1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-67

Découverte de la fonction exponentielle

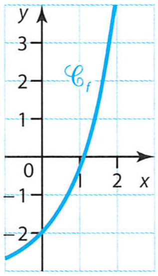
2 Soit $f(x)=-3\mathrm{e}^x$.
Donner la valeur exacte de $f(-1)$, $f(0{,}5)$ et $f(1)$.

3 Soit $f(x)=\mathrm{e}^x+2$.
1. Donner l'image de 0.
2. 0 a-t-il un antécédent par f ?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer un antécédent de 4.

4 On considère la fonction $f(x)=-4\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(-0{,}5)$ et $f(2{,}5)$.
2. Étudier le signe de f.
3. Sans calculer sa dérivée, déterminer son sens de variation.

5 Donner l'expression de la fonction f exponentielle de base e telle que $f(0)=-2$.

6 Soit la fonction $f(x)=\mathrm{e}^x-3$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.
1. Résoudre graphiquement $f(x)=3$.
2. Résoudre graphiquement $f(x)<1$ et $f(x)>0$.



Manipuler les propriétés algébriques

7 Simplifier l'expression : $\dfrac{\mathrm{e}^{1,5}}{\mathrm{e}^{-3,7}}\times\mathrm{e}^{2,3}$.

8 Simplifier : $(\mathrm{e}^{0,6})^2\times\mathrm{e}^{-0,8}\times\mathrm{e}^{-1,5}$.

9 Simplifier : $\mathrm{e}^{-2,5}\times\mathrm{e}^2\times\mathrm{e}^{1,5}\times\sqrt{\mathrm{e}}$.

10 Simplifier : $(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2$.

11 Développer : $(2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x)^2$.

Dérivée et sens de variation de fonction comportant la fonction $f(x)=\mathrm{e}^x$

12 Calculer la dérivée de $f(x)=2\mathrm{e}^x-x^2$.

13 Calculer la dérivée de $f(x)=\mathrm{e}^x-3$ et de $g(x)=\mathrm{e}^{-x}+3$.

14 Calculer la dérivée de $f(x)=-3\mathrm{e}^x-5x$.

15 Si $f'(x)=2\mathrm{e}^x+3$ est la dérivée d'une fonction f, alors déterminer le sens de variation de f.

16 Soit $f(x)=-4\mathrm{e}^x-3x$. Calculer sa dérivée et étudier son sens de variation.

17 Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x)=7\mathrm{e}^x-x$ au point d'abscisse 0.

18 Trouver une expression d'une fonction $f(x)=k\mathrm{e}^x$ décroissante sur $\mathbb{R}$ dont $f(1)=-2$.

Limites de fonctions exponentielles

19 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$.

20 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x-2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$.

21 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$.

22 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-x)(x+\mathrm{e}^x)$.

23 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x+2}$.

Étude de fonctions $f(x)=\mathrm{e}^{kx}$

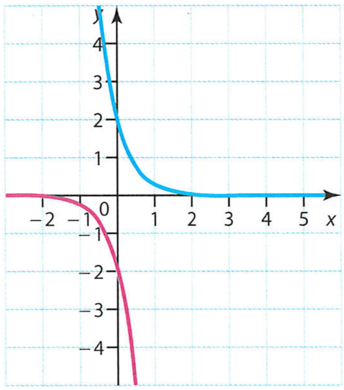
24 Calculer la dérivée de $f(x)=-2\mathrm{e}^{-3x+2}$.

25 Calculer la dérivée de $f(x)=x\mathrm{e}^{-3x}$.

26 Étudier le sens de variation de $f(x)=-4\mathrm{e}^{4x}$.

27 Donner une équation de la tangente à la courbe de $f(x)=0{,}5\mathrm{e}^{-x}$ au point d'abscisse 0.

28 On donne ci-contre les courbes des fonctions $f(x)=2\mathrm{e}^{-2x}$ et $g(x)=-2\mathrm{e}^{2x}$. Associer à chaque courbe une fonction en justifiant.



D'autres limites

29 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-2x}-x$.

30 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\right)$.

31 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x-\mathrm{e}^{-2x}$.

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Découverte de e^x

→ Aide Cours 1A p. 166

Question de cours

32 Sans utiliser la dérivée, étudier le sens de variation et le signe de $f(x) = -3{,}5e^x$.

33 Soit la suite $u_n = e^n$. Montrer que u_n est une suite géométrique puis donner son sens de variation (rappel : une suite géométrique est croissante si sa raison est supérieure à 1 et son 1er terme positif).

34 Déterminer le signe des expressions suivantes :
a. $5e^x + 3$ **b.** $-1 - e^x$ **c.** $e^x(e^x + 2)$

35 Sans utiliser la dérivée, étudier le sens de variation des fonctions suivantes :
a. $f(x) = 2e^x$ **b.** $g(x) = \dfrac{3}{e^x}$ **c.** $h(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^x$

36 Représenter la courbe de $f(x) = 2{,}5e^x$ sur l'intervalle $[-2 ; 5]$ et résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
a. $f(x) = 0$ **b.** $f(x) = 2$ **c.** $f(x) > 2{,}5$ **d.** $f(x) < 4$

37 Soit la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{2}e^x$.
a. Calculer les images de 0 et -1.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un antécédent de -3 à 10^{-3} près.
c. Étudier son sens de variation.

38 Montrer que 2 n'a pas d'antécédent par la fonction $f(x) = -3 \times e^x$.

39 ALGO PYTHON **Modifier un programme**
On considère le programme ci-contre écrit en langage Python.

```
from math import*
def resol(k):
    x=-10
    while (2*(exp(x)<k)):
        x=x+0.1
    return x
```

1. Que fait ce programme quand on tape resol(3), resol(−1) ?
2. Modifier ce programme afin qu'il puisse résoudre l'équation $2e^x = 0{,}5$. En déduire la solution de cette équation.

QCM

40 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
1. Si $f(x) = e^x$ alors $f(-1) =$
a. 0,36 **b.** $-e$ **c.** $\dfrac{1}{e}$
2. Si $f(x) = -2e^x$ alors $f(0{,}5)$ est :
a. positive **b.** $= -1{,}6$ **c.** $= -2\sqrt{e}$
3. La solution de l'équation $\dfrac{3}{2}e^x = 1$ est :
a. 0,4 **b.** $\approx -0{,}405$ **c.** $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

Vrai ou faux

41 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*
1. La fonction $f(x) = 2e^{-x}$ est positive sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f(x) = -2e^x$ alors $f(5) < f(4)$.
3. L'équation $e^x = -1$ n'admet pas de solution.

