9 Fonction logarithme népérien

CAPACITÉS

- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer des expressions.
- Résoudre des équations et des inéquations d'inconnue x du type $e^{ax} = b$; $e^{ax} > b$; $\ln(x) = b$; $\ln(x) > b$.
- Étudier des fonctions somme, produit ou quotient de fonctions polynômes et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

La population mondiale est passée d'environ 6,1 milliards en l'an 2000 à environ 7,7 milliards en 2020.
En moyenne, de quel taux annuel a augmenté la population mondiale sur cette période ?

Autrement dit, quel est le taux d'évolution moyen annuel de la population mondiale entre 2000 et 2020 ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 191

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde ou de Première

Questions Flash

Diaporama

15 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-51

1 Calculer avec des puissances

Soit a un nombre réel non nul et m et n deux entiers relatifs.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad a^0 = 1$

2 Fonction dérivée d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3

Soit a, b, c, et d quatre réels, avec $a \neq 0$.

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$.
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

3 Fonction dérivée et opérations sur les fonctions

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée	Conditions d'application
$u+v$	$(u+v)' = u' + v'$	$u+v$ est dérivable sur I.
$u \times v$	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$	$u \times v$ est dérivable sur I.
$\dfrac{u}{v}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{u}{v}$ est dérivable là où v ne s'annule pas dans l'intervalle I.

Vérifier les acquis de Seconde ou de Première

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse sans utiliser la calculatrice puis justifier.**

	a	b	c	Aide
1. $(2^3 \times 2)^2$ est égal à :	2^6	2^8	2^5	1
2. $(e^{-x})^2$ est égal à :	e^{x^2}	e^{-x^2}	e^{-2x}	1
3. $e^3 \times e^{-3}$ est égal à :	e^{-9}	1	e^{-6}	1
4. Si $f(x) = 3x^2 - 7$, alors $f'(x)$ est égal à :	$6x$	$6x - 7$	$3x$	2
5. Si $f(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + x - 1$, alors $f'(x)$ est égal à :	$\dfrac{5}{2}x + 1$	$5x + 1$	$5x$	2
6. Si $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$, alors $f'(x)$ est égal à :	$2x^2 - 5x + 3$	$6x^2 - 10x + 7$	$6x^2 - 10x + 3$	2
7. Si $f(x) = 3x^2(2x^2 - 1)$ alors $f'(x)$ est égal à :	$24x^2$	$24x^3 - 6x$	$24x^2 - 6$	3
8. Soit $x \neq \dfrac{1}{2}$. Si $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$ alors $f'(x)$ est égal à :	$\dfrac{3}{2}$	$\dfrac{5}{(2x-1)^2}$	$\dfrac{-5}{(2x-1)^2}$	3

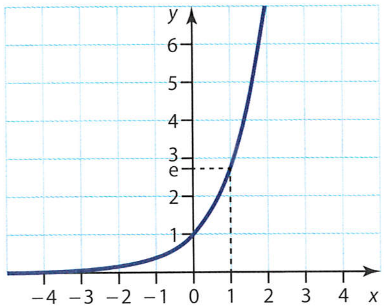
→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 De l'exponentielle à une nouvelle fonction

OBJECTIF Définir le logarithme népérien → Cours 1A p. 192

La fonction exponentielle a été étudiée dans le chapitre 8 et on y a vu qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. La courbe de la fonction exponentielle est représentée ci-contre dans un repère orthonormé.



1. Quelle est la valeur de x telle que $e^x = 1$?

2. a. En utilisant le graphique ci-contre ou la calculatrice, donner la ou les valeurs approchées de x telles que $e^x = 5$.
b. L'équation $e^x = 0$ a-t-elle des solutions ? Pourquoi ?

3. Soit a un nombre réel strictement négatif. L'équation $e^x = a$ possède-t-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?

4. Soit a un nombre réel strictement positif. Combien l'équation $e^x = a$ semble-t-elle avoir de solutions ?
On admettra **l'existence et l'unicité** de la solution à l'équation $e^x = a$ pour $a > 0$.

5. Lire graphiquement la solution approchée de l'équation $e^x = 2$.

6. En utilisant la touche $\boxed{\ln}$ (sur CASIO), taper la séquence $\boxed{\ln}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EXE}}$. Que retrouve-t-on comme valeur ?
La touche $\boxed{\ln}$ désigne une nouvelle fonction, **la fonction logarithme népérien**, notée **ln** (qui se lit L N), du nom de l'astronome et mathématicien écossais John Napier (de son vrai nom, francisé en Neper, 1550-1617).

