10 Composition de fonctions

CAPACITÉS

- Identifier la composée de deux fonctions dans une expression simple.
- Calculer la dérivée des fonctions composées usuelles.
- Calculer des primitives de fonctions de la forme $u'f(u)$ en fonction d'une primitive de f et de la fonction u.

2:28
Découvrons une ébullition étonnante
lienmini.fr/10445-06

Un groupe d'amis en randonnée fait bouillir de l'eau pour le déjeuner. L'un d'entre eux mesure la température de l'eau en degrés Celsius toutes les minutes jusqu'à ébullition. John, qui est Américain, souhaite connaître la température en degrés Fahrenheit en fonction du temps.

Peut-on définir une fonction qui, au nombre de minutes écoulées, fait correspondre directement la température en degrés Fahrenheit ?

→ Pour le découvrir **Activité 1** p. 214

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première ou du tronc commun

Questions Flash
Diaporama
13 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10445-07

1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Intervalle	$\mathbb{R}$	I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$
Fonction	$f(x)=ax+b$ a et b réels	$f(x)=x^n$ n entier relatif	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\ln(x)$	$f(x)=e^x$
Dérivée	$f'(x)=a$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f'(x)=-\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=e^x$

$I=\mathbb{R}$ si n est un entier positif, $I=]-\infty\,;0[$ ou $I=]0\,;+\infty[$ si n est négatif.

2 Primitive d'une fonction

- Une primitive F d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I telle que $F'=f$.
- Si f admet une primitive F sur un intervalle I, alors f admet une infinité de primitives sur I, ce sont les fonctions $x\mapsto F(x)+C$, où C est une constante réelle.
- Dans le tableau, F désigne une primitive de f.

Intervalle	$\mathbb{R}$	$]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Fonction	$f(x)=x^n$ n entier naturel	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=e^x$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=\sin x$
Primitives	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$F(x)=\ln x$	$F(x)=e^x$	$F(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$

Vérifier les acquis de Première ou du tronc commun

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	Aide
1. La fonction dérivée de la fonction $f(x)=3x^2+5x-6$ est :	$f'(x)=3x+5$	$f'(x)=5x-6$	$f'(x)=6x+5$	1
2. La fonction dérivée de la fonction $f(x)=e^{2x}$ est :	$f'(x)=e^{2x}$	$f'(x)=2e^{2x}$	$f'(x)=e^2$	1
3. La fonction dérivée de la fonction $f(x)=2\sin x$ est :	$f'(x)=2\cos 2x$	$f'(x)=2\sin x$	$f'(x)=2\cos x$	1
4. La fonction dérivée de la fonction $f(x)=3\cos 4x$ est :	$f'(x)=-12\sin 4x$	$f'(x)=12\cos x$	$f'(x)=12\sin 4x$	1
5. La fonction dérivée de la fonction $f(x)=3+\ln(x)$ est :	$f'(x)=3x+\dfrac{1}{x}$	$f'(x)=\dfrac{3}{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	1
6. Une primitive de la fonction $f(x)=3x^2-5$ est :	$F(x)=x^3-5x+8$	$F(x)=\dfrac{3}{2}x^3-5$	$F(x)=3x^3-5x$	2
7. Une primitive de la fonction $f(x)=\sin x+\cos x$ est :	$F(x)=\cos x+\sin x$	$F(x)=\cos x-\sin x$	$F(x)=-\cos x+\sin x$	2

→ Voir Corrigé p. 324

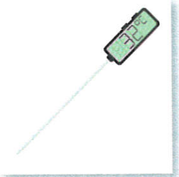
Activités

1 Ça chauffe ! → Mémento GeoGebra p. 319

Physique-chimie

OBJECTIF Découvrir une nouvelle fonction → Cours 1 p. 216

Des amis en randonnée placent un récipient rempli d'eau sur un réchaud. L'un d'entre eux possède un thermomètre de cuisine et souhaite relever la température de l'eau. Au bout d'environ 9 minutes, l'eau entre en ébullition. Il a noté les températures suivantes (degrés Celsius) :



t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T (°C)	20	45	60	75	85	90	93	97	99	100

1. Ouvrir GeoGebra et placer ces points.

2. On approche la courbe de température par la fonction f définie sur $[0\,;20]$ par $f(t)=100-80\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.

a. Calculer $f'(t)$, en déduire le sens de variation de f.

b. Représenter la fonction f dans le même repère.