Propriétés algébriques

→ Aide Cours 1B p. 166

Question de cours

42 Montrer que : $\dfrac{e^{2,5} \times e^{-1,5}}{(e^{-3,5})^{-1,5}} = e^{-4,25}$.

43 Simplifier :
a. $e^{3,4} \times e^{0,5}$ **b.** $e^{1,5} \times e^{1,5}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 167

44 Simplifier :
a. $(e^{1,5})^{7,5}$ **b.** $(e^{1,3})^3$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 167

45 Simplifier : $e^{4,5} \times e \times e^{-2,2}$.

46 Simplifier : $e^{2,2} \times 2^{2,2} \times 0{,}5^{2,2}$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 167

47 Simplifier : $\dfrac{e^{2,5} \times e}{e^{-4,8} \times e^7}$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 167

48 Montrer que : $e^{-1,2} \times \sqrt{e} = e^{-0,7}$.

49 Calculer, à l'aide de la calculatrice, $(e^{-7,2})^{2,7}$. Donner le résultat à 10^{-3} près.

50 Simplifier : $e^{1,8} \times (2e^{-1,5})^2$.

51 Simplifier $\left(\left(\dfrac{9}{4}e\right)^3 \times e^{-1,5}\right)^{-1}$ et $\dfrac{e^{4,5}}{\sqrt{e^{2,5}}}$.

52 Simplifier les expressions suivantes :
$A = e^{-3} \times (e^{-5})^{-2}$ $B = \dfrac{e^3 \times e^{-4}}{e^5}$
$C = (e^3)^{-2,1} \times e^{6,2}$ $D = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \times e^{\frac{2}{3}} \times e$

53 Si $f(x) = 2e^x$, simplifier le calcul suivant : $f(1) \times f(-2{,}5) \times f(3)$.

54 Développer l'expression : $\dfrac{1}{2}(e^x - 1)(2e^x + 1)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 167

55 Montrer que :
$$\left(\frac{e^{1+0,25x}}{e^{1-0,25x}}\right)^2 = e^x.$$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 167

QCM

56 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. $\dfrac{e^{x-1}\times e^2 \times e^{-x}}{e^{x+1}}$ est égal à :

a. e^x **b.** e^{-x} **c.** 1

2. $(e^{1,2})\times\dfrac{3e}{e^{-2,5}}$ est égal à :

a. $3e^{-3,2}$ **b.** $3e^{-2,3}$ **c.** $3e^{2,3}$

3. Si $f(x)=-1,5e^x$ alors $f(0,5)\times f(-1,5)$ est égal à :

a. $-1,5e^{-1}$ **b.** $\dfrac{2,25}{e}$ **c.** $-2,25e$

Vrai ou faux

57 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. $(\sqrt{e})^3 = e^{3,5}$

2. $(e^{2x+3})^2 = e^{4x+9}$

3. $e^{2,7}+e^{1,3}=e^{4}$

Dérivée et sens de variation

→ Aide **Cours 2A** p. 168

Question de cours

58 Soit la fonction $f(x)=3e^x+2x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer sa dérivée et donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

Dans les exercices 63 à 66, calculer la dérivée des fonctions données.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 169

59 **a.** $f(x)=-2e^x+2x^2-2$

b. $g(x)=\dfrac{e^x}{2}+2e^x-2e$

c. $h(x)=4e^x(2e-1)$

60 **a.** $f(x)=2xe^x$

b. $g(x)=e^x(3-x)$

c. $h(x)=(e^x+1)(e^x-1)$

61 **a.** $f(x)=2\dfrac{e^x}{x}$ **b.** $g(x)=\dfrac{2x}{e^x}$ **c.** $h(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x}$

62 **a.** $f(x)=5\dfrac{e^x}{e^x+1}$ **b.** $h(x)=\dfrac{2e}{e^x+2}$

63 Calculer la dérivée, étudier le signe puis déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

a. $f(x)=2e^x+3x-1$ **b.** $g(x)=2e-2e^x$

64 Calculer la dérivée puis déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

a. $f(x)=xe^x$ **b.** $g(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ **c.** $h(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$

65 Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x)=e^x(x-1)$ au point d'abscisse 1.

66 Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.
Dresser son tableau de variation sur $[-1,5\,;1,5]$ en justifiant.

2. Pourquoi 0 n'a-t-il pas d'antécédent par f ?

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 169

67 Voici le tableau de variation d'une fonction $f(x)=e^x(ax+b)$. Déterminer les valeurs de a et b.
Compléter alors l'image de $1\,;-1\,;-0,5$ et $3,5$.

x	-1	$-0,5$	0	1	$3,5$
$f(x)$			-1		

Coup de pouce

• $f'(0,5)=0$ et $f(0)=-1$!

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 169

QCM

68 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. La fonction $f(x)=e^{-x}$ est :

a. croissante. **b.** décroissante. **c.** négative.

2. La fonction $f(x)=-3e^x$ est :

a. croissante. **b.** décroissante.

c. croissante puis décroissante.

3. La fonction $f(x)=e^x-2$ est sur $\mathbb{R}$:

a. croissante. **b.** décroissante. **c.** positive.

Vrai ou faux

69 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. $f(x)=-2,1e^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Toute fonction exponentielle est croissante.

3. La fonction $f(x)=\dfrac{2}{3}\times e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Limites en $-\infty$ et $+\infty$

→ Aide Cours 3 p. 170

Question de cours

70 Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(1-e^x)$.

71 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-e^x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x+1+x$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\left(1-\dfrac{2}{e^x}\right)$

→ Voir Exercice résolu 5 p. 171

72 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}(1-e^x)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1-x$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+2)(e^x-3)$

→ Voir Exercice résolu 5 p. 171

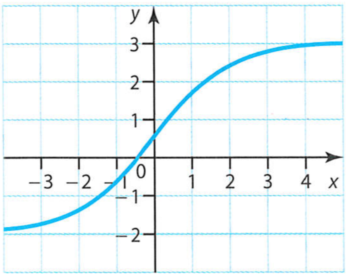
73 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{e^{-x}}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{e^{-x}}+\dfrac{e^{-x}}{3}$

74 On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.
Déterminer graphiquement les limites de cette fonction en $+\infty$ et en $-\infty$.