2 Quand multiplier revient à additionner (ou presque)...

OBJECTIF Découvrir les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien et sa dérivée → Cours 2 p. 194

John Neper (ou Napier, savant écossais du XVI^e siècle) travailla notamment à simplifier les calculs en astronomie. Les mesures astronomiques étaient alors nécessaires aux navigateurs, pour leur permettre de se guider. Ces mesures impliquaient des calculs longs et fastidieux.
Neper chercha à créer un outil, sous la forme d'une table numérique à deux colonnes, permettant qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite. Voici un extrait ci-contre d'une table de ce type :
À la multiplication 2×3 correspond 1,7 918, somme des deux nombres de la colonne de droite 0,6 931 et 1,0 986.

0,5	
1	
1,5	
2	0,6 931
3	1,0 986
4	1,3 863
5	1,6 094
6	1,7 918
7	1,9 459
8	
9	2,1 972
10	2,3 026
11	2,3 979
12	2,4 849
13	2,5 649
14	2,6 391
15	
16	2,7 726
17	
18	

1. Quel nombre doit-on mettre en face de 8 ? de 15 ? de 18 ?

2. Quel nombre doit-on mettre en face de 1 ?

3. Peut-on compléter ainsi toutes les cases de la colonne de droite ?

4. Recopier et compléter la relation suivante pour a et b deux réels strictement positifs : $\ln(a \times b) = \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$.

5. Quelle relation peut-on écrire pour $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ (avec $a > 0$) ?

6. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous à l'aide de la calculatrice et de la touche $\boxed{\ln}$:

x	1	2		5	10	17	19	20	100
$\ln(x)$									

Quel semble être le sens de variation de la fonction logarithme népérien ?

3 Limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction ln

→ Mémento p. 310

OBJECTIF Découvrir les limites de la fonction logarithme népérien en 0 et en $+\infty$ → Cours 1D p. 192

La fonction ln est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Comme 0 n'a pas d'image par ln, il peut être intéressant d'observer le comportement de $\ln(x)$ quand x s'approche de 0 (nécessairement par valeurs positives, puisque la fonction ln n'est pas définie à gauche de 0).

1. Comportement de ln(x) quand x s'approche de 0

a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous après l'avoir recopié :

x	0,1	0,01	0,001	0,000 1	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-99}
$\ln(x)$												

Qu'observe-t-on sur la seconde ligne ?

b. Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction ln. Comment semble se comporter la courbe quand x se rapproche de 0 ?

c. Justifier que si $0 < x < e^{-100}$, alors $\ln(x) < -100$.

d. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\ln(x) < -1\,000$? Même question pour $\ln(x) < -10^6$.

e. Justifier que : pour tout entier naturel p, si $0 < x < e^{-10^p}$ pour tout entier naturel p, alors $\ln(x) < -10^p$.

Autrement dit : tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ où A est un réel, contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x choisi suffisamment proche de 0.

On dit que **ln(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0**. On écrit cela $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$: la limite de $\ln(x)$ en 0 est $-\infty$.

2. Comportement de ln(x) quand x tend vers $+\infty$

a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous après l'avoir recopié :

x	10	100	1 000	10 000	10^5	10^6	10^8	10^{12}	10^{15}	10^{20}	10^{50}	10^{99}
$\ln(x)$												

b. Rappeler le sens de variation de la fonction ln.

c. Soit p un entier naturel. Justifier que si $x > 10^p$, alors $\ln(x) > p\ln(10)$.

d. Soit A un réel positif quelconque. Montrer qu'il existe un réel a tel que : si $x > a$, alors $\ln(x) > A$.

Ainsi tout intervalle du type $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x suffisamment grand.

On dit que **ln(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$**. On écrit cela $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$: la limite de $\ln(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$.

4 Résoudre une équation grâce à la fonction logarithme népérien

OBJECTIF Résoudre une équation du type $\ln(x) = b$ → Cours 2 p. 194

La population mondiale est passée d'environ 6,16 milliards en l'an 2000 à environ 7,7 milliards en 2020.