3. Un des amis, John, est Américain. Il voudrait connaître le relevé de température en degrés Fahrenheit. La formule de conversion est : $T_F=T_C\times 1{,}8+32$ où T_c représente la température en degrés Celsius et T_F celle en degrés Fahrenheit.

a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T (°F)										

b. Placer ces points dans un nouveau repère.

c. On appellera g la fonction qui à x, la température exprimée en degrés Celsius, associe $g(x)$, la température exprimée en degrés Fahrenheit. Donner l'expression de $g(x)$.

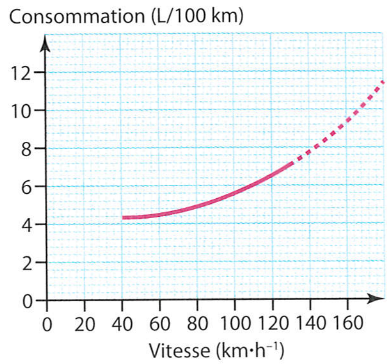
d. Quelle fonction h exprime la température de l'eau en degrés Fahrenheit en fonction de t, la durée (en minutes) ? On dira que h est la **composée** de la fonction f par la fonction g. Construire la courbe représentative de h dans le nouveau repère.

2 Consommation d'essence d'une automobile

Environnement

OBJECTIF Poursuivre la découverte de la fonction composée → Cours 1 p. 216

Deux amies ont relevé la consommation d'essence d'une automobile en fonction de sa vitesse. On note x la vitesse de la voiture, exprimée en km·h^{-1}. Au-delà de 40 km·h^{-1}, la consommation d'essence exprimée en litres pour 100 km est sensiblement égale à : $f(x)=0{,}00036x^2-0{,}03x+5$.



1. L'une des deux amies voudrait exprimer cette consommation en kilomètres par litre (km·L^{-1}). Si x correspond à la consommation en litres pour 100 km du véhicule, on note $g(x)$ la distance parcourue avec un litre d'essence.

Vérifier que $g(x)=\dfrac{100}{x}$.

2. a. On note d la fonction qui à la vitesse x (en km·h^{1}) associe la distance parcourue (en km) avec un litre d'essence. À l'aide des fonctions f et g, compléter le tableau suivant.

b. Exprimer la distance parcourue avec un litre d'essence $d(x)$ en fonction de la vitesse x de l'automobile.

x	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
$f(x)$										
$d(x)$										

3 Dérivées des fonctions composées

OBJECTIF Démontrer les formules de dérivation avec les fonctions composées → Cours 2 et 3 p. 216 et 218

Partie A

Soit n un entier naturel non nul et soit la fonction f définie sur l'intervalle I tel que $\text{I} =]0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^n}$

1. En remarquant que f est la composée des fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$, montrer que :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

2. En déduire que pour tout entier relatif n, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ est la fonction $x \mapsto nx^{n-1}$ (pour n négatif, on pourra poser $n = -m$) comme appris en classe de Première.

dérivée de $f(x) = x^n$

Partie B

Soit les fonctions u, v et f définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 4x + 8$, $v(x) = x^3$ et $f = v \circ u$.

1. Déterminer l'expression de $f(x)$.

2. a. Déterminer $u'(x)$, $v'(x)$ et $v'(u(x))$.

b. En appliquant la formule générale sur la dérivée de la composée de deux fonctions, en déduire $f'(x)$.

Remarque : on pourra vérifier ce résultat en développant $f(x)$ puis en dérivant l'expression de cette dernière.

