En utilisant les propriétés de l'exponentielle, écrire $f(x)$ sous la forme e^{ax} où a est un réel à déterminer.
b. Calculer $f'(x)$. Comparer avec le résultat du **1.**

73 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x(x^2+1)^2.$$
1. Déterminer la fonction u telle que $f = u'u^2$. En déduire une primitive F de f.
2. Développer $f(x)$ et en déduire une primitive G.
3. Calculer $F(x) - G(x)$.

Composée de deux fonctions

74 Écrire chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions.

a. $f(x)=(3x^2-5x+9)^4$

b. $g(x)=\left(\dfrac{5x^2+3}{x^2+1}\right)^3$

75 Écrire chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions.

a. $h(x)=(3+\sin x)^3$

b. $k(x)=(e^{2x}+4)^3$

76 Écrire chaque fonction comme la composée de deux fonctions que l'on définira. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x)=2e^{3x}$

b. $g(x)=4e^{x^2+4x-3}$

77 Dans chacun des cas, identifier la composée de deux fonctions et les définir. Les fonctions h et k sont définies sur $\mathbb{R}$.

a. $h(t)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-4t\right)$ **b.** $k(t)=\dfrac{1+\sin t}{3+\sin t}$

78 Écrire chacune de ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions

a. $f(x)=\ln(3x^2+8)$ **b.** $g(x)=3(\ln x)^2+5$

Dérivée de la composée de deux fonctions

79 Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\left(\frac{4x+1}{3x+7}\right)^2.$$

1. a. f est la composée d'une fonction u avec la fonction carré. Déterminer u.

b. En déduire la fonction dérivée de f après avoir justifié que f est dérivable sur I.

2. Établir le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

80 Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Écrire f comme composée de deux fonctions.

2. Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

3. Calculer $f'(x)$.

81 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(e^x)^3$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel en utilisant la formule de dérivation de u^n.

2. Écrire $f(x)$ sous la forme e^{ax} puis utiliser cette forme pour calculer $f'(x)$.

3. Comparer les deux écritures.

82 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]0;\pi[$ par $f(x)=\ln(\sin x)$.

1. Justifier que f est bien définie sur l'intervalle I.

2. Calculer $f'(x)$.

3. Rappeler le signe de $\cos x$ sur l'intervalle I, en déduire celui de $f'(x)$.

4. Établir le tableau de variation de la fonction f.

Coup de pouce

- On vérifiera que $\sin x$ est strictement positif sur l'intervalle I.

83 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln(x^2-2x+2).$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. Établir le tableau de variation de f.

Primitives de $u'f u$

*Dans les exercices **84** à **87**, déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.*

84 **a.** $f(x)=3(3x+1)^2+4$

b. $f(x)=\left(2x-\dfrac{1}{4}\right)^3$

c. $f(x)=x(3x^2-5)$

85 **a.** $f(x)=(2x+2)(x^2+2x+1)^3$

b. $f(x)=3x^2(x^3+3)$

c. $f(x)=(3x^2+1)(x^3+x+2)^2$

86 **a.** $f(x)=2e^{5x-5}$

b. $f(x)=(2x+2)e^{x^2+2x+1}$

c. $f(x)=\cos x\, e^{\sin x}$

87 **a.** $f(x)=\sin(4x+\pi)$

b. $f(x)=4x\cos\left(x^2+\dfrac{\pi}{3}\right)$

c. $f(x)=(x+1)\cos(x^2+2x+1)$

88 Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur I.

a. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2+7}$ $I=\mathbb{R}$

b. $f(x)=3x+\dfrac{2x+2}{x^2+2x-3}$ $I=]1;+\infty[$

c. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ $I=]0;\pi[$

89 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes définies sur I.

a. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$ $\quad I=\mathbb{R}$

b. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3}$ $\quad I=\mathbb{R}$

c. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad I=\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

90 **1.** Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=2x^2+x-1.$$

a. Calculer $g'(x)$ et déterminer son signe.

b. Calculer $g(-1)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Dresser le tableau de variation de g, on fera figurer les nombres -1 et $\dfrac{1}{2}$.

2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{8x-1}{2x^2+x-1}.$$

a. Justifier que f est définie sur I.

b. Montrer que : $f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{2x-1}$.

c. En déduire une primitive de f sur I.

91 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x^3+5x}{x^4+3x^2+2}$.

