8 Fonction exponentielle de base e

CAPACITÉS

- Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle pour transformer des expressions.
- Étudier les variations de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles (du type $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel) et de fonctions polynômes.
- Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles et de fonctions polynômes.

LIVE

Regardons en direct la circulation sous le pont !

lienmini.fr/10445-65

Le pont du Rialto, de 48 m de long, enjambe le Grand Canal à Venise. La présence de boutiques en fait un des rares exemples contemporains de pont bâti. On y trouve notamment deux rangées de commerces installés dans six arches à la montée et six arches à la descente. Sa hauteur au-dessus de l'eau atteint 7,50 m en son milieu.

Quelle doit être la hauteur maximale d'un bateau pour qu'il puisse passer sous le pont dans un couloir donné ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 165

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première et du chapitre 3

Questions Flash
Diaporama
10 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10445-66

1 Nombre dérivé et équation de tangente

- Lorsque f est dérivable en un réel a alors **le nombre dérivé** de f en a est :
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$
- **L'équation réduite** de la tangente à la courbe de f en a est :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
- **Dérivée de $f(ax+b)$** : la dérivée de $f(ax+b)$ est $af'(ax+b)$.

2 Fonction ka^x

La fonction ka^x est définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $a>0$ et k réel.
- Si $k>0$ et $a>1$, f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
  et $0<a<1$, f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $k<0$ et $a>1$, f est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
  et $0<a<1$, f est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

3 Propriétés des puissances d'un réel

Pour tous réels x et y, n entier relatif et $a>0$,
- $a^x\times a^y=a^{x+y}$
- $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$
- $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^n=a^{nx}$

Vérifier les acquis de Première et du chapitre 3

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. Le nombre dérivé de $f(x)=-3x+2$ en 1 vaut :	-1	1	-3	0	1
2. L'équation de la tangente à la courbe de $f(x)=(2x+3)^3$ en 0 est :	$y=9x+54$	$y=6x+9$	$y=54x+27$	$y=27x+9$	1
3. La fonction $f(x)=9(2{,}5)^x$ est :	croissante et négative sur $\mathbb{R}$.	décroissante et positive sur $\mathbb{R}$.	croissante et positive sur $\mathbb{R}$.	décroissante et négative sur $\mathbb{R}$.	2
4. Le point A (0,5 ; 1,5) appartient à la courbe de la fonction :	$f(x)=3\times 4^x$	$f(x)=(1{,}5^x)^2$	$f(x)=4\times 3^x$	$f(x)=0{,}5\times 1{,}5^x$	2
5. $(1{,}7)^{2{,}1}\times(1{,}7)^{-3}=$	$1{,}7^{-6{,}3}$	$1{,}7^{0{,}9}$	$1{,}7^{-1{,}1}$	$\dfrac{1}{1{,}7^{0{,}9}}$	3
6. $a^{2x}\times a^{-x}\times(\sqrt{a})^x=$	a^x	a^{2x}	$\sqrt{a}$	$a^{1{,}5x}$	3

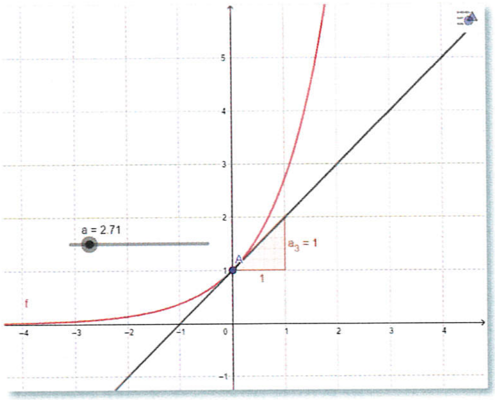
→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 Une fonction exponentielle de base particulière

→ Mémento GEOGEBRA p. 319

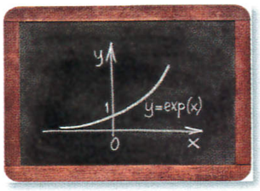
OBJECTIF Découvrir un nouveau nombre → Cours 1A p. 166



1. Sur une feuille GeoGebra :
- Créer un curseur a variant de 0 à 20 d'incrément 0,01.
- Créer la fonction $f(x) = a^x$.

Saisie : $\boxed{f(x) = \text{fonction}\ [a^x, -5\ ; 5]}$
- Créer le point A(0 ; 1) puis la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Saisie : $\boxed{\text{Tangente}\ (A, f(x))}$
- Créer la pente de la tangente au point d'abscisse 0.