3. Appliquer la formule générale de dérivation avec la fonction u, dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I si n est négatif, et la fonction v, définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^n$, où n est un entier relatif. En déduire que : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

dérivée de u^n

Partie C

Soit u une fonction définie sur un intervalle I.

Soit les fonctions $x \mapsto \cos(u(x))$, $x \mapsto \sin(u(x))$, $x \mapsto e^{u(x)}$ et $x \mapsto \ln(u(x))$.

1. Écrire chaque fonction sous la forme $v \circ u$ en précisant son ensemble de définition et donner l'expression de $v(x)$.

2. Appliquer le théorème de dérivation des fonctions composées pour déterminer l'expression de la fonction dérivée de chaque fonction en fonction de u et u'.

dérivée de $\cos u$, $\sin u$, $\ln u$

3. En déduire les dérivées de fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$, $x \mapsto \sin(ax+b)$, $x \mapsto e^{ax+b}$ et $x \mapsto \ln(ax+b)$, a et b étant deux nombres réels.

4 Recherche de primitives

OBJECTIF Déterminer des primitives à partir des formules de dérivation → Cours 4 p. 218

1. Soit a et b deux réels, a non nul, et f une fonction définie sur un intervalle I.

On suppose que pour tout x de l'intervalle J, $ax + b$ est un réel de I.

On appelle F une primitive de f sur I et g la fonction définie sur J par $g(x) = F(ax+b)$.

dérivée de $F'(x) = f(x)$

a. Déterminer $g'(x)$.

b. En déduire une primitive sur J de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$.

2. Soit u une fonction définie sur un intervalle I et n un entier relatif. En utilisant les formules des dérivées des fonctions composées usuelles vues dans l'activité 3, déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle où elles sont définies :

- $x \mapsto u'(x)u^n(x)$ — $n \neq -1$ et si n est négatif, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
- $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ — La fonction u étant strictement positive sur I.
- $x \mapsto u'(x)\sin(u(x))$
- $x \mapsto u'(x)\cos(u(x))$
- $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

Cours

1 Composée de deux fonctions

Définition Soit u et v deux fonctions définies respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel x de I, $u(x)$ soit un élément de J.
On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $(\boldsymbol{v \circ u})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$.
$v \circ u$ est appelée la **fonction composée** de u par v.

Notation

On peut schématiser comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mapsto & \mathrm{J} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v[u(x)] \\ x & \longmapsto & & \longrightarrow & v \circ u(x) \end{array}$$

Remarque • Attention au sens de la composition : $u \circ v \neq v \circ u$.

Exemple • Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x + \pi$ et $v(x) = 2\sin x$. Alors $v \circ u$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = 2\sin u(x) = 2\sin(3x + \pi).$$

La fonction $u \circ v$ est, elle, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = 3 \times 2\sin x + \pi.$$

En remarquant que $(v \circ u)(0) = 0$ et $(u \circ v)(0) = \pi$, on constate que $u \circ v \neq v \circ u$.

→ Voir **Exercice résolu 1**

2 Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorème Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel x de I, $f(x)$ soit un élément de J.
Alors la **fonction $v \circ u$ est dérivable** sur I et on a : $(\boldsymbol{v \circ u})' = \boldsymbol{u}' \times (\boldsymbol{v}' \circ \boldsymbol{u})$.

Démonstration • Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel x de I, $u(x)$ soit un élément de J. Soit x_0 un réel de I.

Étudions le quotient $\dfrac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0}$.

En supposant que pour $u(x) \neq u(x_0)$ et pour $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

qui nous conduit à écrire : $\left(\dfrac{\Delta(v \circ u)}{\Delta x}\right)_{x_0} = \left(\dfrac{\Delta v}{\Delta u}\right)_{u(x_0)} \times \left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{x_0}$.

En faisant tendre x vers x_0, on obtient :

$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0) = u'(x_0) \times (v' \circ u)(x_0)$.