1. Justifier que pour tout x réel, $x^4+3x^2+2\geqslant 2$.
En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce
- On remarquera que x^4 est un carré.

2. Montrer que : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{x}{x^2+2}$.
En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce
- On réduira au même dénominateur l'expression du **b.** en prenant le produit des dénominateurs.

3. Justifier que $f(x)$ est du signe de x. En déduire le tableau de variation de F.

92 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x+5}{x+2}.$$

1. Vérifier que : $f(x)=2+\dfrac{1}{x+2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur I qui vérifie $F(2)=4$.

93 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[\dfrac{1}{2}\,;10\right]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}\ln x.$$

1. Posons pour tout x de I, $u(x)=\ln x$. Calculer $u'(x)$.

2. Écrire $f(x)$ à l'aide de u et u', en déduire directement une primitive de f.

94 **1.** Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I=\left[\dfrac{1}{2}\,;10\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$.

a. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et dresser le tableau de variation de f.

b. Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats seront arrondis à 0,01 près).

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	6	8
$f(x)$			0,35				

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère (unités : 2 cm sur [Ox) ; 10 cm sur [Oy)).

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$g(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

a. Calculer $g'(x)$.

b. En déduire la primitive de f qui s'annule pour $x=1$.

95 **Partie A : Étude d'une fonction**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[0\,;20]$ par $f(x)=\ln(x^2+x+1)$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Vérifier que f est bien définie sur l'intervalle I.

2. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe. Établir le tableau de variation de f.

3. Déterminer l'équation de la droite d tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

4. Dans le repère, tracer la droite d puis la courbe $\mathscr{C}$.

Partie B

Un promoteur immobilier construit une quantité x d'appartements ($0<x\leqslant 20$) dont le coût de production est donné par $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ en millions d'euros.

Chaque appartement est vendu 400 000 €. La recette totale est alors $g(x)=0{,}4x$ en millions d'euros. Le bénéfice de l'entreprise est donc égal à $b(x)=g(x)-f(x)$.

1. On appelle Δ la représentation graphique de la fonction g. Tracer Δ dans le repère de la question **4.** (Partie A).

2. L'entreprise est-elle bénéficiaire si elle vend 4 appartements ? 15 appartements ?
À l'aide de la représentation graphique, déterminer la quantité minimale d'appartements que doit vendre l'entreprise pour être bénéficiaire.

96 Une petite entreprise familiale veut stériliser une partie de sa production maraîchère sous forme de conserve, à l'aide d'un autoclave.

Soit f la fonction qui à tout temps t, exprimé en minutes, associe la température, exprimée en degré Celsius, au centre de la conserve placée dans l'autoclave.

On admet que cette fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ et a pour expression :

$$f(t)=125-104\mathrm{e}^{-0{,}16t^2}.$$

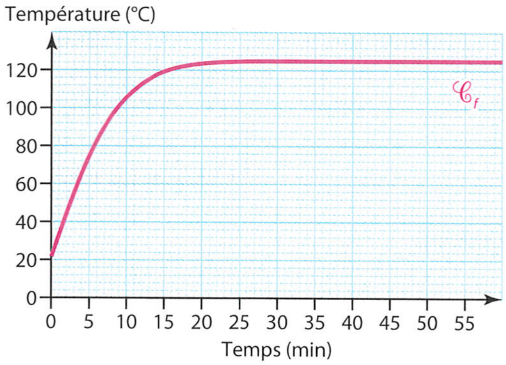
1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant ; les températures seront arrondies à 0,1 °C.

t	0	1	5	10	15	20
$f(t)$						

b. Calculer $f'(t)$ où f' est la fonction dérivée de f. Étudier le signe de f' sur $[0\,;60]$.

c. En déduire le tableau de variation de f.

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f.

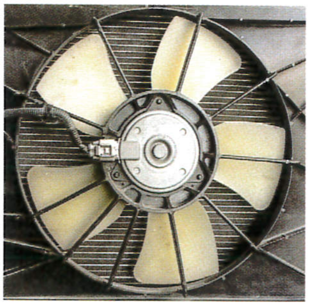


a. Quelle est la température au bout de 9 minutes ? On donnera la valeur arrondie au degré.

b. Pour que la stérilisation soit efficace, la conserve doit rester 3 minutes à plus de 120 °C.