Vrai ou faux

75 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1+e^{-x})=+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-x}-3)(e^x)+4=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x-1}=0$

QCM

76 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(1-e^x)=$

a. 1 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}-x=$

a. $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0

→ Voir Exercice résolu 4 p. 169

Étude des fonctions $f(x)=e^{kx}$

→ Aide Cours 4 p. 170

Question de cours

77 Soit la fonction $f(x)=-2e^{3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer sa dérivée et donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

78 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=2xe^{2x}$ **b.** $g(x)=-3xe^{5x}$

c. $h(x)=-0{,}5xe^{-4x}$ **d.** $k(x)=2xe^{2x}$

→ Voir Exercice résolu 6 p. 171

79 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=-2e^{2x}+2x^2-2$ **b.** $g(x)=\dfrac{e^{-3x}}{2}+4e^{0{,}5x}-2e$

c. $f(x)=4e^{-x}(2e-1)$

→ Voir Exercice résolu 6 p. 171

80 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=2e^2(e^x-2)$

b. $g(x)=e^{-x}(3-x)$

c. $h(x)=(e^{2x}+1)(e^{-2x}-1)$

81 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=2\dfrac{e^{-2x}}{x}$

b. $g(x)=\dfrac{2x}{e^{2x}}$

c. $h(x)=\dfrac{e^{3x}+2}{e^{-x}}$

→ Voir Exercice résolu 6 p. 171

82 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x)=5\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}+1}$ **b.** $h(x)=\dfrac{2e}{e^{-3x}+2}$

→ Voir Exercice résolu 6 p. 171

83 Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée puis déterminer le sens de variation :

a. $f(x)=2e^{5x}+3x-1$ **b.** $g(x)=2e-2e^{-4x}$

84 Calculer la dérivée puis déterminer le sens de variation sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

a. $f(x) = xe^{0,25x}$ **b.** $g(x) = \dfrac{1}{e^{-x}+1}$

c. $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x+2}$

85 Déterminer une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = e^{-3x}(x+1)$ au point d'abscisse 0.

86 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner le sens de variation aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

2. Pourquoi 0 n'a-t-il pas d'antécédent par f ?

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

QCM

87 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. La fonction $f(x) = e^{-2x}$ est :

a. croissante. **b.** décroissante. **c.** négative.

2. La fonction $f(x) = -3e^{3x}$ est :

a. croissante. **b.** décroissante.

c. croissante puis décroissante.

3. La fonction $f(x) = e^{-3x} - 3$ est sur $\mathbb{R}$:

a. croissante. **b.** décroissante. **c.** positive.

Vrai ou faux

88 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. $f(x) = -2{,}1e^{-2{,}1x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Toute fonction exponentielle du type $f(x) = e^{kx}$ où k réel est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction $f(x) = \dfrac{2}{3} \times \left(e^{\frac{-3x}{2}}\right)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Croissances comparées

→ Aide Cours 4 p. 170

Question de cours

89 Soit la fonction $f(x) = 3e^x - 2x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

90 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - 2x + 3$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} - 2x$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} + 2x$

→ Voir Exercice résolu 7 p. 171

91 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x}(x+2)$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + x)(e^{2x} + 2x)$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{2x} + 2x$

→ Voir Exercice résolu 7 p. 171

92 Calculer les limites suivantes :

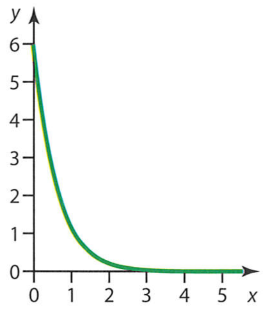
a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^{2x}}{2x}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{x}{e^x}$

c. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{3x}}{3}$

→ Voir Exercice résolu 7 p. 171

93 On donne ci-après la courbe représentative de la fonction $f(x) = 3e^{-2x}(x+2)$.



Déterminer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$. Vérifier par le calcul celle en $-\infty$.

QCM

94 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} - x + 3$ est égale à :

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(-x+3)$ est égale à :

a. 0 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}}{x+1}$ est égale à :

a. 0 **b.** $-\infty$ **c.** $+\infty$

Vrai ou faux

95 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty$.

3. La fonction $f(x) = \dfrac{2}{3} \times x(e^x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Fonctions exponentielles

96 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-2)e^x$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que $f'(x) = (3x+1)e^x$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec les axes du repère (O ; I, J).

5. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

97 Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

3. En déduire le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

4. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

98 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 2 + e^x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

99 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$ avec a et b réels.

1. a. Exprimer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ en fonction de a et de b pour tout réel x.

b. Déterminer les réels a et b tels que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = (2x+3)e^x$.

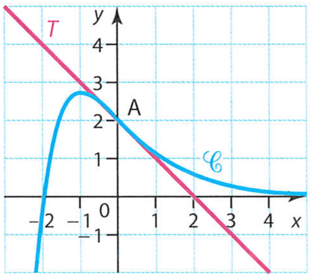
b. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Coup de pouce

- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

c. Donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

100 On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A(0 ; 2).



1. Par lecture graphique :

a. Donner $f'(0)$, $f'(-1)$.

b. Donner une équation de T.

c. Résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $f'(x) > 0$.

d. Donner $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. On suppose que, pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{-x-1}{e^x}$.

b. Étudier le signe de la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Coup de pouce

- Montrer que $f(x) = \dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}}$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

101 ALGO PYTHON **Modifier un programme**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 2$.
On cherche à approcher les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dont on ne connaît pas de solution explicite.

1. a. Calculer $f(-2)$ et $f(2)$.

b. Donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

c. En déduire que f admet exactement deux solutions de signes contraires. Préciser un encadrement de ces solutions.

2. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour $x \in [0 ; 2]$.

a. Voici un programme qui détermine une valeur approchée de cette équation à 0,1 près.

```python
from math import*
def f(x):
    return exp(x)-2-x
a=0
b=2
while b-a>0.1:
    if f(a)*f((a+b)/2)<0:
        b=(a+b)/2
    else:
        a=(a+b)/2
print ("une valeur approchée de f(x)= 0", (a+b)/2)
```

Faire tourner ce programme à la main puis reproduire et compléter le tableau suivant :

	a	b	$b-a>0{,}1$	$\dfrac{a+b}{2}$	$f\left(\dfrac{a+2}{2}\right)\times f(a)$
Étape 1	0	2	oui	1	0,28
Étape 2	1	2	oui	1.5	–0,28
Étape 3	1	1,5			
Étape 4					
Étape 5					
Étape 6					

b. Modifier le programme afin de donner une solution de $f(x) = 0$ approchée à 10^{-5} près.