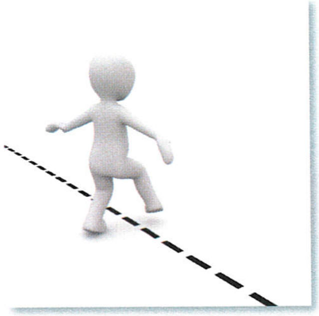
- Trouver la valeur de a pour que la pente soit égale à 1.

En déduire la solution de l'équation $f'(x) = 1$.
Cette solution a se note $e = e^1$.

2. En déduire graphiquement e^0 et le sens de variation de la fonction $f(x) = e^x$.

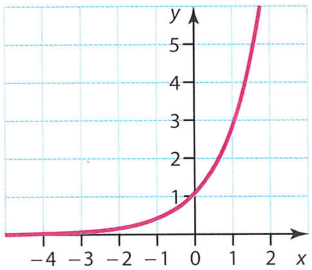
2 « Ne pas dépasser les limites »

OBJECTIF Approcher graphiquement des limites → Cours 3 p. 170

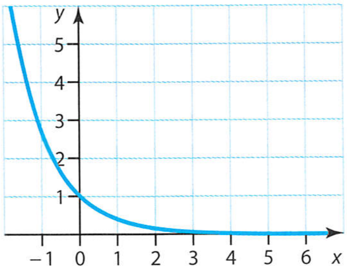


On donne ci-dessous les courbes représentatives de plusieurs fonctions :
- $f(x) = e^x$
- $g(x) = e^{-x}$
- $h(x) = \dfrac{e^x}{x}$
- $j(x) = xe^{-x}$

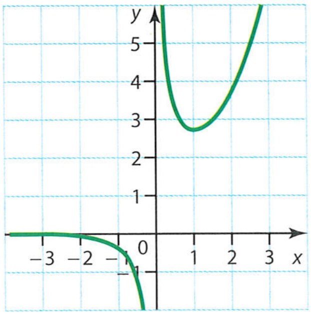
$f(x) = e^x$



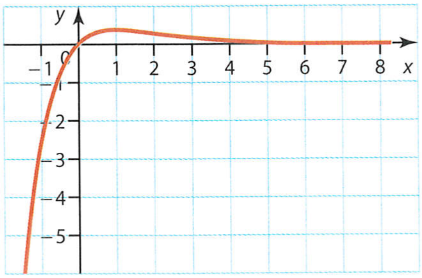
$g(x) = e^{-x}$



$h(x) = \dfrac{e^x}{x}$



$j(x) = xe^{-x}$

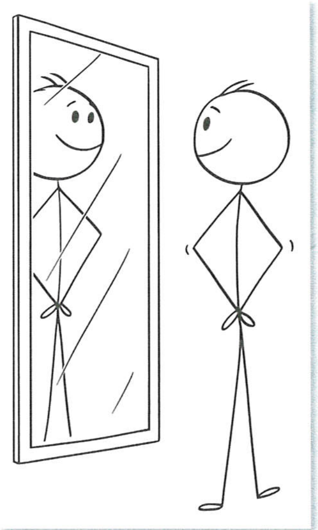


Pour chacune des courbes de f, g, h et j, déterminer graphiquement leurs limites quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ou de plus en plus petites.

3 Une relation particulière ! GeoGebra

OBJECTIF Rechercher une fonction f égale à sa dérivée f' → Cours 2 p. 168

De nombreux problèmes de Physique mettent en jeu des équations reliant une fonction à sa dérivée appelée équation différentielle.
Étudions quelques particularités des fonctions f telles que $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.



1. Soit $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

a. Montrer que $g'(x) = 0$.

b. En déduire que $g(x) = 1$ et que $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

2. Utilisation d'un logiciel dynamique

a. Sur GeoGebra, créer un curseur k allant de 0 à 1 d'incrément 0,1 et entrer dans le champ de saisie : $\boxed{\text{RésolEquaDiff[y,0,}k\text{,1,0.1]}}$.

b. Entrer dans le champ de saisie : $\boxed{f(x) = \exp(x)}$. Que constatez-vous ?

c. Vérifier que $f(-2) = \dfrac{1}{f(2)}$.

d. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0. La représenter sur le fichier GeoGebra.

3. Utilisation d'un logiciel de calcul formel

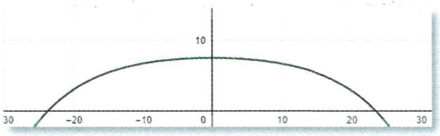
Sur Xcas, saisir : $\boxed{\text{desolve([y' = y,y(0) = 1],y)}}$.

