1 Questions Flash

Diaporama

15 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/1045-52

Résolution d'équations et d'inéquations

2 Parmi les nombres suivants, un seul est solution de l'équation $e^{3x} = e$. Lequel ?

a. 0 **b.** -3 **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\ln(3)$

3 Parmi les nombres suivants, un seul est solution de l'équation $e^{-2x} = 1$. Lequel ?

a. 0 **b.** 2 **c.** -2 **d.** $\frac{-1}{2}$

4 Parmi les nombres suivants, un seul n'est pas solution de l'inéquation $e^{-x} > 2$. Lequel ?

a. -1 **b.** 0 **c.** $-0{,}75$ **d.** -2

*Dans les exercices **5** à **7**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations données.*

5 **a.** $e^{3x} = -1$ **b.** $e^{-x} = 0$ **c.** $e^{4x} = 0$

6 **a.** $e^{-3x} = 1$ **b.** $e^{2x} = 2$ **c.** $e^{-x} = 3$

7 **a.** $e^{-x} = 0$ **b.** $e^{2x} > 4$ **c.** $e^{-3x} > 2$

*Dans les exercices **8** et **9**, résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations ou inéquations données.*

8 **a.** $\ln x = -3$ **b.** $\ln x = 0$ **c.** $\ln x = 2$

9 **a.** $\ln(2x) > 0$ **b.** $\ln(x^2) > 1$ **c.** $\ln(4x) < 0$

Déterminer une fonction dérivée

*Dans les exercices **10** à **17**, déterminer les fonctions dérivées des fonctions f et g définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$.*

10 $f(x) = \pi + \ln(x)$ $g(x) = -3\ln(x)$

11 $f(x) = x - 3 + 2\ln(x)$ $g(x) = 4x^2 - \ln(x)$

12 $f(x) = \ln(x) + 2x - 1$ $g(x) = x^3\ln(x)$

13 $f(x) = x^2\ln(x)$ $g(x) = 1 - x\ln(x)$

14 $f(x) = x(1 - \ln x)$ $g(x) = (\ln x)^2$

15 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $g(x) = \dfrac{2 - \ln x}{x}$

16 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ $g(x) = \dfrac{\ln x}{x+3}$

17 $f(x) = x\ln(x) + 2x - 1$; $g(x) = (x^2 + 1)\ln x - 3\ln x$

Sens de variation de la fonction logarithme népérien

18 Comparer les nombres ci-dessous sans utiliser la calculatrice :

a. $\ln(\sqrt{2})$ et $\ln(\sqrt{3})$. **b.** $\ln(2\pi)$ et $\ln(3{,}3)$.

c. $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\ln\left(\frac{5}{7}\right)$.

19 Comparer les nombres ci-dessous sans utiliser la calculatrice :

a. $\ln(0,002)$ et $\ln(0,02)$. **b.** $\ln(2 \times 10^{-3})$ et $\ln(2 \times 10^{-4})$.

c. $\ln(0{,}999)$ et $\ln(99 \times 10^{-2})$.

20 Ranger dans l'ordre croissant les nombres ci-dessous :

$\ln(2)$; $\ln(1{,}99)$; $\ln(0{,}02)$; $\ln(0{,}19)$; $\ln(2{,}02)$; $\ln(1{,}99)$.

21 Donner le signe des nombres ci-dessous sans utiliser la calculatrice :

Rappel : $\ln 1 = 0$.

a. $\ln(0{,}05)$ **b.** $\ln(2{,}5)$ **c.** $\ln(0{,}999)$

d. $\ln(1{,}0001)$ **e.** $\ln(100)$

Propriétés algébriques du logarithme népérien ln

22 Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ les nombres réels suivants :

$A = \ln(10\,000)$ $B = \ln\left(\frac{125}{8}\right)$

$C = \ln(0{,}1)$ $D = \ln(\sqrt{12\,500})$

23 Donner la valeur exacte des nombres réels suivants sans utiliser la calculatrice :

$A = \ln(\sqrt{e})$ $B = \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ $C = \ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$

24 Donner la valeur exacte des nombres réels suivants sans utiliser la calculatrice :

$D = 2\ln(e^5) - 5\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ $E = 4 - 3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

Logarithme décimal et logarithme népérien

25 Écrire les nombres suivants en utilisant $\ln(5)$ et $\ln(2)$:

a. $\log(125)$ **b.** $\log(50)$

c. $\log(0{,}25)$ **d.** $\log(32)$

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Fonction logarithme népérien

→ Aide Cours 1 p. 192

Question de cours

26 **1.** Donner la fonction dérivée de la fonction ln.
2. Quel est le sens de variation de la fonction ln sur son ensemble de définition ?

27 ALGO PYTHON
Kevin a tapé ce programme sous Python pour déterminer les images de nombres réels par la fonction $f : x \mapsto \ln(-\sqrt{x})$.

```
from math import *
def image(x):
    return log(-sqrt(x))
```

Mais pour chaque valeur entrée, il obtient le message.

```
Console Python
  File "<module2>", line 3, in image
ValueError: math domain error
```

Expliquer pourquoi ce message s'affiche.

Résolution d'équations et d'inéquations

→ Aide Cours 1 p. 192

Question de cours

28 **1.** 0 est-il une solution de l'inéquation $e^x \geqslant 1$?
2. 1 est-il une solution de l'équation $\ln(x) = 0$?

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :
a. $e^{2x+1} = 1$
b. $e^{-2x-1} = e^{x^2}$
c. $e^{2x-1} = e^{x^2}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 193

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous :
a. $2e^{-x+1} > 2$
b. $-3e^{2x} + 6 < 0$
c. $e^{x^2} > 1$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 193

31 Résoudre chaque équation sur l'intervalle indiqué :
a. $\ln(2x - 1) = 0$ sur $I =]0,5 ; +\infty[$.
b. $\ln(x^2) = 1$ sur $I =]0 ; +\infty[$.
c. $\ln(x + 1) = 1$ sur $I =]-1 ; +\infty[$.

→ Voir Exercice résolu 5 p. 195

32 Résoudre chaque inéquation sur l'intervalle indiqué :
a. $\ln(2x + 1) > 0$ sur $I =]-0,5 ; +\infty[$.
b. $\ln(x^2) > \ln(x)$ sur $I =]0 ; +\infty[$.
c. $\ln(x^2) > \ln(-x)$ sur $I =]-\infty ; 0[$.