Coup de pouce

- En langage Python, a^n s'obtient grâce à la syntaxe a**n.

c. Modifier une dernière fois le programme afin de déterminer la solution négative de l'équation $f(x) = 0$. On donnera une valeur approchée à 10^{-5} près.

Fonction $f(x) = e^{kx}$

102 Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2e^{2x} - 5e^{x} + 2.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a. Montrer que, pour tout réel x positif, $f'(x) = e^{x}(4\,e^{x} - 5)$.

b. Étudier le signe de f' sur $[0\,;+\infty[$.

3. Donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

103 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{cx} \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ réels.}$$

1. Montrer que $f'(x) = e^{cx}(cax + a + cb)$.

2. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(1) = 0$ et $f'(0) = 10$.
Trouver, dans ces conditions, les réels a, b et c.

3. On admet que $f(x) = 10\,xe^{-x}$.

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Donner le sens de variation de f aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

104 On estime que les recettes cumulées (en milliers d'euros) procurées par l'exploitation de taxis à Barcelone sont données à l'instant t en années par :

$$R(t) = 750 + 150t - 750e^{0,1t} \text{ sur } [0\,;10].$$

1. Calculer $R'(t)$ puis étudier son signe sur $[0\,;10]$.

2. Donner le sens de variation de R aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

105 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{20}{1+2e^{-0,3x}}.$$

1. Calculer $f(0)$ et la limite en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$.

3. Donner le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

106 **Partie A**

Soit la fonction $f(x) = e^{x} + x + 2$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

1. Calculer la dérivée de f.

2. Déterminer l'image de 0 et sa limite en $+\infty$.

3. Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

4. En déduire le signe de f.

Partie B

Soit la fonction $g(x) = x - \dfrac{3+x}{e^{x}}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = e^{-x}f(x)$.

2. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe de g.

Vrai ou faux

107 Soit la fonction $f(x) = 2x - 3e^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. La tangente au point d'abscisse 0 passe par le point $(0,6\,;0)$.

4. $f(x) > -3$ pour tout réel $x > 0$.

108 **À chacun sa série** STL

On appelle « alcoolémie » le taux d'alcool dans le sang mesuré en $g{\cdot}L^{-1}$. On modélise l'alcoolémie en fonction du temps t, en heure, écoulé depuis l'absorption d'alcool par $A(t) = te^{-0,6t+0,4}$.

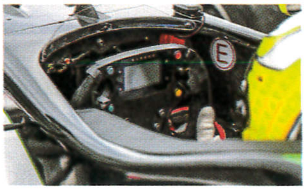
1. Calculer l'alcoolémie au bout de 1 h 30 et au bout de 3 h 20 après absorption.

2. Donner le sens de variation de A sur $[0\,;+\infty[$.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps après absorption d'alcool, l'alcoolémie sera inférieure à $0,5\ g{\cdot}L^{-1}$.

109 **À chacun sa série** STI2D

Au moment de l'arrêt d'un moteur d'une Formule 1, la température de l'huile en °C après t minutes de refroidissement est donnée par $T(t) = 15 + 120e^{-0,12t}$.



1. Donner la température après 2 minutes de refroidissement.

2. Donner le sens de variation de T sur $[0\,;+\infty[$.

3. Calculer la limite en $+\infty$.

4. Les mécaniciens peuvent manipuler le moteur lorsque la température est inférieure à 30 °C.
Compléter ce programme python afin de répondre aux mécaniciens.

```
def résol(t):
    t=0
    While (      ):
        t=t+0.1
        return(    )
```

Exercices

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-68

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
110 La fonction $f(x) = -2e^x$ est croissante et positive sur $\mathbb{R}$.		
111 Une équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = (2e^x - 1)(e^x + 1)$ au point d'abscisse 0 est $y = 2x - 1$.		
112 $\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - 1)(e - 1) = 1 - e$.		
113 La dérivée de la fonction $f(x) = 2e^x - 2e^{-x}$ est $f'(x) = f(x)$.		
114 La fonction $f(x) = -2e^{-3x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.		
115 La dérivée de $f(x) = xe^{-2x}$ est $f'(x) = 2e^{-2x}$.		
116 $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1)(e^{3x}) = +\infty$.		
117 La fonction $f(x) = -4e^{-0,3x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.		
118 Une fonction $f(x) = ke^{-kx}$ est toujours décroissante pour tout réel k.		
119 $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x+1}(1 - x) = 0$.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

120 L'image de 0 par la fonction $f(x) = (2e^x - 1)(e^x + 1)$ est :

a. 2 **b.** 1 **c.** -1

121 La dérivée de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{2e^x}$ est :

a. $f'(x) = \dfrac{(2+x)e^x}{(2e^x)}$ **b.** $f(x) = \dfrac{(1-x)e^{-x}}{2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{1+x}{(2e^x)^2}$

122 Pour tout réel x, $(e^{3x})^2 \times e^{6x}$ est égal à :

a. $f(x) = e^{9x}$ **b.** $f(x) = e^{12x}$ **c.** $f(x) = e^{36x}$

123 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4{,}2e^{0,1x}$, on peut affirmer que :

a. f est décroissante sur $[0\,;1]$. **b.** f est croissante sur $\mathbb{R}$. **c.** f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

124 La limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = -5e^{-0,5x}(e - 1)$ est :

a. 0 **b.** $+\infty$ **c.** $-\infty$

125 Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de $f(x) = e^{-3x}$ est :

a. $y = -3x + 1$ **b.** $y = x + 1$ **c.** $y = -3x - 1$

126 Dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-4x+2} = e$ admet pour solution :

a. -1 **b.** 0,25 **c.** 0,5

→ Vérifier les résultats p. 324

127 **In English**

An egg is dropped into the water.
As the egg cooks, its temperature T, in degrés Celsius, t minutes after it enters the water, is given by:

$$T(t) = 400e^{-0{,}05t} + 25.$$

1. Find the temperature of the egg as it enters the water.
2. Find t for which $T = 400$.
3. Derivative T and give the sens of variation to T.