Exemple • Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x + \pi$ et $v(x) = 2\sin x$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$; $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2\cos x$
et $(v' \circ u)(x) = v'[u(x)] = 2\cos(u(x)) = 2\cos(3x + \pi)$.
On a donc :

$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = 3 \times 2\cos(3x + \pi) = 6\cos(3x + \pi)$.

→ Voir **Exercice résolu 2**

Exercice résolu 1 — Identifier la composée de deux fonctions dans une expression simple

Soit les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = e^{x^2+4x-5}$ **2.** $g(x) = \ln(x^2+1)$

3. $h(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ **4.** $k(x) = 2(\sin x)^2 - 3\sin x + 4$

Écrire chacune de ces fonctions sous la forme $v \circ u$.

Méthode — **Pour identifier la composée de deux fonctions dans une expression**

1. Pour **écrire** chaque fonction sous la forme $v \circ u$, on recherche les fonctions de référence qui apparaissent.
2. On **identifie** les fonctions u et v.

Solution

1. La fonction f est la composée d'une fonction polynôme par la fonction exponentielle donc : $f(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = x^2 + 4x - 5$ et $v(x) = e^x$.

2. La fonction g est la composée d'une fonction polynôme par la fonction logarithme népérien donc : $g(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \ln(x)$.

3. La fonction h est la composée d'une fonction polynôme par la fonction cosinus donc : $h(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = 3x + \dfrac{\pi}{3}$ et $v(x) = \cos x$.

4. La fonction k est la composée de la fonction sinus par une fonction polynôme (le polynôme apparaît lorsque l'on remplace $\sin x$ par X) donc :
$k(x) = (v \circ u)(x)$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

→ Voir **Exercices 31 à 34** p. 222

Exercice résolu 2 — Calculer la dérivée d'une fonction composée

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = e^{4x^2-3x+8}$

2. $g(x) = \sin(x^2+1)$

3. $h(x) = (\sin x)^3 + 2\sin x - 4$

4. $k(x) = (x^2-1)^4$

Méthode — **Pour calculer la dérivée d'une fonction composée**

1. On **vérifie** que la fonction est dérivable sur son ensemble de définition.
2. On **écrit** chaque fonction sous la forme $v \circ u$ en identifiant les deux fonctions u et v.
3. On **applique** les formules de dérivation.

Solution

Les fonctions f, g, h et k sont dérivables comme composées de fonctions dérivables.

1. $f(x) = e^{4x^2-3x+8}$

$f = v \circ u$ avec $u(x) = 4x^2 - 3x + 8$ et $v(x) = e^x$.

On a : $u'(x) = 8x - 3$, $v'(x) = e^x$

et $(v' \circ u)(x) = v'(u(x)) = e^{4x^2-3x+8}$.

On en déduit :

$f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = (8x-3)e^{4x^2-3x+8}$

soit : $f'(x) = (8x-3)e^{4x^2-3x+8}$.

2. $g(x) = \sin(x^2+1)$

$g = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = \sin x$.

On a : $u'(x) = 2x$, $v'(x) = \cos x$ et

$(v' \circ u)(x) = v'(u(x)) = \cos(x^2+1)$.

On en déduit :

$g'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = 2x\cos(x^2+1)$.

soit : $g'(x) = 2x\cos(x^2+1)$.

3. $h(x) = (\sin x)^3 + 2\sin x - 4$

$h = v \circ u$ avec $u(x) = \sin x$ et $v(x) = x^3 + 2x - 4$.

On a : $u'(x) = \cos x$, $v'(x) = 3x^2 + 2$ et

$(v' \circ u)(x) = v'(u(x)) = 3(\sin x)^2 + 2$.

On en déduit : $h'(x) = \cos x\left(3(\sin x)^2 + 2\right)$

soit : $h'(x) = \cos x\left[3(\sin x)^2 + 2\right]$

4. $k(x) = (x^2-1)^4$.

$k = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = x^4$.

On a : $u'(x) = 2x$, $v'(x) = 4x^3$ et

$(v' \circ u)(x) = v'(u(x)) = 4(x^2-1)^3$.