4. Que peut-on conjecturer à l'aide des trois questions précédentes ?

4 Passera, passera pas ? Python

OBJECTIF Modéliser une situation par une fonction exponentielle → Cours 2 p. 168

Le célèbre pont du Rialto, d'une longueur de 48 m, est l'un des quatre ponts qui traversent le Grand Canal à Venise. Sa hauteur au-dessus de l'eau atteint 7,50 m en son milieu.
On considérera que la partie de l'axe des abscisses situées entre -24 et 24 représente le Grand Canal sur lequel circulent les vaporettos et que ceux-ci ne peuvent passer que dans le « couloir » situé sur l'intervalle $[-8 ; 8]$.
Soit la fonction f définie, pour tout x réel de l'intervalle $[-24 ; 24]$, par $f(x) = 8{,}5 - 0{,}5(e^{0{,}12x} + e^{-0{,}12x})$. On a : $f(0) = 7{,}5$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, donnée ci-contre :



PARTIE A

1. Expliquer pourquoi le maximum de f est en 0.

2. On doit laisser une marge de sécurité en hauteur de 50 cm et tout bateau doit obligatoirement passer dans le couloir $[-8 ; 8]$. Quelle doit être alors la hauteur maximale, en mètres, d'un bateau pour qu'il puisse passer sous le pont ? On arrondira le résultat à 10^{-1} près.

PARTIE B

On considère le programme ci-contre qui permet de savoir si un vaporetto peut passer sous le pont.

```
def f(x)
return (8.5-0.5(exp(0.12*x)+exp(-0.12*x))
def B(x,H)
    if f(x) > H
        print("le vaporetto passe ")
    else:
        print ("le vaporetto ne passe pas")
```

3. Expliquer la ligne 4.

4. Quel résultat obtient-on en tapant B(−6 ; 5) ? Expliquer.

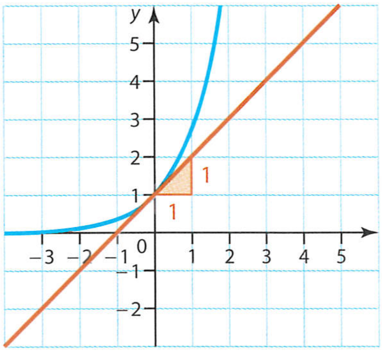
5. Un bateau de 4 m de haut passe-t-il sous le pont dans le couloir $[-3 ; -1]$?

1 De la fonction exponentielle de base *a* à celle de base e

A Définition et notation

Il existe un **unique réel e**, appelé **nombre d'Euler**, valeur du paramètre a de la fonction $f(x) = a^x$ dont la tangente au point d'abscisse 0 a une pente égale à 1.

DÉFINITION On appelle **fonction exponentielle** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\mathbf{e}^x$.



La fonction **exponentielle de base e** se note $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$, f étant définie sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLES • $f(0) = e^0 = \exp(0)$ et $f(-0{,}5) = e^{-0{,}5} = \exp(-0{,}5)$.

REMARQUES

• À la calculatrice $e^1 = \exp(1) = e(1) = e\wedge1 \approx 2{,}718\,281\,828$.

• Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique. Ses 100 premières décimales sont : e ≈ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…

B Propriétés algébriques

Histoire des maths

C'est **Leonhard Euler** (1707-1783) qui étudia de manière approfondie le nombre e et c'est à lui que nous devons le nom de ce nombre.

Les propriétés de la fonction exponentielle de base a sont valables pour $a = e$ soit :

PROPRIÉTÉS Pour tous réels x et y et n entier relatif :

$\mathbf{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}$ ① $\mathbf{e}^{x+y} = \mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^y$ et $\mathbf{e}^{x-y} = \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^y}$ ② $(\mathbf{e}^x)^n = \mathbf{e}^{nx}$ ③

DÉMONSTRATION

① $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

soit $e^x \times e^{-x} = 1$ d'où $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

② $e^{x-y} = e^{x+(-y)}$

$= e^x \times e^{-y}$

$= e^x \times \dfrac{1}{e^y}$

$= \dfrac{e^x}{e^y}$.

③ C'est une propriété des puissances entières.

REMARQUES

• $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

• $e^{-1} = \dfrac{1}{e^1}$

EXEMPLE • $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}} = \dfrac{e^3}{e^{-5}} = e^{3+5} = e^8$.