128 PYTHON **COMPÉTENCE** **Modéliser**

Le nombre d'immatriculations de voitures électriques en France depuis 2010 est modélisé par la fonction $f(t) = 10e^{\frac{1}{3}t}$ en milliers de véhicules et t désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010.

1. Donner le nombre de voitures électriques immatriculées de 2010 à 2014 inclus.
2. Donner le sens de variation de f.
3. Donner le pourcentage d'augmentation entre 2018 et 2019 du nombre de voitures immatriculées.
4. Faire tourner le programme Python ci-dessous afin de connaître l'année à partir de laquelle le nombre de véhicules électriques immatriculés dépassera 40 000 en France.

```
def résol(k):
    x=10
    While ((10*exp((1/3)*x)<k):
        x=x+1
        return(x)
```

129 **COMPÉTENCE** **Calculer**

Un incendie se déclenche dans une forêt du sud de la France.
La surface brûlée, en hectares, au bout de t jours où $t \in [0\,;7]$, est donnée par :

$$G(t) = 10 - \frac{10}{e^{\frac{t}{4}}}.$$

1. Quelle est la surface brûlée au bout de deux jours ? Au bout d'une semaine ?
2. Au bout de combien de jours dix hectares auront-ils été brûlés ?
3. Calculer la limite de G en $+\infty$. Interpréter le résultat.

130 **COMPÉTENCE** **Calculer, Communiquer**

On admet que la charge q d'un condensateur est donnée en fonction du temps t en secondes par $q(t) = 6 - 6e^{-0{,}2t}$.
La fonction q est définie sur l'intervalle $I = [0\,;+\infty[$.

1. Montrer que q est strictement croissante sur I. Interpréter le résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ et interpréter le résultat.
3. Résoudre $q(t) > 5{,}5$. Interpréter le résultat.

131 **COMPÉTENCE** **Modéliser**

La température T, en degrés Celsius, d'une réaction chimique à l'instant t est donnée par $T(t) = (20t + 10)e^{-0{,}5t}$.

1. Donner l'ensemble de définition I de cette fonction.
2. Donner la température initiale.
3. Calculer $T'(t)$ et étudier son signe sur l'intervalle I.
4. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t)$.
5. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, résoudre l'équation $T(t) = 10$. Au bout de combien de temps la température redescend-elle à sa valeur initiale ?

132 **COMPÉTENCE** **Modéliser, calculer**

Sur la côte picarde, deux biologistes étudient la croissance en grammes d'un goéland en fonction du temps t en jours.

Le biologiste 1 modélise cette croissance par $C_1(t) = 97{,}4e^{0{,}084t}$.
Le biologiste 2 modélise cette croissance par :

$$C_2(t) = \frac{992}{1 + 12{,}3e^{-0{,}155t}}.$$

1. Calculer les dérivées de C_1 et C_2 puis donner leur sens de variation sur $I = [0\,;+\infty[$.
2. Calculer leurs limites en $+\infty$. Interpréter les résultats.
3. On suppose qu'au bout de 40 jours, un goéland pèse 1 kg. Quel est le modèle qui se rapproche le plus de cette mesure expérimentale ?

133 **COMPÉTENCE** **Modéliser, calculer**

Une entreprise du Vimeu (Picardie Maritime) fabrique chaque mois x tonnes de robinets où $x \in\,]0\,;10]$. Le coût moyen de fabrication, en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = \frac{0{,}01e^{x} + 2}{x}.$$

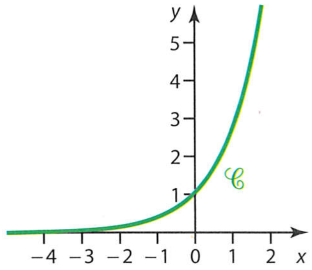
À l'aide d'un logiciel de calcul formel :

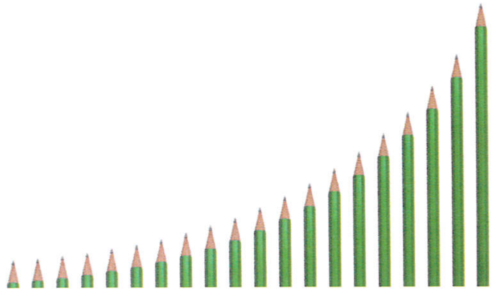
1. Donner le coût moyen de fabrication pour 500 kg de robinets.
2. Est-il possible d'atteindre un coût moyen de 4 000 euros ?
3. Pour tout x appartenant à $]0\,;10]$, donner la dérivée de C et résoudre $C'(x) > 0$.
4. Donner le sens de variation de C aux bornes de son ensemble de définition en justifiant.

S'approcher de e !

CAPACITÉ Approcher le réel e graphiquement et par une suite.

1. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.
On sait que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.





a. Soit A_n le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse nh pour h réel. Quelles sont les coordonnées de A_n ?
b. Donner les coordonnées de A_0 et A_1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en A_0. Tracer cette tangente.
2. Ne connaissant pas $f(1)$, on approche A_1 par le point B_1 d'abscisse 1 de la tangente en A_0.
a. Vérifier que B_1 a pour coordonnées$(h\,;1 + h)$.
On suppose que h devenant de plus en plus petit, A_1 et B_1 ont les mêmes coordonnées.
b. De même, on peut approcher le point A_2 par le point B_2.
Montrer que B_2 a pour coordonnées $(2h\,;(1 + h)^2)$.
c. Et ainsi de suite, donc le point A_n peut être approché par le point B_n.
Donner les coordonnées de B_n.
3. D'après les questions précédentes, on peut approcher e^{nh} par le réel $(1 + h)^n$ où h est un réel très petit.
Si $h = \frac{1}{n}$, de quelle suite le nombre e est-il la limite ?

PYTHON TABLEUR En salle informatique lienmini.fr/10445-69

1. a. Expliquer pourquoi le programme donné ci-dessous permet d'approcher le réel e.

```
def exp(n):
    return(1+1/n)**n
```

b. Le faire tourner pour $n = 100$, $n = 2\,000$ et $n = 50\,000$.

2. a. En utilisant un tableur, observer les termes de la suite $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
b. Conjecturer sur la limite de la suite u_n que l'on note e.
c. Donner une valeur approchée de e et comparer avec les valeurs affichées par le programme Python.

Sujet résolu BAC

134 Après administration d'un médicament, on modélise la concentration (en mg·L^{-1}) de son principe actif dans le sang par une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = 15e^{-0,2t}$, où t est le temps en heure après l'injection.