1. Montrer que le taux d'évolution de la population mondiale entre 2000 et 2020 est d'environ 25 %.

2. On appelle t le taux d'évolution moyen annuel en pourcentage. Montrer que le coefficient multiplicateur global entre 2000 et 2020 est égal à $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{20}$.

3. En utilisant une propriété du logarithme népérien, montrer que l'équation $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^{20} = 1{,}25$ est équivalente à l'équation (E) : $\ln\left(1+\dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{\ln(1{,}25)}{20}$.

4. Résoudre alors l'équation (E). En déduire la valeur arrondie en pourcentage à 0,1 % près du taux moyen annuel de l'évolution de la population mondiale entre 2000 et 2020.

1 La fonction logarithme népérien

A Définition du logarithme népérien de a pour $a > 0$

DÉFINITION Pour tout nombre réel strictement positif a, on admet qu'il existe un unique nombre réel x tel que : $\mathbf{e}^x = \boldsymbol{a}$. Ce nombre est appelé **logarithme népérien de a**.

Notation

On note **ln(*a*)** le **logarithme népérien** de a.

REMARQUE • Pour tout réel $a > 0$, $\mathbf{e}^x = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \ln(\boldsymbol{a})$.

Valeurs particulières : $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

DÉFINITION La fonction qui à tout nombre $a > 0$ associe l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = a$ est appelée la **fonction logarithme népérien**. Cette fonction est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Elle est notée **ln**.

Notation

On écrira parfois **ln*a*** pour ln(*a*).

CONSÉQUENCES • Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ et pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

→ Voir **Exercice résolu 1**

B Dérivée, sens de variation

PROPRIÉTÉ **(admise)** La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La **fonction dérivée** de la fonction logarithme népérien est la fonction définie pour $x > 0$ par : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

→ Voir **Exercice résolu 2**

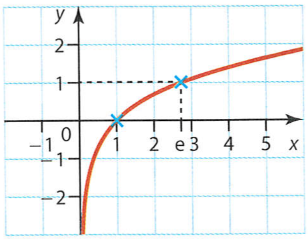
PROPRIÉTÉ **(admise)** La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

CONSÉQUENCES • Pour tous réels x et y strictement positifs : $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$, $\ln(\boldsymbol{x}) > \ln(\boldsymbol{y})$.

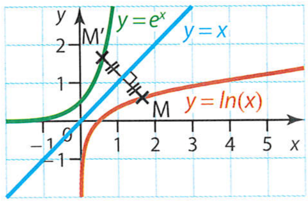
→ Voir **Exercice résolu 3**

C Courbe représentative

On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé du plan.



REMARQUE • La courbe de la fonction logarithme népérien et la courbe de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



D Limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction ln

PROPRIÉTÉS (admises)

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ ② $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Tableau de variation de la fonction ln

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice résolu 1 — Résoudre une équation du type $e^{ax} = b$ ou une inéquation du type $e^{ax} < b$

Déterminer les solutions exactes des équations suivantes et inéquations suivantes :

1. $e^{2x} = 3$

2. $e^{3x} > 3$

Méthode — Pour résoudre une équation du type $e^{ax} = b$ ou une inéquation du type $e^{ax} < b$

1 Pour **résoudre** une équation du type $e^{ax} = b$, on **utilise** l'équivalence « Pour tout réel $a > 0$, $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$ ».

2 Pour **résoudre** une inéquation du type $e^{ax} < b$, on **utilise** la croissance de la fonction ln.

Solution

1. On écrit : $e^{2x} = 3 \Leftrightarrow 2x = \ln 3$ donc $x = \dfrac{\ln 3}{2}$.

2. On écrit : $e^{3x} > 3 \Leftrightarrow 3x > \ln 3$ donc $x > \dfrac{\ln 3}{3}$.

→ Voir Exercices 29 et 30 p. 198

Exercice résolu 2 — Déterminer une fonction dérivée d'une fonction définie avec la fonction ln

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. $f(x) = -\ln(x)$

2. $f(x) = 2\ln(x)$

3. $f(x) = \ln(x) + 2x + 1$

4. $f(x) = (x^2 + x - 1)\ln(x)$

Méthode — Pour déterminer une fonction dérivée d'une fonction avec ln

1 On **identifie** le type d'opération définissant la fonction f (somme, produit, quotient ou multiplication par un réel).