→ Voir Exercices résolus 1 et 2

Exercice résolu 1 — Simplifier une expression en utilisant les propriétés algébriques

Simplifier les expressions suivantes :

1. e^{x-1}

2. $e^{-2x}\times e^{3x}\times\dfrac{1}{\left(e^{2x}\right)^{-3}}$

3. $\dfrac{e^{x}}{\left(e^{-2x}\right)^{0,5}}$

4. $\sqrt{\dfrac{e^{-x}}{e^{x}\times e^{2x}}}$

5. $\dfrac{e^{0,5}\times\left(e^{2}\right)^{1,5}}{\left(e^{-1}\right)^{2}}$

Méthode — Pour simplifier une expression en utilisant les propriétés algébriques

❶ On **utilise** les propriétés : $e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$, $e^{x-y}=\dfrac{e^{x}}{e^{y}}$, $e^{x+y}=e^{x}\times e^{y}$, $(e^{x})^{n}=e^{nx}$.

❷ On se **rappelle** que $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Solution

1. $e^{x-1}=\dfrac{e^{x}}{e^{1}}=\dfrac{e^{x}}{e}$.

2. $e^{-2x}\times e^{3x}\times\dfrac{1}{\left(e^{2x}\right)^{-3}}=\dfrac{e^{-2x+3x}}{e^{-6x}}$
$=e^{-2x+3x+6x}$
$=e^{7x}$.

3. $\dfrac{e^{x}}{\left(e^{-2x}\right)^{0,5}}=\dfrac{e^{x}}{e^{-x}}=e^{2x}$.

4. $\sqrt{\dfrac{e^{-x}}{e^{x}\times e^{2x}}}=\sqrt{e^{-4x}}=\left(e^{-4x}\right)^{0,5}=e^{-2x}$.

5. $\dfrac{e^{0,5}\times\left(e^{2}\right)^{1,5}}{\left(e^{-1}\right)^{2}}=\dfrac{e^{0,5}\times e^{3}}{e^{-2}}=e^{0,5+3+2}=e^{5,5}$.

→ Voir Exercices 42 à 52 p. 174

Exercice résolu 2 — Transformer une expression

1. Développer les deux expressions suivantes :

a. $(e^{-x}+1)(e^{x}-1)$

b. $(2e^{x}-1)^{2}$

2. Montrer que : $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

3. Factoriser :

a. $e^{2x}-16$

b. $1+2e^{x}+e^{2x}$

Méthode — Pour transformer une expression

❶ On **utilise** la distributivité et les propriétés $e^{x+y}=e^{x}\times e^{y}$, $(e^{x})^{n}=e^{nx}$.

❷ On **factorise** le numérateur et le dénominateur du membre de gauche par e^{x}.

❸ Rappel des identités remarquables : $(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$ et $a^{2}-b^{2}=(a-b)(a+b)$.

Solution

1. a. $(e^{-x}+1)(e^{x}-1)=e^{-x}\times e^{x}-e^{-x}+e^{x}-1$
$=e^{-x+x}-e^{-x}+e^{x}-1$
$=e^{0}-e^{-x}+e^{x}-1$
$=1-e^{-x}+e^{x}-1$
$=e^{x}-e^{-x}$

b. $(2e^{x}-1)^{2}=(2e^{x})^{2}-2\times 2e^{x}\times 1+1^{2}$
$=4e^{2x}-4e^{x}+1$

2. $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{x}\left(1-e^{-x}\right)}{e^{x}\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

3. a. $e^{2x}-16=(e^{x})^{2}-4^{2}$
$=(e^{x}-4)(e^{x}+4)$

b. $1+2e^{x}+e^{2x}=1^{2}+2\times 1\times e^{x}+(e^{x})^{2}$
$=(1+e^{x})^{2}$

→ Voir Exercices 54 et 55 pp. 174-175

2 Étude de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$

A Dérivée et sens de variation de la fonction exponentielle

Propriété La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est **dérivable** sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^x$.

Exemples

- La dérivée de $f(x) = 2e^x - 3x$ est $f'(x) = 2e^x - 3$.
- La dérivée de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$.
- La dérivée de la fonction $f(x) = (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$ est :

$f'(x) = 1 \times e^x + (1+x)e^x = e^x(2+x)$.

Comme la fonction exponentielle de base a, la fonction $f(x) = e^x$ est strictement positive et croissante sur $\mathbb{R}$ ($e > 1$).