1. Déterminer la concentration initiale.

2. Déterminer la concentration au bout de deux heures.

3. Étudier le sens de variation de f en justifiant.

4. Calculer la limite de f en $+\infty$.

5. Estimer à l'aide de votre calculatrice au bout de combien de temps la concentration sera inférieure à 0,01 mg·L^{-1}.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. La concentration initiale correspond à $t = 0$. On calcule donc l'image de 0 par f.	**1.** $f(0) = 15e^{-0,2\times 0} = 15e^{0} = 15$ mg·L^{-1}.
2. La concentration au bout de 2 heures correspond à $t = 2$. On calcule donc l'image de 2 par f.	**2.** $f(2) = 15e^{-0,4} = 10,054$ mg·L^{-1}.
3. Pour connaître le sens de variation de f, on calcule sa dérivée puis on étudie son signe.	**3.** $f'(x) = -0,2 \times 15e^{-0,2t} = -\,3e^{-0,2t}$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
4. f est de la forme ae^{kx} avec $a = 15$ et $k = -0,2$. $k < 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = 0$. → Voir Exercice résolu 7 p. 171	**4.** $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = 0$.
5. On utilise le menu **TABLE** de la calculatrice.	**5.** Au bout de 36,56 min la concentration sera inférieur à 0,01 mg·L^{-1}.

135 Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants, en centimètres, peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{120}{5e^{-0,08t}+1}$ où t est le temps en jours après le jour de plantation.

1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Comment cela se traduit-il pour la croissance d'un plant ?

3. Calculer la dérivée f' de f.

4. Étudier le signe de f' sur $[0\,;+\infty[$et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. La plantation initiale correspond à $t = 0$. On calcule donc l'image de 0 par f.	**1.** $f(0) = \dfrac{120}{5e^{-0,08\times 0}+1} = \dfrac{120}{5e^{0}+1} = 20$ cm.
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,08t} = 0$. On traduit le résultat.	**2.** $\lim\limits_{t\to+\infty} 5e^{-0,08t}+1 = 1$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 120$. À long terme, le plant ne dépassera pas 120 cm.
3. La dérivée de $\dfrac{120}{U}$ est $\dfrac{-120\times U'}{U^2}$.	**3.** On calcule $f'(x)$: $f'(x) = \dfrac{-120\times(5\times -0,08)e^{-0,08t}}{(5e^{-0,08t}+1)^2} = \dfrac{48e^{-0,08t}}{(5e^{-0,08t}+1)^2}$
4. $e^{x} > 0$ pour tout réel x.	**4.** $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Sujet guidé BAC

136 CAPACITÉ PYTHON

- Modéliser par une fonction $f(x) = e^{kx}$.

Wetube est un site spécialisé dans la diffusion de vidéos sur Internet. La durée de chargement d'une vidéo, en secondes, en fonction du nombre d'internautes connectés (c), en milliers, est modélisée par la fonction f définie sur $[1\,;10]$ par :

$$f(c) = 0{,}25\ e^{0{,}4c}.$$

1. Quelle est la durée de chargement si 1 000 internautes sont connectés ?
Et 5 000 internautes ?

Méthode Il s'agit de calculer des images par f.

2. Calculer $f(8)$ et interpréter le résultat.
3. Étudier le sens de variation de f et interpréter le résultat.

Méthode Calculer la dérivée de f.

→ Voir Exercice résolu 6 p. 171

4. À l'aide de la calculatrice, estimer à partir de combien de personnes connectées la durée de chargement dépassera 3 secondes.
5. Compléter ce programme Python pour répondre à la question **3.**

```
def resol(t):
    t=1
    While(   ):
        t=t+0.1
        return t
```

137 CAPACITÉ PYTHON

- Modéliser une situation par une fonction exponentielle.

1. L'évolution du nombre d'adhérents, en milliers, d'un réseau social t semaines après sa création est modélisée par la fonction :

$$f(t) = 2e^{0{,}05t} + 0{,}1t - 2.$$

a. Quel est le nombre d'adhérents au bout de 7 jours ?
b. Quel est le nombre d'adhérents au bout de 1 an ? (52 semaines).
c. Étudier le sens de variation de f.

Méthode Calculer la dérivée et étudier son signe.

2. Soit le programme Python suivant :

```
from math import*
t=0
f=2*exp(0.05*t)+0.1*t-2
while f<10**6:
    t=t+1
    f=2*exp(0.05*t)+0.1*t-2
    print(t)
```

a. Quelle valeur renvoie ce programme ?
En donner une interprétation concrète.
b. Le modifier pour qu'il indique quand le nombre d'adhérents aura dépassé 2 milliards.

138 CAPACITÉS

- Calculer, chercher.

On injecte à un adulte un médicament. La concentration de celui-ci dans le sang, en $g{\cdot}L^{-1}$, est modélisée par la fonction $f(t) = (t+2)e^{-0{,}5t}$ où t est le temps écoulé depuis l'injection pendant 24 heures.

1. Déterminer la concentration initiale et la concentration au bout d'un jour.

Méthode Calculer l'image de 0 par f et $f(24)$.

2. Montrer que la dérivée de f est $f'(x) = -0{,}5te^{-0{,}5t}$.

Méthode Utiliser la dérivée du produit uv.

3. Étudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f sur $[0\,;24]$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, pendant combien de temps le médicament est actif (le médicament est actif si $f(t) > 0{,}1$).

Méthode Utiliser le menu **TABLE** de la calculatrice.

139 CAPACITÉS

- Modéliser, calculer, chercher.

Un condensateur de capacité $C = 0{,}002$ farad se décharge. Sa tension U en fonction du temps t secondes est donnée par $U(t) = 10\dfrac{-t}{e^{40}}$ en volts.

1. Quelle est la tension au bout de 10 secondes ?
2. Étudier le sens de variation de U et interpréter ce résultat.

Méthode Calculer la dérivée de U et en déduire le sens de variation puis contextualiser le résultat.

3. Au bout de combien de temps le condensateur sera-t-il à moitié déchargé ?

SUJET BAC

140 PYTHON Une espèce animale est menacée. Le nombre d'animaux, en millions, est donné par la fonction $f(x) = 35e^{-0,05x}$ où x est le temps en années écoulé depuis 1950.