On en déduit : $k'(x) = 2x \times 4(x^2-1)^3 = 8x(x^2-1)^3$

soit : $k'(x) = 8x(x^2-1)^3$.

→ Voir **Exercices 45 à 48** p. 223

3 Dérivées des fonctions composées usuelles

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur un intervalle J. On a :

Fonction	u^n	$\cos(u)$	$\sin(u)$	e^u	$\ln(u)$
Intervalle	I	I	I	I	J
Dérivée	$nu'u^{n-1}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$	$u'e^u$	$\dfrac{u'}{u}$

Remarque • En posant ci-dessus $u(x)=ax+b$, on retrouve les formules de dérivation des fonctions du type $x \mapsto f(ax+b)$.

Théorème Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction v ne s'annulant pas sur I. Alors : $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstration • En remarquant que : $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$, la formule de dérivation d'un produit nous donne :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x)=u'(x)\frac{1}{v(x)}+u(x)\times\left[-\frac{v'(x)}{v^2(x)}\right]=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$=\left(\frac{u'v-u\,v'}{v^2}\right)(x)$$

→ Voir Exercice résolu 3

4 Primitive de $u'f(u)$

Théorème Soit u et f deux fonctions telles que $f\circ u$ soit définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f alors $\boldsymbol{F(u)}$ est une primitive de la fonction $\boldsymbol{u'f(u)}$.

Propriété Soit a et b deux réels avec a non nul. Les primitives de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ définie sur l'intervalle I sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C$ où C est une constante réelle.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur un intervalle J, et n un entier relatif différent de -1. On a :

Fonction	$u'u^n$	$\dfrac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$
Intervalle	I	J	I	I	I
Primitive	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	$\ln(u)+C$	e^u+C	$\sin(u)+C$	$-\cos(u)+C$

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Calculer les dérivées des fonctions composées usuelles

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=(4x+1)^5$ **2.** $(x)=(1+\sin x)^3$

3. $f(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)$ **4.** $f(x)=\sin(x^2+1)$

5. $f(x)=e^{x^2-1}$ **6.** $f(x)=\ln(2+\sin x)$

Méthode — Pour calculer les dérivées des fonctions composées usuelles

❶ On **identifie** les fonctions qui interviennent : u^n, $\cos(u)$, $\sin(u)$, e^u, $\ln(u)$.

❷ On **utilise** la formule appropriée de dérivation du cours.

Solution

1. $f(x)=(u(x))^n$ avec $u(x)=4x+1$ et $n=5$.
$u'(x)=4$ donc :
$f'(x)=nu'(x)\times(u(x))^{n-1}=5\times4\times(4x+1)^4=20(4x+1)^4$.

2. $f(x)=(u(x))^n$ avec $u(x)=1+\sin x$ et $n=3$.
$u'(x)=\cos x$ donc :
$f'(x)=nu'(x)\times(u(x))^{n-1}=3\cos x(1+\sin x)^2$.

3. $f(x)=\cos(u(x))$ avec $u(x)=4x+\frac{\pi}{5}$.
$u'(x)=4$ donc $f'(x)=-u'(x)\times\sin u(x)\ =-4\sin\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)$.

4. $f(x)=\sin(u(x))$ avec $u(x)=x^2+1$.
$u'(x)=2x$ donc $f'(x)=u'(x)\times\cos u(x)=2x\cos(x^2+1)$.

5. $f(x)=e^{u(x)}$
avec $u(x)=x^2-1$.
$u'(x)=2x$ donc $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}=2xe^{x^2-1}$.

6. $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=2+\sin x$. f est définie sur $\mathbb{R}$ car $2+\sin x\geqslant 1$
$u'(x)=-\cos x$ donc $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-\cos x}{2+\sin x}=-\frac{\cos x}{2+\sin x}$.