À l'aide de la courbe $\mathscr{C}_f$, déterminer au bout de combien de temps après le lancement de la stérilisation, il sera possible d'arrêter l'autoclave car la stérilisation sera alors efficace.

97 À chacun sa série STI2D



La température d'un moteur thermique est régulée par un système de circulation d'eau de refroidissement. Quand la température de cette eau atteint 90 °C, un ventilateur se met en action afin de refroidir le liquide dans le radiateur. Il s'arrête lorsque la température redevient inférieure à 50 °C.

On mesure en minutes le temps t écoulé à partir de l'instant où le ventilateur se déclenche. On admet que la température de l'eau, exprimée en degrés Celsius (°C), est donnée à l'instant t par $f(t)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, par $f(t)=39\mathrm{e}^{-0{,}04t}+51$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. La fonction f' désigne la fonction dérivée de f.

a. Déterminer $f'(t)$.

b. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. Comment varie la température de l'eau dans le moteur à partir de l'instant où le ventilateur se déclenche ?

3. Le ventilateur va-t-il s'arrêter ? Justifier la réponse.

98 À chacun sa série STL GEOGEBRA

Le bassin d'une piscine municipale a une capacité de 600 000 litres d'eau. Afin de respecter les normes d'hygiène et de sécurité, 30 000 litres d'eau de la piscine sont renouvelés chaque heure et le taux de chlore maximum autorisé est de 0,25 mg·L^{-1}. Un soir, après la fermeture de la piscine, alors que le taux de chlore est indétectable, 1 kg de chlore est déversé par erreur dans le bassin à 20 h. Le directeur de la piscine souhaiterait savoir quand il pourra ouvrir à nouveau la piscine au public.

On modélise la concentration massique du chlore présent dans la piscine par une fonction f. Lorsque t désigne le temps écoulé depuis l'accident, exprimé en heures, $f(t)$ représente la concentration massique du chlore présent dans la piscine en milligrammes par litre.

1. Quelle est, en milligrammes par litre, la concentration de chlore juste après le déversement du chlore ?

2. On admet que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t)=\frac{5}{3}\mathrm{e}^{-0{,}05t}.$$

a. Calculer $f'(x)$, déterminer son signe et établir le tableau de variation de f.

b. Représenter graphiquement f dans GeoGebra.

c. Créer la droite d'équation $y=0{,}25$.

d. Au bout de combien d'heures la piscine pourra-t-elle ouvrir de nouveau au public ?

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-09

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
99 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{x^2-3}$. f est la composée d'une fonction polynôme et de la fonction $x \mapsto 2e^x$.		
100 Soit g la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $g(x)=2\ln(x^2-4)$. g est la composée d'une fonction polynôme et de la fonction ln.		
101 v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=(4x^2+5)^3$. v est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.		
102 u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^{4x^3+9}$. u est croissante sur $\mathbb{R}$.		
103 h est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $h(x)=\ln(2x^2+3x-5)$. On a : $h'(x)=\dfrac{4x+3}{(2x^2+3x-5)^2}$.		
104 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=9(3x-4)^2$ et F une primitive de f. On a : $F(x)=(3x-4)^3+5$.		
105 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4xe^{3+2x^2}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. F est croissante sur $]0\,;+\infty[$.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

106 On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=4x+9$ et $v(x)=\cos 2x$. Alors :

a. $v\circ u(x)=4\cos(2x)+9$ **b.** $v\circ u(x)=\cos(4x+9)$ **c.** $v\circ u(x)=\cos(8x+18)$

107 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+x+1)^3$. Alors :

a. $f'(x)=3(2x+1)^2$ **b.** $f'(x)=3(2x+1)(x^2+x+1)^2$ **c.** $f(x)=3(x^2+x+1)^2$

108 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2\ln(5+9x^2)$. Alors :

a. $g'(x)=\dfrac{2}{5+9x^2}$ **b.** $g'(x)=\dfrac{18x}{5+9x^2}$ **c.** $g'(x)=\dfrac{36x}{5+9x^2}$

109 h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=2e^{5+9x^2}$. Alors :

a. $h'(x)=2e^{5+9x^2}$ **b.** $h'(x)=18xe^{5+9x^2}$ **c.** $h'(x)=36xe^{5+9x^2}$

110 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. La primitive F de f qui vérifie $F(0)=1$ est :

a. $F(x)=\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **b.** $F(x)=\dfrac{7}{8}+\dfrac{1}{4}\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **c.** $F(x)=\dfrac{1}{4}\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

111 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$. Une primitive de g est :

a. $G(x)=\ln(2+\cos x)$ **b.** $G(x)=-\ln(2+\cos x)$ **c.** $G(x)=\dfrac{\sin x}{(2+\cos x)^2}$

→ Vérifier les résultats p. 324

112 In English

Either the function f defined on the interval $I = \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ by $f(x)=\dfrac{4x^2+2x-1}{2x+1}$.