1. Calculer $f(0)$ et $f(50)$. Interpréter concrètement ces résultats.

2. Calculer le pourcentage de diminution de cette espèce en 50 ans puis le taux annuel moyen de baisse en 50 ans.

3. Pourquoi peut-on dire que cette espèce est menacée ? Va-t-elle disparaître complètement ? Justifier.

4. À l'aide de la calculatrice, résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ et interpréter le résultat

5. Compléter cet algorithme en langage Python qui permet de répondre à la question **4.**

```
from math import*
def resol(k):
    t=0
    while (                ):
        t=t+1
    return(t)
```

141 Le nombre, en milliards, de photos numériques envoyées par les Français peut être modélisé par la fonction $s(t) = 3,3e^{\frac{t}{3}}$ où t est le nombre d'années écoulées depuis 2005.

1. Calculer le nombre de photos envoyées en 1 an.

2. Calculer $\dfrac{s(t+1)}{s(t)}$. En déduire le taux annuel d'augmentation du nombre de photos envoyées.

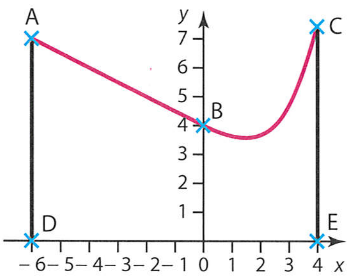
3. Répondre aux affirmations suivantes par vrai ou faux en justifiant :

a. 200 milliards de photos a été atteinte en 2019.

b. Le taux d'augmentation en 10 ans est de 235 %.

c. Le taux annuel moyen sur 10 ans est de 23,5 %.

142 L'organisateur d'une compétition de skateboard souhaite construire une piste dont le profil dans un plan est schématisé ci-dessous dans un repère orthonormal, en convenant qu'une unité dans le repère correspond à 1 mètre.



Sur ce profil, on considère que :

• la piste entre les points A et B est rectiligne, elle est donc modélisée par un segment ;

• la piste entre les points B et C est modélisée par la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = 2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 2\right)e^{\frac{x}{4}}.$$

Partie A : Modélisation de la piste

Dans le repère, les coordonnées des points A et B sont respectivement $A(-6 ; 7)$ et $B(0 ; 4)$.

1. Détermination graphique d'une équation de la droite (AB)

La droite (AB) a une équation du type $y = ax + b$, où a et b sont des réels que l'on va déterminer dans cette question.

a. À partir des données de l'énoncé, donner la valeur de b.

b. En utilisant les coordonnées du point A, déterminer la valeur du nombre a.

2. Raccordement de la droite (AB) avec la courbe représentative de la fonction f

On note f' la dérivée de f et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère.

a. Démontrer que pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{16}x^2 + (4x - 8)e^{\frac{x}{4}}.$$

b. Vérifier que le point B est situé sur la courbe $\mathscr{C}_f$ puis que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

Partie B : Étude de la fonction f

Étude des variations et du signe de la fonction f

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x - 8 = 0$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.

3. Donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 4]$, $f(x) > 3,5$.

143 **Partie A : Exploitation d'informations graphiques**

On considère la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = ax + b + e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels que l'on va déterminer dans cette partie.

On donne les renseignements graphiques suivants sur la courbe représentative de la fonction g dans un repère d'axes (Ox) et (Oy) :

– le point A de coordonnées $(0 ; 4)$ appartient à cette courbe représentative ;

– la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. À partir des renseignements précédents, donner la valeur de $g(0)$ ainsi que celle du nombre dérivé $g'(0)$.

2. Déterminer la valeur du nombre b en utilisant la question **1.**

3. Pour tout réel x, calculer $g'(x)$ en fonction de a. En déduire la valeur du nombre a.

SUJET BAC

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x + 3 + e^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. a. Pour tout réel x, démontrer l'égalité :

$$f(x) = e^{-x}(1 + xe^{x} + 3e^{x}).$$

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout réel x, démontrer que $f'(x) = 1 - e^{-x}$, puis étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

144 Lors d'un usinage, la partie active d'un outil, en mouvement relatif par rapport à la pièce travaillée et aux copeaux que l'on désire produire, est soumise à des sollicitations mécaniques et thermiques très importantes. On usine ici des barres cylindriques (en alliage d'aluminium). Le volume V, exprimé en centimètres cubes, de copeaux obtenus avant la mort de l'outil, est modélisé par la relation : $V = 36\,000\left(e^{-0{,}002v} - e^{-0{,}004v}\right)$ où v désigne la vitesse de coupe, exprimée en mètres par minute ($m{\cdot}min^{-1}$). Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer la vitesse de coupe conduisant à une production maximale de copeaux avant la mort de l'outil.

1. Calculs préliminaires

a. Calculer le volume, en cm^3, de copeaux obtenus avant la mort de l'outil lorsque la vitesse de coupe est de 1 200 mètres par minute ; on donnera la valeur approchée arrondie au cm^3.

b. Calculer V lorsque v égale 0 $m{\cdot}min^{-1}$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

2. Étude de fonction numérique

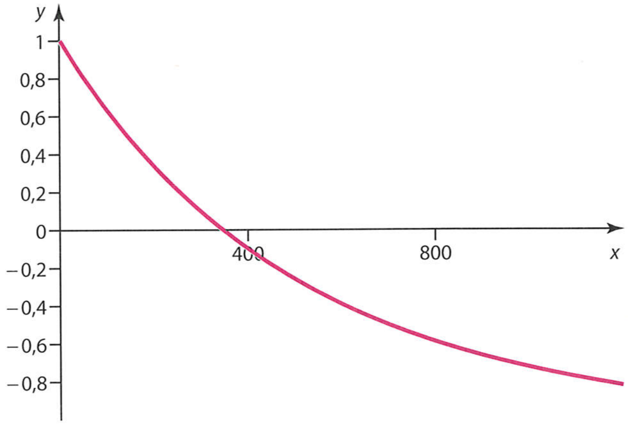
On considère la fonction numérique f, définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1\,200]$ par :

$$f(x) = 36\,000\left(e^{-0{,}002x} - e^{-0{,}004x}\right)$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f, définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1\,200]$.

a. Vérifier que $f'(x) = 72e^{-0{,}002x}(2e^{-0{,}002x} - 1)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1\,200]$.