→ Voir Exercice résolu 5 p. 195

33 Soit l'équation (E) : $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.
a. Montrer que 0 est une solution de l'équation (E).
b. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $(e^x - 1)^2 = 0$.
c. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

34 Soit l'équation (E) : $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.
a. On pose $X = e^x$. Montrer que l'équation (E) équivaut à $X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X > 0$.
b. Montrer que pour tout X réel, $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - 2X - 3 = 0$.
c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

35 L'équation $\ln(2x + 3) = 0$ admet comme solution dans l'intervalle $\left]-\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ (une seule réponse est exacte) :

a. $-\frac{3}{2}$ **b.** -1 **c.** $\ln 3$ **d.** $-\frac{2}{3}$

Vrai ou faux

36 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.*
1. 5 est une solution de l'équation $\ln(x^2) - 2\ln(x) = 0$.
2. -3 est une solution de l'équation $e^{-\ln x} = 0,3$.
3. 0 est une solution de l'équation $e^{-2x} + e^{2x} = 2$.
4. L'inéquation $\ln(2x) > 1$ admet comme ensemble solution l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Dérivée

→ Aide Cours 1B p. 192

Question de cours

37 **1.** Soit x un réel strictement positif. À quoi est égal $\ln'(x)$?
2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Dans les exercices 38 à 41, déterminer la fonction dérivée pour chacune des fonctions données sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 193

38 **a.** $f(x) = -3\ln(x) + x^2 - 3x + 4$
b. $f(x) = \ln(x^2)$
c. $f(x) = (\ln(x))^2$

39 a. $f(x)=\ln(x)-4x^2+3x+4$
b. $f(x)=2\ln(x)-x^3-5x+1$
c. $f(x)=\pi\ln(x)+3$

40 a. $f(x)=(2x-1)\ln(x)$
b. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
c. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$

41 a. $f(x)=x^2\ln(x)$
b. $f(x)=(x^2+1)\ln(x)$
c. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x+1}$

42 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5\ln x$. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a (une seule réponse est exacte) :
a. $f'(x)=5\ln x$ b. $f'(x)=5(\ln x+1)$
c. $f'(x)=\dfrac{5}{x}$ d. $f'(x)=\dfrac{5}{x^2}$

43 Soit la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{x}+2x-1$, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Montrer que la fonction F, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\ln(x)+x^2-x+1$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Dans les exercices 44 à 47, on donne la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées mais une seule est exacte. Indiquer la réponse correcte.

44 On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :
a. $f'(x)=2$ b. $f'(x)=x(2\ln x+1)$
c. $f'(x)=2x\ln x+1$ d. $f'(x)=2x\ln x$

45 Une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :
a. $F(x)=2x\ln x$ b. $F(x)=2\ln x+x$
c. $F(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^3\ln x-\dfrac{1}{3}x^3\right)$ d. $F(x)=\dfrac{1}{3}(x^3\ln x-x^3)$

46 Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :
a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

47 Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :
a. $y=x$ b. $y=x-1$ c. $y=x+1$ d. $y=1$

48 Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction $x\mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Sens de variation

→ Aide Cours 1B p. 192

Question de cours

49 1. Quel est le sens de variation de la fonction ln sur son ensemble de définition ?
2. Montrer que pour tout réel $x>1$, $\ln(x)>0$.

50 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-3\ln x$.
1. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Comparer les nombres $f(2\sqrt{2})$ et $f(3)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 193

51 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=2\ln(x)+x^2+1.$$
Montrer que f est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

52 Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
$\ln((\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1))$; $\ln(\sqrt{2})$; $\ln(2)$; $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $\ln(0{,}2)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 193

Propriétés algébriques de la fonction ln

→ Aide Cours 2 p. 194

Question de cours

53 1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $\ln(x^2)=2\ln(x)$.
2. Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que $\ln(a\times b\times c)=\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)$.

54 Exprimer en fonction de ln2 et ln3 les nombres suivants :
$A=\ln(12)$
$B=\ln\sqrt{24}$
$C=\ln\left(\dfrac{16}{27}\right)$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

55 Donner la valeur exacte des nombres suivants sans utiliser la calculatrice :
a. $3+\ln(e^2)$ b. $\ln(\sqrt{e^5})$
c. $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-4$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

56 Simplifier l'écriture des nombres suivants :
$A=\ln 3-\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$ $C=\ln(\sqrt{27})+2\ln 4-\dfrac{1}{2}\ln 9-\ln 8$
$B=2\ln(\sqrt{2})-\dfrac{1}{3}\ln(8)$ $D=\dfrac{e^{\ln 3}}{e^{2\ln 3}}$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

57 Simplifier la somme suivante :

$$S=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{98}{99}\right)+\ln\left(\frac{99}{100}\right)$$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

58 Dans chaque cas, montrer que pour tout $x\in\ ]0\,;+\infty[$, $A(x)=B(x)$.

1. $A(x)=2\ln x-\ln(3x)$ et $B(x)=\ln\left(\frac{x}{3}\right)$.

2. $A(x)=\ln(2x)-\frac{1}{2}\ln x$ et $B(x)=\ln(2\sqrt{x})$.

3. $A(x)=4\ln x+\ln(2x)-\ln 4-\ln(x^3)$ et $B(x)=\ln\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

59 Donner la valeur exacte des nombres réels suivants sans utiliser la calculatrice :

$D=2\ln(e^5)-5\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

$E=4-3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

Logarithme décimal et logarithme népérien

→ Aide Cours 3 p. 194

Dans tout ce qui suit, on désigne par log la fonction logarithme décimal.

Question de cours

60 **1.** Soit x un réel strictement positif. Écrire $\log(x)$ à l'aide de $\ln(x)$.

2. Soit x un réel strictement supérieur à 1 : montrer que $\log(x)<\ln(x)$.

61 On donne $\ln(10)\approx 2{,}3$ à 10^{-1} près. Sachant que $\log(100)=2$, en déduire une valeur approchée à 0,1 près des nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

a. $\ln(100)$ **b.** $\ln(10\,000)$

c. $\ln(10^{-2})$

→ Voir Exercice résolu 6 p. 195

62 En mathématiques, le nombre « gogol » (googol dans sa version anglaise, terme qui a donné son nom à une célèbre entreprise sur le web) est le nombre dont l'écriture décimale est un 1 suivi de 100 zéros ; il est donc égal à 10^{100}.