2 On **applique** la formule de dérivation adaptée.

Solution

1. Ici, la fonction ln est multipliée par le réel -1 : $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$.

2. Ici, c'est par le réel 2 : $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}$.

3. On utilise la formule de dérivation d'une somme : $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

4. On utilise la formule de dérivation d'un produit : $f'(x) = (2x+1)\ln(x) + (x^2+x-1) \times \dfrac{1}{x} = (2x+1)\ln(x) + x + 1 - \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

→ Voir Exercices 38 à 41 pp. 198-199

Exercice résolu 3 — Comparer deux expressions avec le logarithme népérien

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

1. $\ln(\pi)$ et $\ln(3)$.

2. $\ln(10^{-3})$ et $\ln(10^{-4})$.

Méthode — Pour comparer deux expressions avec le logarithme népérien

1 On **compare** les deux nombres situés entre parenthèses.

2 On **utilise** la croissance de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ pour comparer les images de ces deux nombres.

Solution

1. On sait que $\pi > 3$ donc $\ln\pi > \ln 3$ puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $10^{-3} > 10^{-4}$ donc $\ln(10^{-3}) > \ln(10^{-4})$.
On conclut que $\ln(10^{-3}) > \ln(10^{-4})$.

→ Voir Exercices 50 et 52 p. 199

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

Dans ce paragraphe, a **et** b sont deux nombres réels **strictement positifs**.

Vocabulaire

Cette relation est appelée **relation fonctionnelle** de la fonction ln.

Théorème (admis) $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple • $\ln(2e) = \ln(2) + \ln(e) = \ln(2) + 1$.

Propriétés Soit n un nombre entier, on a :

$\ln(a^n) = n\ln(a)$ ① $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ ②

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ ③ $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ ④

Démonstration de la relation ① sur une valeur de n entier positif

Pour $n = 2$, $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln(a) + \ln(a)$ d'après le théorème.
D'où $\ln(a^2) = 2\ln(a)$.

Démonstration de la relation ②

On écrit que $1 = a \times \frac{1}{a}$. D'où $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$, soit $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Démonstration de la relation ③

On écrit que $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. D'où $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Démonstration de la relation ④

Comme $a > 0$, $a = (\sqrt{a})^2$. Donc : $\ln(a) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemples • $\ln(e^4) = 4\ln(e) = 4$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$; $\ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}\ln(e) = 0{,}5$.

→ Voir **Exercice résolu 4**

Propriétés (admises)

- Soit a un réel strictement positif. Pour tout nombre réel x, on a : $\ln(a^x) = x\ln(a)$.
- Pour tout réel b, et x strictement positif, $\ln(x) = b \Leftrightarrow x = e^b$.
- Pour tout réel b, et x strictement positif, $\ln(x) > b \Leftrightarrow x > e^b$.

→ Voir **Exercice résolu 5**

3 Lien avec le logarithme décimal

La fonction logarithme décimal a été étudiée dans le chapitre 4 (p. 74).
Un lien algébrique existe entre ces deux fonctions : la fonction logarithme népérien et la fonction logarithme décimale sont liées par la relation suivante :

pour tout $x > 0$, $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exemples • $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$; $\log(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} = \frac{\ln(10^2)}{\ln(10)} = \frac{2 \times \ln(10)}{\ln(10)} = 2$.

→ Voir **Exercice résolu 6**

Exercice résolu 4 — Simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales

1. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\ln(2)$:
a. $\ln(8)$ **b.** $\ln(16)$ **c.** $\ln(\sqrt{2})$
2. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\ln(a)$, où a est un nombre réel strictement positif :
a. $\ln(a^3)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{a^5}{a^2}\right)$ **c.** $\ln\left(\dfrac{1}{a^2}\right)$

Méthode — Pour simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales

1. Pour les questions **1** et **2** : on **fait apparaître** une puissance de 2 ou de 3 puis on **utilise** la formule $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
2. Pour la question **3** : on **identifie** l'opération algébrique qui figure entre parenthèses puis on **applique** les propriétés algébriques de la fonction ln.