Propriété La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration • $e^x > 0$, donc $(e^x)' > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variation suivant :

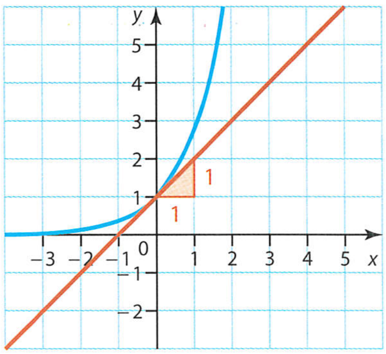
x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	↗	

Remarque • La croissance de la fonction exponentielle est très rapide, ainsi e^{21} dépasse le milliard !

→ Voir Exercice résolu 3

B Courbe représentative de la fonction exponentielle

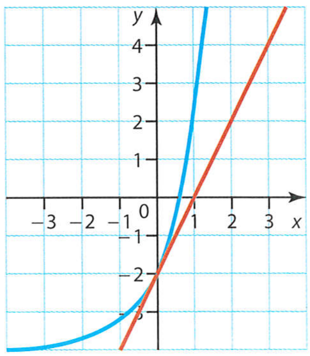
On donne ci-dessous la courbe de $f(x) = e^x$.



Remarque • L'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = 1x + 1 \Leftrightarrow y = x + 1$.

Exemple • Une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = 2e^x - 4$ au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x - 2$.

→ Voir Exercice résolu 4



Exercice résolu 3 — Dériver des fonctions comportant la fonction exponentielle

Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

1. $f(x) = (1-x)e^x \qquad I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = \dfrac{2e^x}{x+1} \qquad I =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.

3. $f(x) = 2xe^{-x} \qquad I = \mathbb{R}$.

Méthode — Pour dériver des fonctions comportant la fonction exponentielle

❶ On **utilise** la dérivée de l'exponentielle.

❷ On **utilise** les dérivées des fonctions usuelles et les opérations sur les dérivées.

Solution

1. $f(x)$ est de la forme uv avec $u(x) = (1-x)$ et $v(x) = e^x$.
Comme $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$, pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \times e^x + (1-x)e^x \\ &= e^x(-1+1-x) \\ &= -xe^x. \end{aligned}$$

(On a factorisé par e^x.)

2. $f(x)$ est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2e^x$ et $v(x) = x+1$.

Comme $u'(x) = 2e^x$ et $v'(x) = 1$, pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(x+1) - 2e^x \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2xe^x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Comme au **1.** $f(x)$ est de la forme uv avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{-x}$. Comme $u'(x) = 2$ et $v'(x) = -e^{-x}$, pour tout x de I, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(2-2x). \end{aligned}$$

→ Voir **Exercices 59 à 64** p. 175

Exercice résolu 4 — Calculer la dérivée et en déduire l'équation de tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$ avec a et b réels.

1. Exprimer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ en fonction de a et de b pour tout réel x.

2. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de a et de b.

3. Déterminer les réels a et b tels que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

4. En déduire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Méthode — Pour calculer la dérivée et en déduire l'équation de tangente

❶ On **applique** ici la dérivée de uv : $(uv)' = u'v + uv'$.

❷ On **utilise** $e^0 = 1$.

❸ On **utilise** les réponses aux **1.** et **2.** et on cherche en identifiant les réels a et b.

❹ On **utilise** l'équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe d'une fonction f : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Solution

1. $f(x)$ est de la forme uv avec $u(x) = ax+b$ et $v(x) = e^x$.
Soit $f'(x) = ae^x + (ax+b)e^x = e^x(ax+a+b)$.

2. $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b \times 1 = b$.
$f'(0) = e^0(a \times 0 + a + b) = 1(a+b) = a+b$.

3. $f(0) = 1$ donc $(0 \times x + b)e^0 = 1$ d'où $b \times 1 = 1$.
On a : $f'(0) = 3$ donc $e^0(a \times 0 + a + b) = 3$ d'où $a + b = 3$ d'où $a = 2$.

4. On déduit du résultat du **3.** que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est $y = (2x+1)e^x$.

→ Voir **Exercices 66 et 67** p. 175

3 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle

Propriété $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence graphique • La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentant la fonction exponentielle en $-\infty$.

Exemple • $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+3)e^x = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Théorème

• Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

• Pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

Exemples • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - xe^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$

→ Voir Exercice résolu 5

4 Étude des fonctions $f(x) = e^{kx}$ où k réel

Propriété La fonction $f(x) = e^{kx} = (e^x)^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f'(x) = ke^{kx}$.