1. Simplifier $\ln(10^{100})$.

2. En déduire la valeur de $\log(10^{100})$.

63 **a.** Soit x un réel strictement positif. Montrer que $\log'(x)=\frac{1}{x\ln(10)}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction logarithme décimal sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

64 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par $f(x)=x^2-14x+15+20\ln x$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;10]$, on a :

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x-5)}{x}.$$

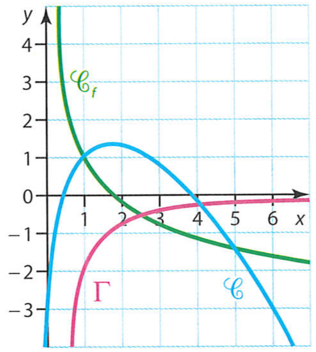
2. Construire en justifiant le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;10]$.

65 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathscr{C}_f$ et les courbes $\mathscr{C}$ (en bleu) et Γ (en rose). L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée f' de f, et l'autre une des primitives F de f.



a. Indiquer laquelle des deux courbes $\mathscr{C}$ ou Γ représente la fonction dérivée f'. Justifier.

b. Par lecture graphique, donner $F(1)$.

2. a. Montrer que pour tout $x\in\ ]0\,;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{-x-1}{x^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.

3. Soit H la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$H(x)=x-(x-1)\ln x.$$

a. Montrer que H est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

b. En déduire l'expression de la fonction F de la question **1.**

66 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\ ]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

Fonction logarithme népérien

67 ALGO PYTHON **Lire un programme**

1. Bob a tapé ce programme sous Python pour calculer des images arrondies à 10 chiffres après la virgule de 10 nombres réels aléatoires de l'intervalle [0 ; 10] par une certaine fonction f.

```
from math import*
def image(x):
      return (log(sqrt(1+x**2)+x)+log(sqrt(1+x**2)-x))
x=0
while x <=10:
   print("L'image de",x,"par f vaut",round(image(x),10))
   x=x+1
```

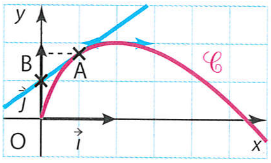
De quelle fonction Bob cherche-t-il les images ?

2. Sophia a testé le programme, mais pense que celui-ci ne doit pas fonctionner car il affiche toujours le même résultat. Qu'en pensez-vous ?

Remarque : en Python, on obtient la valeur arrondie du nombre a à n chiffres après la virgule avec l'instruction **round(a, n)**.

68 **Partie A**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$, on donne la courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$. On admet que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.



Toutes les réponses aux questions de cette partie seront données à l'aide du graphique.

1. Déterminer $f(0{,}5)$ et $f'(0{,}5)$.

2. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=0$ puis l'inéquation $f(x)>0$.

3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Partie B

On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x(1-\ln x)$.

Retrouver les résultats des questions de la partie A par le calcul.

69 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{4}-1-2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{2x}$.

2. Étudier sur $]0\,;+\infty[$ le signe de $f'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction f.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

4. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x$.

a. Déterminer la dérivée g' de la fonction g.

b. En déduire la primitive F sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f telle que $F(1)=0$.

QCM

70 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. Une solution de l'équation $\ln(2x+3)=0$ dans l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ est :

a. $\dfrac{3}{2}$ **b.** -1 **c.** $\ln 3$ **d.** $-\dfrac{2}{3}$

2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par $f(x)=5x\ln x$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty\,[$, on a :

a. $f'(x)=5\ln x$ **b.** $f'(x)=5(\ln x+1)$

c. $f'(x)=\dfrac{5}{x}$ **d.** $f'(x)=\ln x+1$

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la fonction f dérivable sur $]0\,;+\infty\,[$ et définie par $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x+1}-4$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. $f'(x)$ est égale à :

a. $\dfrac{2}{x}$ **b.** $\dfrac{2\left(1+\dfrac{1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^2}$ **c.** $\dfrac{2+\dfrac{1}{x}-2\ln x}{(x+1)^2}$ **d.** $\dfrac{2\ln x-2-\dfrac{2}{x}}{(x+1)^2}$

4. Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 admet pour équation :

a. $y=x+3$ **b.** $y=x-5$ **c.** $y=-x-3$ **d.** $y=2x-6$

71 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[1\,;7]$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-6x+4+8\ln x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan, d'unités graphiques 1 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On donnera des valeurs approchées de $f(x)$ à 10^{-1} près.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$			−0,7		−0,6	0,3	

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I : $f'(x)=\dfrac{(x-2)(x-4)}{x}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

4. a. Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

b. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle I.

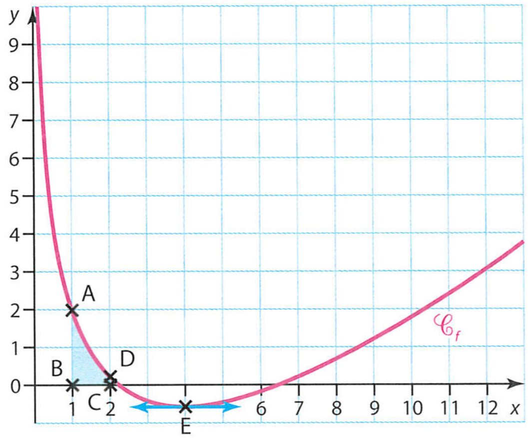
72 Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = ax + b\ln x + 1$ où a et b sont deux nombres réels.

$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. Les points A et E sont deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$. Le point A a pour coordonnées (1 ; 2) et le point E a pour abscisse 4.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point E est horizontale.



1. Déterminer $f(1)$ et $f'(4)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

2. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(4)$ en fonction de a et b.

3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est en fait définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 4\ln x + 1$.

1. Calculer la dérivée f' de f.

2. En déduire le tableau des variation de f.

Propriétés algébriques de la fonction ln

73 STL On a étudié le nombre de bactéries du type coliforme dans une certaine quantité d'une culture liquide. Au départ, il y avait 15 000 bactéries. On a constaté que le nombre de bactéries augmentait, chaque minute, approximativement de 20 % mais qu'à chaque minute, 500 bactéries étaient aussi détruites.