Solution

1. a. $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$ **b.** $\ln(16) = \ln(2^4) = 4\ln(2)$ **c.** $\ln(\sqrt{2}) = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$

2. a. $\ln(a^3) = 3\ln(a)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{a^5}{a^2}\right) = \ln(a^3) = 3\ln(a)$ **c.** $\ln\left(\dfrac{1}{a^2}\right) = -\ln(a^2) = -2\ln(a)$

→ Voir **Exercices 54 à 57** pp. 199-200

Exercice résolu 5 — Résoudre une équation du type $\ln(x) = b$ ou une inéquation du type $\ln(x) > b$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
1. $\ln(x) = 1$ et $\ln(x) = -3$.
2. $\ln(x) > 0$ et $\ln(3x) > -1$.

Méthode — Pour résoudre une équation du type $\ln(x) = b$ ou une inéquation du type $\ln(x) > b$

1. On utilise l'équivalence $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$ ou bien l'équivalence $x > y \Leftrightarrow e^x > e^y$.
2. On utilise la relation $e^{\ln(x)} = x$.

Solution

1. $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^1 \Leftrightarrow x = e$;
$\ln(x) = -3 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3}$

2. $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$
$\ln(3x) > -1 \Leftrightarrow e^{\ln(3x)} > e^{-1} \Leftrightarrow 3x > \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3e}$

→ Voir **Exercices 31 et 32** p. 198

Exercice résolu 6 — Écrire le logarithme décimal d'un nombre en fonction de la fonction ln

Écrire les nombres suivants en utilisant la fonction ln.
1. $\log(2)$
2. $\log(25)$
3. $\log(9)$

Méthode

1. On **utilise** la formule $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ $(x > 0)$.
2. On **applique** les propriétés algébriques de la fonction ln.

Solution

1. $\log(2) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(10)}$ **2.** $\log(25) = \dfrac{\ln(25)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln(5^2)}{\ln(10)} = \dfrac{2\ln(5)}{\ln(10)}$ **3.** $\log(9) = \dfrac{\ln(9)}{\ln(10)} = \dfrac{2\ln(3)}{\ln(10)}$

→ Voir **Exercices 61 et 62** p. 200

L'essentiel

1 La fonction logarithme népérien

- Pour tout nombre réel strictement positif a, il existe un unique nombre réel x tel que $e^x = a$.

Ce nombre est appelé **logarithme népérien** de a. On note **ln(a)** le logarithme népérien de a.

$$e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$$

- On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe son logarithme népérien, c'est-à-dire la fonction définie par : $x \mapsto \ln(x)$.

La fonction logarithme népérien est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Pour tout nombre réel x, $\ln(e^x) = x$.

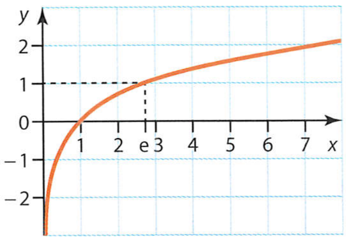
Cas particuliers : $\ln(1) = 0$ $\quad$ $\ln(e) = 1$

- **Fonction dérivée** de la fonction ln : pour tout $x > 0$, $(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$.

- La **fonction logarithme népérien** est **strictement croissante** sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs : $a \leqslant b \Leftrightarrow \ln(a) \leqslant \ln(b)$.

Dans un repère orthonormé du plan, la **courbe représentative** de la fonction logarithme népérien est donnée ci-contre.



- **Limites** en 0 et en $+\infty$ de la fonction ln : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
ln(x)	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Tableau de signes

x	0		1		$+\infty$
ln(x)	‖	−	0	+	

- **Équations du type $e^{ax} = b$ et inéquations du type $e^{ax} > b$**

Soit a un réel non nul et b un réel strictement positif.

$$e^{ax} = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln b}{a} \qquad e^{ax} > b \Leftrightarrow x > \frac{\ln b}{a} \text{ si } a > 0 \qquad e^{ax} > b \Leftrightarrow x < \frac{\ln b}{a} \text{ si } a < 0$$

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

- a et b étant deux réels strictement positifs et n un nombre entier, on a :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

- Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x : $\ln(a^x) = x\ln(a)$

- **Équations du type $\ln(x) = b$ et inéquations du type $\ln(x) > b$**

Pour tout réel b, et x strictement positif : $\ln(x) = b \Leftrightarrow x = e^b$ $\quad$ $\ln(x) > b \Leftrightarrow x > e^b$

- **Lien avec la fonction logarithme décimal notée log**

Pour tout $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$