Soit g la fonction numérique, définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1\,200]$, par : $g(x) = 2e^{-0{,}002x} - 1$. La courbe représentative de la fonction g est donnée ci-après.



b. Vérifier que la fonction g s'annule en $500\ln(2)$.

c. À l'aide de la question **b.** et du graphique, déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0\,;1\,200]$.

d. En déduire le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle.

e. Donner le sens de variation de f sur son ensemble de définition.

f. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan (unités : 1 cm pour 100 unités en abscisses et 1 cm pour 1 000 unités en ordonnées). Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans ce repère orthogonal.

3. Bilan

a. Déduire de l'étude précédente le volume maximal, en centimètres cubes, de copeaux que l'on peut obtenir lors de l'usinage d'une pièce, avant la mort de l'outil.

b. Donner alors une valeur approchée, arrondie au mètre par minute, de la vitesse de coupe correspondante.

Partie B

L'objectif de cette partie est, à vitesse de coupe donnée, de déterminer le nombre d'outils nécessaires à l'obtention de 10 000 cm^3 de copeaux.

1. On considère désormais que la vitesse de coupe v est de 350 mètres par minute et que la section d'usinage s est de 0,004 centimètre carré.

a. Le temps d'usinage T_0 (exprimé en minutes) nécessaire pour obtenir 10 000 cm^3 de copeaux est donné par la relation : $T_0 = \dfrac{10\,000}{v \times 100 \times s} = \dfrac{100}{v \times s}$ où v désigne la vitesse de coupe, exprimée en mètres par minute ($m{\cdot}min^{-1}$) et s est la section d'usinage exprimée en centimètres carrés. Déterminer une valeur approchée (par excès à la minute près) de ce temps d'usinage T_0.

b. Le temps effectif de coupe d'un outil (exprimé en minutes) est donné par la relation $T_{eff} = C \times x^n$ où x désigne la vitesse de coupe exprimée en mètres par minute.

SUJET BAC

Dans le cas d'une usure maximale possible de 0,3 millimètre, on obtient expérimentalement les valeurs suivantes : $C \approx 1{,}8 \times 10^7$ et $n \approx -2{,}25$.
Déterminer une valeur approchée (par défaut à la minute près) de ce temps effectif de coupe d'un outil, noté T_{eff} pour une vitesse de coupe de 350 mètres par minute.
c. En déduire le nombre d'outils nécessaires à l'obtention de 10 000 cm^3 de copeaux.
d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*
L'exposant *négatif* dans la relation $T_{\text{eff}} = 1{,}8\ 10^7 \times x^{-2{,}25}$ obtenue expérimentalement paraît-il conforme à l'intuition ? Justifier votre réponse.

145 Lors de l'administration d'un analgésique au moyen d'une perfusion à débit continu, on désigne par $f(t)$ la quantité (en µg) d'analgésique présente dans l'organisme d'un patient en fonction de l'instant t (en min). On admet que f est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, par : $f(t) = 14{,}29(1 - e^{-0{,}14t})$.
1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Interpréter le résultat.
2. a. Soit f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(t)$.
b. En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. On admet que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;30]$, $f(t)$ représente, à l'instant t, la quantité d'analgésique présente dans l'organisme au cours d'une perfusion.
La quantité $Q = 14{,}29$ µg s'appelle « quantité d'analgésique à l'équilibre ».
5. Cette quantité Q peut-elle être atteinte ? Justifier la réponse.
6. Déterminer le temps au bout duquel la quantité d'analgésique présente dans l'organisme du patient atteint la moitié de Q.
7. Au bout de 25 minutes, quel pourcentage représente la quantité d'analgésique par rapport à la quantité Q ?

146 On estime que la production d'acide lactique d'un coureur lors de l'effort est modélisée par une fonction f définie sur $[0\,;13]$.Cette fonction qui au temps t, exprimé en minutes, associe la production d'acide lactique du coureur, exprimée en millimoles par litre, à l'instant t, est $f(t) = 2\ e^{0{,}17t}$.
1. a. Calculer $f'(t)$. En déduire les variations de la fonction f sur $[0\,;13]$.
b. On estime que le sportif arrête son effort lorsque le taux d'acide lactique dépasse 15 millimoles par litre.
Au bout de combien de minutes ce sportif arrêtera-t-il son effort ?
On donnera ce résultat à la minute supérieure et on évaluera alors la vitesse obtenue à 0,1 km·h^{-1} près.
2. Un autre sportif, produisant moins d'acide lactique, est soumis au même test. Son taux d'acide lactique est donné par la fonction g définie sur $[0\,;13]$ par $g(t) = 2e^{kt}$ où k est un réel positif.
En comparant cette situation avec la précédente, que peut-on dire sur le coefficient k ?

147 La plus ancienne méthode de conservation des aliments pratiquée par l'homme est la déshydratation. Ce procédé consiste à utiliser une source de chaleur pour faire évaporer de l'eau d'un aliment.
Dans tout l'exercice, on s'intéresse à un abricot frais placé dans un séchoir pour le déshydrater.
Avant déshydratation, cet abricot frais a une masse de 45 g dont 85 % d'eau. Le processus de déshydratation s'achève lorsque cet abricot a une masse de 9 g dont 25 % d'eau, il bénéficie alors de l'appellation « abricot sec ».
1. Calculer la masse d'eau contenue dans cet abricot frais.
2. Vérifier que cet abricot ayant l'appellation « abricot sec » ne contient plus que 2,25 g d'eau.
3. Soit f la fonction qui, à toute durée t exprimée en heures, associe la masse d'eau (en grammes) contenue dans cet abricot placé dans le séchoir depuis t heures.
On admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0,13]$, $f(t) = 38{,}25e^{-0{,}26t}$.
a. Calculer la masse d'eau présente dans cet abricot après deux heures passées dans le séchoir.
b. Si on laisse cet abricot dans le séchoir pendant 8 heures, pourra-t-il bénéficier de l'appellation « abricot sec » ? Justifier votre réponse.
c. Déterminer le temps de séchage nécessaire pour que l'abricot placé dans le séchoir puisse bénéficier de l'appellation « abricot sec ».
4. On considère maintenant la totalité du processus de déshydratation qui permet de passer de l'abricot frais, contenant 38,25 g d'eau, à l'abricot ayant l'appellation « abricot sec », contenant 2,25 g d'eau.
Camille affirme : « Dans ce processus, le temps nécessaire pour éliminer les 5 derniers grammes d'eau est environ 15 fois le temps nécessaire à l'élimination des 5 premiers grammes d'eau ! »
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.