On appelle u_n le nombre de bactéries vivantes présentes au bout de n minutes et on définit ainsi une suite (u_n) dont le premier terme est $u_0 = 15\,000$.

1. On donne ci-dessous une feuille de calcul construite à l'aide d'un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	0	1	2	3	4	5
2	Nbre de bactéries u_n	15000	17500	20500	24100	28420	33604
3	v_n	12500	15000	18000	21600	25920	31104
4	v_{n+1}/v_n		1,2	1,2	1,2	1,2	1,2

Quelle formule a-t-on entrée en C2 puis recopiée vers la droite pour compléter la ligne 2 ?

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} en fonction de u_n.

La suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.

3. La ligne 3 contient les termes d'une suite (v_n) calculée à partir de la suite (u_n).

La cellule B3 contient la formule $\boxed{=\text{B2} - 2\,500}$ qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne 3. Donner l'expression de v_n en fonction de u_n.

4. La cellule C4 contient la formule $\boxed{=\text{C3/B3}}$ qui a été recopiée vers la droite pour compléter la ligne 4.

a. Que peut-on conjecturer pour la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer cette conjecture, en déduire v_n en fonction de n.

c. À l'aide de la question **3.**, justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 12\,500 \times (1{,}2)^n + 2\,500.$$

d. Déterminer au bout de combien de minutes, cette culture liquide contiendra plus de 500 000 bactéries.

74 Le nombre de noyaux radioactifs N d'un élément radioactif évolue au cours du temps t suivant la loi exponentielle suivante : $N(t) = N_0 \times e^{-\lambda t}$, où N_0 est le nombre initial de noyaux radioactif, λ est la constante radioactive reliée à la période T de l'élément. T correspond à la demi-vie de l'élément radioactif, c'est-à-dire le temps au bout duquel le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

La constante λ et la période T sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Le temps t est exprimé en milliers d'années, donc la demi-vie T également. On donne la demi-vie pour quelques éléments :

Carbone 14 : 5 730 ans.
Uranium 238 : 4,5 milliards d'années.
Plutonium 239 : 24 000 ans.

1. Montrer que $N(2T) = \dfrac{N_0}{4}$.

2. En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 devient égal au quart de la valeur initiale.

3. Calculer la constante de radioactivité pour le carbone 14 et le plutonium 239. On arrondira à 10^{-5} près les résultats.

4. Déterminer la loi exponentielle de désintégration des noyaux pour le carbone 14 et pour le plutonium 239.

5. Déterminer au bout de combien de temps, au millier d'années près, le nombre de noyaux radioactifs de plutonium 239 sera inférieur à 10 % de sa valeur initiale.

6. Lorsqu'un organisme vivant meurt, le carbone 14 contenu dans cet organisme se désintègre, sans être renouvelé. La proportion du carbone 14 restant dans cet organisme à un instant donné permet de connaître l'âge de sa mort.

On a retrouvé dans un fragment d'os humain sur un site archéologique une proportion de 10 % de carbone 14.

Déterminer l'âge du fragment humain à 100 ans près.

Logarithme décimal et logarithme népérien

75 Le pH d'une solution aqueuse est donné par la formule : $pH = -\log([H_3O^+])$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration molaire, en $mol{\cdot}L^{-1}$, en ions oxonium H_3O^+.

1. Montrer que le pH d'une solution, dont la concentration molaire en ions H_3O^+ est 2×10^{-6}, est égale à $6 - \log(2)$ soit environ 5,7.

2. Une solution est dite neutre si son pH est égal à 7. Déterminer alors sa concentration molaire en ions H_3O^+.

3. L'étiquette d'une eau minérale gazeuse indique pH = 6,3. Calculer la concentration en ions $[H_3O^+]$ de cette eau.

4. Que devient le pH lorsque la concentration est divisée par 10 ? Par 100 ?

5. Que devient la concentration quand le pH diminue de 1 ? de 2 ?

76 À chacun sa série STL ALGO PYTHON

En 2005, le prix de vente, en euros, d'un équipement neuf pour laboratoire d'analyses biologiques était $u_0 = 12\,000$.

On admet que la valeur de cet équipement perd 5 % de sa valeur chaque année. Pour tout entier naturel n, on note u_n la valeur, en euros, de cet équipement l'année $(2005 + n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera les caractéristiques.

2. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. On cherche à déterminer l'année à partir de laquelle cet équipement aura perdu la moitié de sa valeur initiale.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde au problème.

```
n ← 0
u ← 12 000
Tant que u > ...................... faire :
    u ← .........
n ← ........
FinTantQue
```

b. Le programmer sur la calculatrice et donner le résultat au problème.

c. Retrouver ce résultat par le calcul.

77 À chacun sa série STI2D

En traversant une plaque de verre teinté, un rayon lumineux perd 25 % de son intensité lumineuse exprimée en candélas (cd). On dispose d'un rayon lumineux dont l'intensité, en candélas, est $I_0 = 160$. On lui fait traverser une superposition de n plaques identiques de verre teinté. On note I_n son intensité, en candélas, à la sortie de la n^e plaque.

1. Calculer l'intensité du rayon à la sortie d'une plaque de verre.

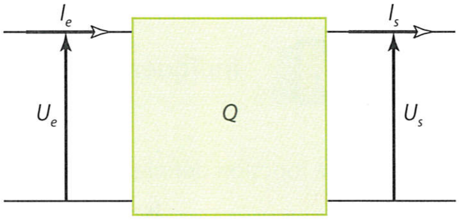
2. Montre que la suite (I_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3. En déduire l'expression de I_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Déterminer le nombre minimal de plaques que ce rayon doit avoir traversées pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale à 40 cd.

78 À chacun sa série STI2D

Un quadripôle est un composant électronique à deux entrées et deux sorties. On étudie le transfert d'énergie entre les deux dipôles. I_e et I_s désignent les intensités en entrée et sortie, U_e et U_s désignent les tensions en entrée et sortie.



On définit le gain en tension, le nombre noté $G_U = 20\log\left(\frac{U_s}{U_e}\right)$, le gain en courant, noté G_I égal à $20\log\left(\frac{I_s}{I_e}\right)$ et le gain en puissance, noté G_P égal à $10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right)$, où P_e et P_s sont les puissances en entrée et sortie.
Ces gains s'expriment en dB.
On rappelle que $P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$, où R désigne la résistance du dipôle.