1. We want to put $f(x)$ in the form $f(x)=ax+b-\dfrac{1}{2x+1}$.
By setting $x=0$ and $x=1$, determine a and b.

2. Deduce a primitive of $f(x)$ on the interval I.

113 COMPÉTENCE Réaliser

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\sin(ax)$ où a est un entier naturel non nul.

1. Créer le curseur a. Propriétés de a : a entier compris entre 1 et 5.

2. a. Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes respectives des fonctions f et g.

b. Tracer les tangentes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ en O respectivement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

3. a. Créer un curseur b et le point M′ de $\mathscr{C}'$ d'abscisse b.

b. Créer Δ la tangente à $\mathscr{C}'$ en M, p le coefficient directeur de Δ (fonction **pente**).

c. On appelle N le point de coordonnées $(b\,;p)$. Le placer dans un nouveau repère (**affichage/graphique 2**).

d. Activer la fonction **Afficher la trace** pour le point N, faire varier b. La courbe de la fonction dérivée de g apparaît. Vérifier qu'il s'agit de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto a\cos(ax)$.

114 COMPÉTENCE Analyser, Raisonner

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^4$.

1. a. Développer $(x+1)^2$, en déduire $\left((x+1)^2\right)^2$.

b. Justifier que $f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ en utilisant la forme factorisée.

b. Calculer $f'(x)$ en utilisant la forme développée.

c. Vérifier que les deux expressions sont égales.

3. a. Quelle forme (développée ou factorisée) permet de connaître le signe de $f'(x)$?

b. Dresser le tableau de variation de f.

115 COMPÉTENCE Raisonner

On considère la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]1\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\frac{3x-3}{x^3+1}.$$

1. Montrer que : $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

2. On démontre que l'on peut écrire : $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2-x+1}-\dfrac{2}{x+1}$ où a et b sont deux nombres réels.

a. En posant $x=0$, déterminer b puis en posant $x=1$, déterminer a.

b. Vérifier en réduisant au même dénominateur qu'il y a bien égalité.

3. a. Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

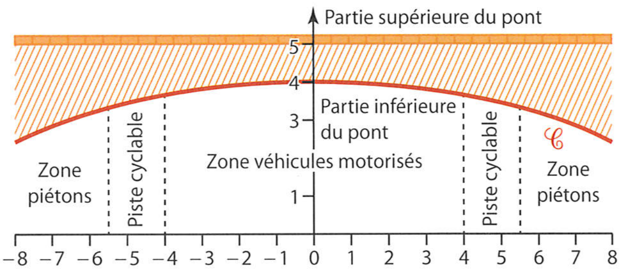
b. Soit F la primitive de f qui s'annule pour $x=1$, déterminer F.

116 COMPÉTENCE S'approprier

Un pont à une seule arche, et d'une longueur de 16 mètres, enjambe une route à double circulation. Dans un repère orthonormé, la figure ci-dessous représente une vue de l'une des deux façades de ce pont.

La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 mètres au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprises entre -8 et $+8$ représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



Étude de la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$ par :

$$f(x)=a-\frac{e^{0{,}2x}+e^{-0{,}2x}}{2}$$

où a désigne un nombre entier naturel.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative donnée ci-dessus dans un repère orthonormé.

1. Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$:

$$f(x)=5-\frac{e^{0{,}2x}+e^{-0{,}2x}}{2}.$$

2. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

3. Montrer que la fonction f', fonction dérivée de la fonction f, est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$ par : $f'(x)=\dfrac{1}{10}e^{-0{,}2x}(1-e^{0{,}4x})$.

4. Calculer $f'(0)$. En déduire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 0.

5. Résoudre algébriquement, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-8\,;8]$, l'inéquation $f'(x)>0$.

6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-8\,;8]$.

7. Reproduire et compléter, avec une précision de 10^{-2} par défaut, le tableau suivant.

x	4	5,5	8
$f(x)$			

En déduire la hauteur maximale d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous ce pont en tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm au-dessus du véhicule.