→ Voir Exercices 51 à 55 p. 223

Exercice résolu 4 — Déterminer les primitives des fonctions composées usuelles

Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I :

1. $f(x)=4e^{4x-1}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$

2. $f(x)=2x(x^2+1)^3$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$

3. $f(x)=\frac{5}{5x+10}$ $\quad \mathrm{I}=]-2\,;+\infty[$

4. $f(x)=2x\cos(x^2)$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\cos x\times e^{\sin x}$ $\quad \mathrm{I}=\mathbb{R}$

Méthode — Pour déterminer les primitives des fonctions composées usuelles

❶ On **identifie** les fonctions qui interviennent en écrivant chaque fonction sous la forme adéquate : $u'u^n$, $u'\cos(u)$, $u'\sin(u)$, $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$…

❷ On **utilise** la formule appropriée du cours.

Solution

1. $f(x)=4e^{4x-1}\ =u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x)=4x-1$, $u'(x)=4$
donc $F(x)=e^{u(x)}=e^{4x-1}$.

2. $f(x)=2x(x^2+1)^3=u'(x)u^n(x)$ avec $u(x)=x^2+1$,
$u'(x)=2x$, $n=3$ donc $F(x)=\frac{1}{n+1}u^{n+1}(x)=\frac{(x^2+1)^4}{4}$.

3. $f(x)=\frac{5}{5x+10}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=5x+10$ et $u'(x)=5$
donc $F(x)=\ln(u(x))=\ln(5x+10)$.

4. $f(x)=2x\cos(x^2)=u'(x)\cos(u(x))$avec $u(x)=x^2$
et $u'(x)=2x$
donc $F(x)=\sin(u(x))=\sin(x^2)$.

5. $f(x)=\cos x\times e^{\sin x}=u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x)=\sin x$
et $u'(x)=\cos x$
donc $F(x)=e^{u(x)}=e^{\sin x}$.

→ Voir Exercices 64 à 71 p. 224

L'essentiel

1 Composée de deux fonctions

- Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions. u est définie sur l'intervalle I et pour tout x de I, $u(x)$ est élément de J ; v est définie sur l'intervalle J. On note $v \circ u$ la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v[u(x)]$.
- $v \circ u$ est appelée **fonction composée** de u par v. On dit aussi « u suivie de v » pour $v \circ u$ car la fonction u écrite en dernier s'applique bien en premier.
- $\mathrm{I} \mapsto \quad \mathrm{J} \mapsto \quad \mathbb{R}$
  $x \mapsto \; u(x) \mapsto \; v[u(x)] = v \circ u(x)$

Remarque : on peut parfois composer dans l'autre sens mais, en général $u \circ v \neq v \circ u$.

2 Fonction dérivée de la composée de deux fonctions

- Soit u et v deux fonctions dérivables respectivement sur les intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que pour tout réel x de I, $u(x)$ soit un élément de J.
  Alors la **fonction $v \circ u$ est dérivable** sur I et on a :

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

3 Dérivées des fonctions composées usuelles

- Soit u une fonction définie sur un intervalle I et strictement positive sur un intervalle J. On a :

Fonction	u^n	$\cos(u)$	$\sin(u)$	e^u	$\ln(u)$
Intervalle	I	I	I	I	J
Dérivée	$nu'u^{n-1}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

4 Primitive de $u'f(u)$

- Soit u et f deux fonctions telles que $f \circ u$ soit définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
  Si F est une primitive de f alors $F(u)$ est une **primitive** de la fonction $u'f(u)$.
- Soit a et b deux réels avec a non nul. Les primitives de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ définie sur l'intervalle I sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)+C$ où C est une constante réelle (rappel : si une fonction admet une primitive, alors elle en admet une infinité ; la constante C est alors déterminé par y_0, la valeur prise par la fonction en x_0).
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, strictement positive sur un intervalle J, et n un entier relatif différent de -1. On a :

Fonction	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$u'e^u$	$u'\cos(u)$	$u'\sin(u)$
Intervalle	I	J	I	I	I
Primitive	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C$	$\ln(u)+C$	e^u+C	$\sin(u)+C$	$-\cos(u)+C$