1. Montrer que si la résistance R est la même en entrée et en sortie, alors $G_U = G_I = G_P$.

2. Si un quadripôle multiplie la tension par 10 entre l'entrée et la sortie, quel est son gain en tension ?

3. Que signifie un gain en puissance de 3 dB ?

4. Que signifie que le gain en courant est négatif ?

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-53

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
79 La fonction logarithme népérien est définie en 0.		
80 La fonction logarithme népérien est croissante sur $]0\,;+\infty[$.		
81 $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = +\infty$.		
82 $\ln(2\mathrm{e}) - 2\ln 8 - \ln\left(\dfrac{1}{16}\right) = 1 - \ln 2$.		
83 La fonction ln est une primitive de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.		
84 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x^2+x)\ln x$. Pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x}$.		
85 L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(2x) > -1$ est l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$.		
86 L'équation $\mathrm{e}^{x^2+1} = 1$ admet pour solution $x = 0$.		
87 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est égal à 3.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

88 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x(2\ln x - 1)$. Pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$:

a. $f'(x) = \dfrac{4\ln x - 1}{x}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}$ **c.** $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$

89 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[$:

a. $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$ **d.** $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

90 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - \dfrac{4}{x}$. Une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x) = x^3 - 4\ln x$ **b.** $F(x) = 1{,}5x^2 + \ln x$ **c.** $F(x) = 1{,}5x^2 - 4\ln x$ **d.** $F(x) = 1{,}5x^2 + \dfrac{4}{x^2}$

91 Soit l'inéquation $\ln(4x) > 1$. Quel nombre n'est pas solution de cette inéquation ?

a. 1 **b.** 0,25 **c.** 2 **d.** 0,75

92 Soit G la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $G(x) = x\ln(x) - x + 2$. G est une primitive de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

a. $g(x) = x\ln(x) - 1$ **b.** $g(x) = \ln(x) + 2x$ **c.** $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ **d.** $g(x) = \ln(x)$

→ Vérifier les résultats p. 324

93 In English

We suppose below that x is always positive.
The natural logarithm, $\ln x$, is the logarithmic function of base e.
The common logarithm, $\log x$, has no base indicated and the understood base is always 10.
It is defined by $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.
The binary logarithm, $\text{lb}x$, is the logarithmic function of base 2. It is defined by $\text{lb}x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

1. Prove that for any natural number n, $\text{lb}(2^n)$ is equal to n.
2. Prove that $\text{lb}x = \dfrac{\ln 10}{\ln 2} \times \ln x$.
3. Find a similar identity for $\ln x$ written with $\text{lb}x$.

94 COMPÉTENCE Calculer

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

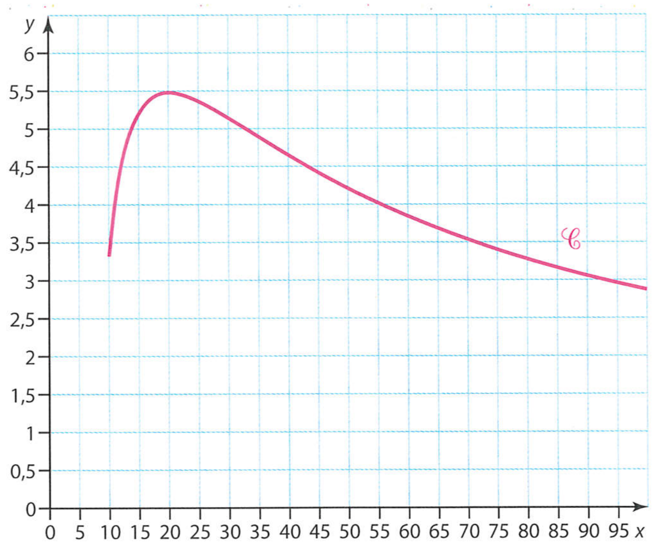
1. Montrer que pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
3. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont on déterminera les coordonnées (on notera A celui dont l'abscisse est entière).
b. Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

95 COMPÉTENCE Calculer, Modéliser

La capacité pulmonaire d'une personne est la quantité d'air (mesurée en litres) pouvant être inspirée. Dans le cas d'une inspiration forcée, à partir de 10 ans, la capacité pulmonaire (en litres) d'une personne peut être modélisée en fonction de son âge x (en années) par la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}.$$

1. On donne ci-après la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[10\,; 100]$ dans un repère orthogonal.



En utilisant la courbe $\mathscr{C}$:
a. Estimer graphiquement à quel âge la capacité pulmonaire est maximale puis donner cette capacité.
b. Estimer graphiquement l'âge à partir duquel un adulte a une capacité pulmonaire inférieure à celle d'un enfant de 10 ans.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[10\,; 100]$. Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[10\,; 100]$:

$$f'(x) = \frac{110(3 - \ln x)}{x^2}.$$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[10\,; 100]$.
c. Déterminer la valeur exacte du maximum de f puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

96 COMPÉTENCE Calculer, Raisonner

Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

1. Montrer que pour tout x dans $]1\,;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}.$$

2. Afin de déterminer le signe de f', on s'intéresse à la fonction g définie, sur $[1\,;+\infty[$, par $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$.
a. Étudier le sens de variation de g sur $[1\,;+\infty[$. On précisera $g(1)$.
b. En déduire le signe de g, puis celui de f' et le sens de variation de f sur $]1\,;+\infty[$.
c. Déterminer alors le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]1\,;+\infty[$.

TP

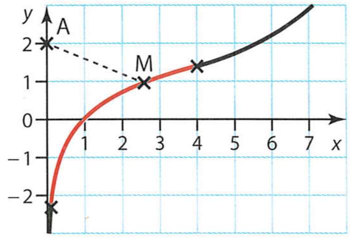
Le plus court chemin

CAPACITÉ Étudier un problème d'optimisation faisant intervenir la fonction ln.

Emma a acheté un terrain sur lequel passe une rivière.
Elle souhaite faire un potager et pour arroser celui-ci, elle décide d'installer un arroseur au point A qu'elle veut raccorder au cours d'eau par un tuyau.
Le but de ce problème est de déterminer quelle longueur de tuyau devra prévoir Emma, sachant qu'elle souhaite que cette longueur soit la plus courte possible.