8. Déterminer la primitive de g qui s'annule pour $x=0$.

TP

Une courbe bien composée !

CAPACITÉ Construire, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, la courbe d'une fonction composée.

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}25$ et la fonction v définie sur $]0\,;+\infty[$ par $v(x) = \ln x$.
On souhaite tracer la courbe représentative de la fonction $f = v \circ u$ à l'aide des courbes représentatives des fonctions u et v.
Remarquons que f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout x réel, $u(x) > 0$.

1. Calculer $u'(x)$, puis dresser le tableau de variation de u et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_u$ dans un repère orthonormal.

2. Étudier la fonction v et tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_v$ dans le même repère orthonormal.

3. Construction d'un point de $\mathscr{C}_f$.

a. Tracer la droite Δ d'équation $y = x$.

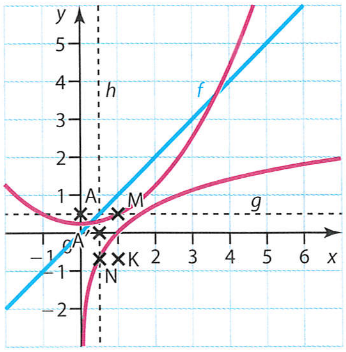
b. On pose $x = 1$, on place le point $\mathrm{M}(x\,;u(x))$ sur la courbe $\mathscr{C}_u$. On appelle A le point d'intersection de l'axe des ordonnées avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par M. Quelles sont les coordonnées de A ?

c. Placer le point A′, symétrique de A par rapport à la droite Δ. Quelles sont les coordonnées de A′ ?

d. On appelle N le point de $\mathscr{C}_v$ qui a la même abscisse que A′. Quelles sont les coordonnées de N ?

e. On appelle K le point de coordonnées $(x\,;f(x))$. Justifier que K a la même ordonnée que N et placer K dans le repère.

4. Reprendre cette construction pour $x = 2$. Donner l'allure de la courbe.



En salle informatique

GEOGEBRA

lienmini.fr/10445-10

1. Ouvrir GeoGebra. Créer un curseur a variant de -5 à 5.

2. Saisir $\boxed{u(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}25}$ et $\boxed{v(x) = \ln x}$. Construire la droite Δ d'équation $y = x$.

3. Placer le point $\mathrm{M}(a\,;u(a))$ puis le point A (A est l'intersection de l'axe des ordonnées avec la parallèle à l'axe des abscisses passant par M).

4. Construire le point A′ symétrique de A par rapport à Δ puis le point N de $\mathscr{C}_v$ ayant la même abscisse que A′.

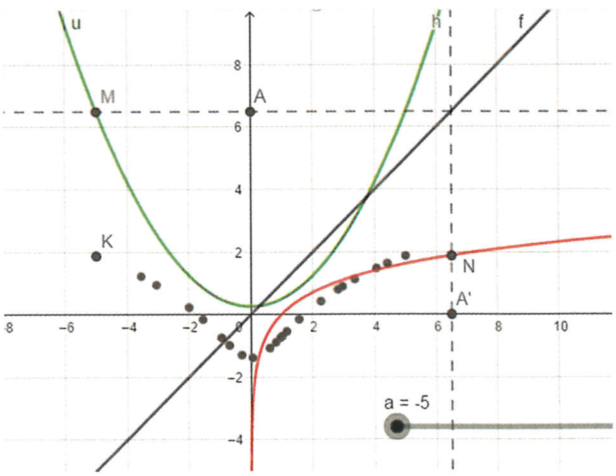
5. K est le point de coordonnées $(a\,;f(a))$. Placer K en remarquant que K a la même abscisse que M et la même ordonnée que N.

6. Activer la fonction **trace** pour K et faire varier a à l'aide du curseur. La courbe $\mathscr{C}_f$ apparaît.

7. a. Dans **Affichage**, ouvrir **Graphique 2**.

b. Placer K dans ce nouveau repère (clic droit sur K, propriétés, **Avancé**, cocher **Graphique 2**). Faire varier a à l'aide du curseur. La courbe $\mathscr{C}_f$ apparaît.

c. Pour vérifier, on peut tracer dans le graphique 2 la courbe d'équation $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{4}\right)$ et le point K. On saisira dans GeoGebra $\boxed{\mathrm{K} = (\mathrm{x(M)}\,;\mathrm{y(N)})}$.