Modéliser le problème

On a représenté ci-contre l'arroseur A et le cours d'eau dans un repère orthonormé (unité graphique : 1 carreau pour 10 m).
L'arc de courbe rouge est le morceau de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle [0,1 ; 4].



1. Soit f la fonction définie sur [0,1 ; 4] par $f(x) = x^2 + (\ln(x) - 2)^2$.
Dans le repère orthonormé, soit A(0 ; 2) et M un point de l'arc de courbe rouge.
Justifier que, pour tout $x \in [0,1 ; 4]$, $AM^2 = f(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur [0,1 ; 4] par $g(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

a. Montrer que la fonction g est croissante sur [0,1 ; 4].

b. On admet ici que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans [0,1 ; 4]. Montrer que $\alpha \in [1 ; 2]$. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 0,1 près de α.

c. Déterminer, dans un tableau, le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x \in [0,1 ; 4]$.

3. a. Montrer que, pour tout $x \in [0,1 ; 4]$, $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur [0,1 ; 4].

c. Pour quelle valeur de x f admet-elle un minimum ?

GEOGEBRA PYTHON *En salle informatique* lienmini.fr/10445-54

PARTIE 1 Conjecturer une solution approchée au problème à l'aide de Geogebra

1. Ouvrir le fichier du lien mini dans lequel on a représenté dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 pour 10 m) l'arroseur (A) et le bord du cours d'eau qui nous intéresse.
L'arc de courbe rouge est le morceau de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle [0,1 ; 4].

2. Placer un point M, libre sur l'arc de courbe rouge, le déplacer le long de l'arc de courbe et relever la valeur pour laquelle la distance semble la plus courte.

PARTIE 2 Déterminer un encadrement de la solution au problème à l'aide de Python

1. On donne le programme ci-contre :
Que renvoie ce programme ? Le faire fonctionner pour $a = 0{,}01$.

```
from math import*
def g(x):
    return x**2-2+log(x)
def balayage(a):
    x=1
    while g(x)<0:
        x=x+a
    print('la solution cherchée est encadrée par',round(x-a,2),'et',round(x,2))
```

2. Modifier le programme précédent pour qu'il renvoie un encadrement de la solution au problème par des valeurs approchées à 10^{-n} près, où n est un entier naturel.

Remarque : en langage Python, la fonction ln s'écrit **log** (avec le logiciel Edupython et la bibliothèque **lycee**, la notation ln est conservée).

Sujet résolu BAC

97 On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,e^2]$ par $f(x)=\dfrac{-1+2\ln x}{x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variation de f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses.

4. Soit F la fonction définie sur $[1\,;\,e^2]$ par $F(x)=-\dfrac{1+2\ln x}{x}$. Vérifier que F est une primitive de f sur $[1\,;\,e^2]$.

Méthode à appliquer / Solution rédigée

Méthode à appliquer

1. On utilise la formule de dérivation d'un quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2} \text{ et } (\ln)'(x)=\frac{1}{x}.$$

→ Voir Exercice résolu 2 p. 193

Solution rédigée

1.
$$f'(x)=\frac{2\times\frac{1}{x}\times x^2-(-1+2\ln x)\times 2x}{x^4}$$
$$=\frac{2x+2x-4x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{4x-4x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{4(1-\ln x)}{x^3}$$

Méthode à appliquer

2. x^3 est strictement positif sur $[1\,;\,e^2]$ et $4>0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $1-\ln x$.

On complète le tableau avec les valeurs exactes des images de 1, de e et de e^2 par la fonction f.

Solution rédigée

2. On résout l'inéquation $1-\ln x>0$.

Elle équivaut à : $\ln x<1$.

$\Leftrightarrow \ln x<\ln e$

$\Leftrightarrow x<e$.

$f'(x)>0$ sur l'intervalle $[1\,;\,e]$ et $f'(x)<0$ sur l'intervalle $[e\,;\,e^2]$. D'où le tableau de variation :

x	1		e		e^2
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	-1	↗	$\dfrac{1}{e^2}$	↘	$\dfrac{3}{e^4}$

Méthode à appliquer

3. Le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses est le point de $\mathscr{C}_f$ dont l'ordonnée est nulle. On résout donc l'équation $f(x)=0$.

Solution rédigée

3. Comme $x^2\neq 0$ sur $[1\,;\,e^2]$, l'équation $f(x)=0$ équivaut à :

$-1+2\ln x=0$

$\Leftrightarrow \ln x=0{,}5$

$\Leftrightarrow x=e^{0,5}$.

Le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(e^{0,5}\,;\,0)$.

Méthode à appliquer

4. On vérifie que F est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,e^2]$ et que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[1\,;\,e^2]$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 193

Solution rédigée

4. F est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[1\,;\,e^2]$, avec le dénominateur x qui ne s'annule pas.

$$F'(x)=-\frac{2\times\frac{1}{x}\times x-(1+2\ln x)\times 1}{x^2}=-\frac{2-1-2\ln x}{x^2}$$

$$F'(x)=\frac{-1+2\ln x}{x^2}=f(x)$$

Pour l'épreuve du BAC

Sujet guidé BAC

98 CAPACITÉS

- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer des expressions.
- Résoudre des équations d'inconnue x du type $e^{ax} = b$.
- Résoudre des équations d'inconnue x du type $\ln(x) = b$.
- Étudier des fonctions somme, produit ou quotient de fonctions polynômes et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est correcte.
Aucune justification n'est demandée.

1. Pour tout réel x strictement positif, $\ln(x^2 + x)$ est égal à :
a. $\ln(x^2) \times \ln(x)$
b. $\ln(x) + \ln(x+1)$
c. $\ln(x^2) + \ln(x)$

Méthode On utilise la propriété $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 195

2. L'équation $e^{-2x} = 6$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$:
a. $-\ln 3$ **b.** $\dfrac{e^{-6}}{3}$ **c.** $\dfrac{-\ln 6}{2}$

Méthode On utilise la propriété $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 193

3. L'équation $\ln(3x) - 1 = 0$ admet pour solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$:
a. $\dfrac{1}{3}$ **b.** $\dfrac{e}{3}$ **c.** $\dfrac{1}{3e}$

Méthode On utilise la propriété $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

→ Voir Exercice résolu 5 p. 195

4. Soit f la fonction définie, et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = 2\ln(x) + x^2 + 3x - 1.$$

a. f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
b. f change de sens de variation sur $]0\,;+\infty[$.
c. f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Méthode On calcule la fonction dérivée de f puis on étudie son signe.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 193

99 CAPACITÉ

- Étudier des fonctions somme, produit ou quotient de fonctions polynômes et de la fonction $x \mapsto \ln(x)\,x$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 30 - 24\ln(x).$$

Une entreprise fabrique des objets. Le coût unitaire (en euros) pour x centaines d'objets produits est égal à $f(x)$. Par exemple, on a $f(2) \approx 13{,}36$, ce qui signifie que, pour 200 objets produits, le coût de production par objet est d'environ 13,36 euros. L'entreprise devra donc vendre ces 200 objets à plus de 13,36 euros pièce si elle ne veut pas vendre à perte.

1. Calculer $f(3)$ à 10^{-2} près et interpréter le résultat en s'inspirant de l'exemple précédent.

2. Recopier puis compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira les résultats au centième.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$f(x)$		13,36						

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que sur l'intervalle $[1\,;10]$,

$$f'(x) = \frac{2(x-4)(x+3)}{x}.$$

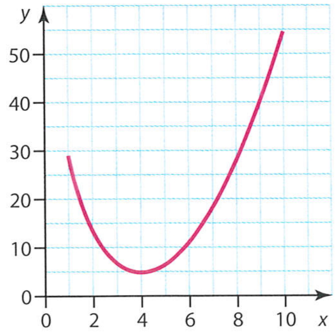
Méthode On calcule la fonction dérivée de f puis on étudie son signe.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 193

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;10]$, puis dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

5. Pour combien d'objets produits, le coût de fabrication par objet est-il minimum ? Donner la valeur arrondie au centième d'euros de ce coût minimum.

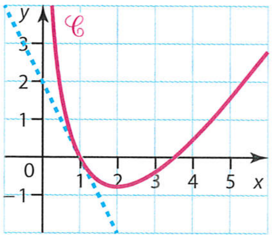
6. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-contre dans un repère orthogonal.



a. Avec la précision permise par le graphique, résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 20$.
b. L'entreprise vend chaque objet 20 euros pièce. Pour quelle(s) quantité(s) d'objets produits et vendus, l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

SUJET BAC

100 La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$.
La droite tracée en pointillé est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.



Partie A

Dans cette partie, il est demandé de répondre aux différentes questions par lecture graphique. Aucun calcul n'est donc attendu.

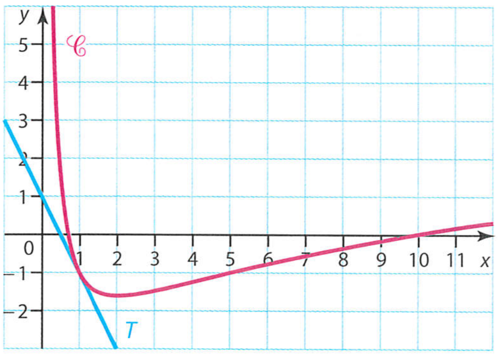
1. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$.
2. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.
3. Déterminer $f'(1)$ puis l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Partie B

En fait, la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=2x-2-4\ln(x).$$
1. Montrer que 1 est une solution de l'équation $f(x)=0$.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{2(x-2)}{x}$ pour tout $x>0$.
3. En déduire le tableau de variation de f. On indiquera la valeur exacte du minimum.
4. Déterminer un encadrement à 0,1 près de a, seconde solution de l'équation $f(x)=0$.
5. Retrouver par le calcul l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

101 Partie A

f est une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
f' désigne la fonction dérivée de f. $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.



T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;-1)$.
T passe par le point de coordonnées $(0\,;1)$.
1. a. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$.
b. Déterminer $f'(1)$.
c. Donner une équation de T.
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x)=2\ln x+\dfrac{a}{x}+b$ où a et b sont des nombres réels.
a. Calculer $f'(x)$.
b. Déterminer alors les valeurs de a et b.

Partie B

Soit la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x)=2\ln x+\dfrac{4}{x}-5$
1. a. Vérifier que pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x-4}{x^2}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2. Établir le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

102 Le niveau sonore N d'un bruit, à une distance D de sa source, dépend de la puissance sonore P de la source. Il est donné par la relation :
$$N=120+4\ln\left(\frac{P}{13\times D^2}\right)$$
où N est exprimé en décibels (dB), P en watts (W) et D en mètres (m).

Partie A

Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.
1. Calculer le niveau sonore N d'un bruit entendu à 10 mètres de la source sonore dont la puissance P est égale à 2,6 watts. On arrondira le résultat à l'unité.
2. On donne $N=84$ dB et $D=10$ m. Déterminer P.
On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise de travaux publics réalise un parking en plein air. Sur le chantier d'aménagement de ce parking, une machine de découpe a une puissance sonore P égale à 0,026 watts.
1. a. Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation :
$$N=120+4\ln(0{,}002)-4\ln(D^2).$$
b. Montrer qu'une approximation de N peut être :
$$95{,}14-8\ln(D).$$
Dans la suite de l'exercice, à une distance de x mètres de la machine, le niveau sonore N émis par la machine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;20]$ par :
$$f(x)=95{,}14-8\ln(x).$$

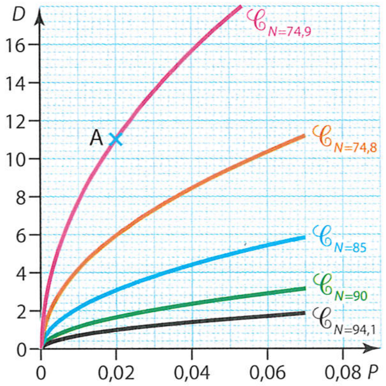
2. a. Déterminer une expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0{,}1\,;20]$.
c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1\,;20]$.
3. On suppose qu'un ouvrier de cette entreprise se situe à trois mètres de la machine. La législation en vigueur l'oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.
Justifier, à l'aide du tableau ci-dessous, que l'ouvrier doit porter des protections individuelles contre le bruit.