Sujet résolu

117 Soit la fonction f définie sur l'intervalle : $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x+\ln(x+1)$.
On note C sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; I, J) d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.

1. Écrire f comme composée de deux fonctions.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.

3. Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $F(x)=x\ln[x(x+1)]+\ln(x+1)-2x$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On utilise la formule $\ln a+\ln b=\ln(ab)$ pour écrire f sous la forme. On doit reconnaître deux fonctions usuelles qui apparaissent dans l'expression de g. → Voir Exercice résolu 1 p. 217	**1.** $f(x)=\ln x+\ln(x+1)=\ln[x(x+1)]$. $f=\ln(u)$ avec $u(x)=x(x+1)=x^2+1; u'(x)=2x+1$. $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.
2. On utilise la formule de dérivation de la composée d'une fonction avec le logarithme népérien : $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$. → Voir Exercice résolu 3 p. 219	**2.** On a $f=\ln(u)$ avec $u(x)=x(x+1)=x^2+1; u'(x)=2x+1$. $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$.
3. On montre que $F'=f$. On utilisera les formules de dérivation des fonctions composées et d'un produit. → Voir Exercice résolu 3 p. 219	**3.** $F'(x)=\ln[x(x+1)]+x\dfrac{2x+1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{x+1}-2$ $F'(x)=\ln[x(x+1)]+\dfrac{2x+1}{(x+1)}+\dfrac{1}{x+1}-2$ $F'(x)=\ln[x(x+1)]+\dfrac{2x+2}{(x+1)}-2$ Donc $F'(x)=\ln[x(x+1)]=f(x)$. F est bien une primitive de f.

118 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{x^2+4}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2xe^{x^2+4}$.

1. Montrer que la fonction g peut s'écrire comme la composée de deux fonctions u et v que l'on précisera.

2. Calculer $g'(x)$, en déduire $f'(x)$.

3. Déterminer la fonction F, la primitive de f qui s'annule pour $x=0$.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. On doit reconnaître deux usuelles qui apparaissent dans l'expression de g. → Voir Exercice résolu 1 p. 217	**1.** g est la composée des deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+4$ et $v(x)=e^x$.
2. On utilise la formule de dérivation de la composée d'une fonction avec l'exponentielle : $(e^u)'=u'e^u$. On utilise ensuite la formule de dérivation d'un produit. → Voir Exercice résolu 3 p. 219	**2.** On a $u(x)=x^2+4$ et $u'(x)=2x$ donc $g'(x)=2xe^{x^2+4}$. D'où : $f'(x)=2\times e^{x^2+4}+2x\times 2xe^{x^2+4}$ $=2e^{x^2+4}+4x^2e^{x^2+4}$ $=(4x^2+2)e^{x^2+4}$
3. $f(x)$ est de la forme $u'e^u$, une primitive a pour expression e^u. → Voir Exercice résolu 4 p. 219	**3.** $F(x)=e^{x^2+4}+C$ où C est une constante réelle. $F(0)=e^4+C$, or $F(0)=0$ donc $e^4+C=0$ soit $C=-e^4$. On a donc : $F(x)=e^{x^2+4}-e^4$.

Pour préparer l'examen

Sujet guidé

119 *CAPACITÉS*

- Étude d'une fonction.
- Détermination de l'équation d'une tangente.
- Recherche d'une primitive.

Partie A : Étude d'une fonction

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = 10e^{-0{,}008t}.$$
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Calculer $f'(t)$ pour t appartenant à $[0\,;+\infty[$ puis en déduire son signe en fonction de t.

Méthode On utilise la formule de dérivation de e^{ax} où a est un réel. Il suffit de vérifier que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle de définition.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 219

b. Construire le tableau de variation de f sur cet intervalle.

2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

3. Tracer $\mathscr{T}$ et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ correspondant aux abscisses positives dans un repère orthogonal. On prendra : sur l'axe des abscisses 1 cm pour 20 unités, sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 1 unité.

Partie B : Application

Lors d'une hydrolyse du saccharose, on étudie l'évolution de sa concentration en fonction du temps. La concentration en saccharose (exprimée en mol·L^{-1}) en fonction du temps t (exprimé en minutes) est donnée par la fonction f de la Partie A.

1. Calculer la concentration initiale à l'instant $t = 0$.

2. En laissant apparaître les traits de construction, déterminer graphiquement la concentration en saccharose après 2 heures et demie d'hydrolyse.

3. Déterminer graphiquement le temps nécessaire pour que la concentration atteigne la moitié de sa valeur initiale (cette valeur initiale est la concentration à l'instant 0). On laissera apparents les traits de construction permettant d'obtenir cette durée.

4. On considère que la réaction est terminée quand la concentration a atteint le centième de sa valeur initiale. Calculer, en heures et minutes, le temps nécessaire pour que la réaction soit terminée.

Méthode Placer le point B$(120\,;f(120))$.

Partie C

Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $t = 0$.

Méthode On cherche une primitive de e^{ax} où a est un réel.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

120 *CAPACITÉS*

- Déterminer la dérivée d'une fonction composée.
- Déterminer une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = xe^{1-\frac{x^2}{2}}$ dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; I, J) d'unité : 2 cm.

1. a. Déterminer f', la fonction dérivée de f.

b. Vérifier que $f'(x) = (1-x)(1+x)e^{1-\frac{x^2}{2}}$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Méthode On utilise la formule de dérivation de la composée de deux fonctions ainsi que celle d'un produit. On vérifiera que $(1+x)e^{1-\frac{x^2}{2}}$ est positif si x est positif.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 219

2. a. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Calculer $u'(x)$.

b. En déduire F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

Méthode Pour obtenir une primitive de f sur I, on remarque que f est de la forme $u'e^u$ à une constante près.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 219

3. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \ln[f(x)].$$

a. Calculer $g'(x)$ en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées.

b. Montrer que $g(x) = \ln x + 1 - \frac{x^2}{2}$.

c. Calculer $g'(x)$ en utilisant cette expression.

SUJET

121 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 - 10xe^{-2x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; I, J) (unité graphique 2 cm).

1. Vérifier que $f(x) = 2 - \dfrac{10}{e^x} \times \dfrac{x}{e^x}$.

2. a. Démontrer que la fonction dérivée f' de f est définie pour tout x réel par :

$$f'(x) = (20x - 10)e^{-2x}.$$

b. Étudier pour tout réel x le signe de $f'(x)$, puis établir le tableau de variation de f.

c. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale en un point B dont on précisera les coordonnées.

4. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Tracer dans le même repère (O ; I, J) la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

6. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}.$$

a. Déterminer sa fonction dérivée.

b. En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

c. Quelle est la primitive de f qui s'annule pour $x = 0$?

122 Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie pour tout t appartenant à $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 3{,}5e^{0{,}12t}$.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O ; I, J) (unité 1 cm sur chaque axe).

1. Soit f' la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(t)$ pour tout t de $[0 ; +\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant. On donnera les résultats à 10^{-2} près.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$											

4. Construire la tangente $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

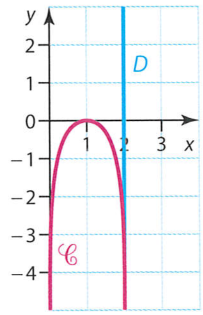
Partie B : Application

Dans un milieu biologique donné, on appelle N le nombre de cellules d'une population en développement. N varie en fonction du temps t selon la relation $N = f(t) = 3{,}5e^{0{,}12t}$, où N est exprimé en millions de cellules et t en heures.

1. Calculer l'instant t (arrondi au centième) où le milieu biologique donné contiendra une population de 6 millions de cellules.

2. Retrouver ce résultat graphiquement. On fera apparaître les traits de construction sur le dessin.

123 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 2[$, dont la courbe représentative ($\mathscr{C}$), dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O ; I, J) est la suivante :



La droite D a pour équation $x = 2$.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer f sachant que $f(x)$ est de la forme $\ln(ax^2 + bx)$ où a et b sont des nombres réels non nuls.

1. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx}.$$

2. Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A de coordonnées (1 ; 0) où elle admet une tangente horizontale, déterminer a et b.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit g la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par :

$$g(x) = -x^2 + 2x = x(2 - x)$$

et f la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par :

$$f(x) = \ln g(x).$$

1. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Calculer $g'(x)$ puis montrer que :

$$f'(x) = \frac{-2x + 2}{g(x)}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

Partie C : Recherche d'une primitive

1. Soit F la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par :

$$F(x) = x\ln x + (x - 2)\ln(2 - x) - 2x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; 2[$.

2. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.