Impact sur l'audition	Niveaux sonores en décibels
Aucun	[0 ; 85[
Risque faible	[85 ; 90[
Risque élevé	[90 ; 120[

4. Déterminer à quelle distance de la machine un ouvrier de l'entreprise sort de la zone de risque élevé (c'est-à-dire lorsque le niveau sonore est inférieur à 90 dB).

Partie C

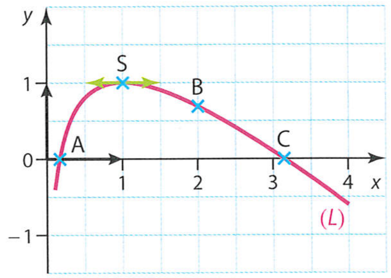
On s'intéresse au lien entre la puissance P d'un bruit et la distance D de sa source pour différentes valeurs de son niveau sonore N.



On admet que pour une puissance de 0,02 watt, le niveau sonore du bruit est de 74,9 décibels à une distance de 11 mètres de la source sonore. Ainsi, le point A de coordonnées (0,02 ; 11) appartient à la courbe $\mathscr{C}_{N=74,9}$.
1. Pour un bruit de puissance P égale à 0,06 W, déterminer graphiquement à quelles distances minimale et maximale de la source peut se situer une personne pour que le niveau sonore N soit compris entre 85 et 90 dB.
2. Pour une source sonore située à une distance D de 8 m, déterminer graphiquement les puissances minimale et maximale de cette source pour obtenir un niveau sonore compris entre 74,9 dB et 79,8 dB.

103 Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer pour chaque question la réponse correspondante choisie.
1. Une primitive de f définie pour $x > 0$ par $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x}$ est la fonction F telle que :
a. $F(x) = 3x^2 + \ln(x^2)$ **b.** $F(x) = \dfrac{3x^2}{2} + 2\ln(x)$
c. $F(x) = 3 - \dfrac{2}{x^2}$ **d.** $F(x) = 6x - 2\ln(x)$
2. $\ln(128)$ est égal à :
a. $\ln(2) + \ln(7)$ **b.** $7\ln(2)$ **c.** $2\ln(14)$ **d.** $\ln(120) + \ln(8)$
3. L'équation $e^{2x} = 3$ admet comme solution dans $\mathbb{R}$:
a. $\dfrac{3}{2}$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln(3)$ **c.** $\dfrac{3}{2}e$ **d.** $\ln(9)$
4. Le nombre -3 est solution de l'équation :
a. $\ln(x) = -\ln(3)$ **b.** $\ln(e^x) = -3$ **c.** $e^{\ln(x)} = 3$ **d.** $e^x = 3$
5. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$. La primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :
a. $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$ **b.** $F(x) = 3x$
c. $F(x) = x\ln(x) + 3$ **d.** $F(x) = x\ln(x) - x + 4$

104 On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$ dont on a représenté ci-dessous la courbe (L) dans un repère orthogonal. La courbe (L) coupe l'axe des abscisses aux points A et C. Elle passe par les points S et B d'abscisses respectives 1 et 2.



Partie A : lectures graphiques

Déterminer graphiquement :
a. $f(1)$ et $f'(1)$.
b. Les signes de $f(2)$ et $f'(2)$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;\,4]$ par $f(x) = \ln(x) - x + 2$.

SUJET BAC

1. Soit R le point de coordonnées (e ; 3 – e). Justifier que le point R appartient à la courbe (L).

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0,1 ; 4] et l'on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

b. Étudier le signe de f' sur l'intervalle [0,1 ; 4].

c. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle [0,1 ; 4].

3. On sait que l'abscisse de A, notée a, est environ égale à 0,158 et que celle de C, notée c, est environ égale à 3,146. En déduire une solution de l'énigme suivante :

« Je suis un nombre réel. Je n'ai pas le même signe que mon logarithme népérien (ln).

La différence entre moi-même et mon logarithme népérien est égale à 2. Qui suis-je ? »

105 L'association suisse Queduvent publie des informations sur l'intensité du bruit d'une éolienne, en décibels, en fonction de l'éloignement, en mètres.

On peut lire également sur le site de cette association :

Information 1 : à 300 m, l'intensité est de 45 dB.

Information 2 : l'intensité du bruit diminue de 3 dB à chaque fois que la distance double.

On considère, pour ce type d'éolienne, que l'intensité du bruit, en dB, en fonction de l'éloignement de l'éolienne, en mètres, est modélisée par la fonction définie sur [1 ; 1 200] par : $f(x) = 100 - 4{,}328\ln(1101x)$.

Les résultats seront, si nécessaire, arrondis au dixième.

1. L'information 1 de l'association est-elle correcte ? Justifier votre réponse.

2. Une étude médicale a montré, qu'à partir d'une intensité sonore régulière de plus de 40 dB, on pouvait être sujet à des troubles du sommeil.

a. Résoudre par le calcul $f(x) < 40$ sur [1 ; 1 200].

b. Déterminer à quelle distance de l'éolienne, arrondie au mètre, il faut vivre pour ne pas être exposé à ce risque.

c. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous à 10^{-1} près.

x	100	200	300	400	500	600
$f(x)$	49,8	46,8				

x	700	800	900	1 000	1 200
$f(x)$			40,2	39,8	39

d. L'information 2 de l'association vous paraît-elle correcte ? Justifier votre réponse.

106 Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par : $r(x) = 6 + x + 2\ln(x)$.

a. Montrer que $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

b. Étudier les variations de r sur l'intervalle [1 ; 5].

3. a. On admet qu'il existe une unique valeur α dans l'intervalle [1 ; 5] telle que $r(x) = 10$. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α au millième.

b. Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.

107 **1.** Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 25] par : $f(x) = \dfrac{x+2-\ln(x)}{x}$.

a. On admet que f est dérivable sur [1 ; 25]. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 25],

$f'(x) = \dfrac{-3+\ln(x)}{x^2}$.

b. Résoudre dans [1 ; 25] l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur [1 ; 25].

d. On admet que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution α sur [1 ; 25].

Déterminer un encadrement d'amplitude 0,01 de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéo-projecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

En utilisant les résultats obtenus à la question **1.** :

a. Déterminer à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.

Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

b. Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à 1,50 euro.