Démonstration • La dérivée de la fonction $f(ax+b)$ est $af'(ax+b)$ d'où la dérivée de $f(kx)$ où $f(x) = e^x$ est $f'(x) = ke^{kx}$.

Exemple • La dérivée de la fonction $f(x) = e^{\frac{-3x}{2}}$ est $f'(x) = \dfrac{-3}{2}e^{\frac{-3x}{2}}$.

→ Voir Exercice résolu 6

Propriété La fonction $f(x) = e^{kx}$ définie sur $\mathbb{R}$ est **croissante** si $k > 0$ et **décroissante** si $k < 0$.

Démonstration • $f'(x) = ke^{kx}$ or $e^{kx} > 0$ donc le signe de f' dépend de k.

Exemple • La fonction $f(x) = e^{-2x}$ est dérivable et $f'(x) = -2e^{-2x} < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{kx} = \begin{cases} +\infty \text{ si } k > 0 \\ 0 \text{ si } k < 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = \begin{cases} 0 \textit{ si } k > 0 \\ +\infty \textit{ si } k < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{kx}}{x^n} = +\infty$ pour $k > 0$ et n entier $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n \times e^{-kx} = 0$

Exemple • $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \times e^{-2x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$

→ Voir Exercice résolu 7

Exercice résolu 5 — Calculer des limites

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2+x)e^x$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} 3-2e^{-x}+e^x$ **3.** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(1-e^x)$

Méthode — **Pour calculer des limites**

On **utilise** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Solution

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (2+x)e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x + xe^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3-2e^{-x}+e^x = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} -2e^{-x} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}(1-e^x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-e^x) = 1$

→ Voir **Exercices 70 à 74** p. 176

Exercice résolu 6 — Dériver des fonctions comportant la fonction $f(x) = e^{kx}$

Calculer les dérivées de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = 2e^{-2x}$ **2.** $f(x) = xe^{-x}$ **3.** $f(x) = \dfrac{e^{0,5x}}{x}$

Méthode — **Pour dériver des fonctions comportant la fonction $f(x) = e^{kx}$ (k réel)**

1. On **utilise** les opérations sur les dérivées.
2. On **utilise** la dérivée de $(e^{kx})' = ke^{kx}$.

Solution

1. $f'(x) = 2 \times (-2) \times e^{-2x} = -4e^{-2x}$.

2. $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1)\, e^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

Remarque : penser à factoriser par l'exponentielle.

3. $f'(x) = \dfrac{0,5e^{0,5x} \times x - e^{0,5x}}{x^2} = \dfrac{e^{0,5x}(0,5x-1)}{x^2}$.

→ Voir **Exercices 77 à 86** pp. 176-177

Exercice résolu 7 — Calculer des limites de fonctions comportant $f(x) = e^{kx}$

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x+1}$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{1-2x}$ **3.** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}+2x$

Méthode — **Pour calculer des limites de fonctions comportant $f(x) = e^{kx}$**

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{kx} = \begin{cases} +\infty \text{ si } k>0 \\ 0 \text{ si } k<0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = \begin{cases} 0 \text{ si } k>0 \\ +\infty \text{ si } k<0 \end{cases}$

Solution

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x+1} = 0$ car $e^{-2x+1} = e \times e^{-2x}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^{1-2x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}+2x = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

→ Voir **Exercices 91 à 93** p. 177

L'essentiel

1 De la fonction exponentielle de base a à celle de base e

- La fonction exponentielle $f(x) = e^x$, définie sur $\mathbb{R}$, a les mêmes propriétés que la fonction $f(x) = a^x$ avec $a = e = e^1 \approx 2{,}718$.

La fonction **exponentielle de base e** se note :

$\boldsymbol{f(x) = \exp(x)}$ ou $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, f étant définie sur $\mathbb{R}$.

- **Propriétés**

Pour tous réels x et y et n entier relatif :

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$

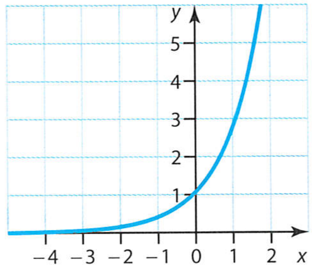
2 Étude de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$

- **Dérivée de $f(x) = e^x$**

$f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x) = e^x}$.

- Comme $e > 1$, alors la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.

- **Courbe représentative de $f(x) = e^x$**



3 Limites et exponentielles

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

4 Étude des fonctions $f(x) = e^{kx}$ où k réel

- La fonction $f(x) = e^{kx}$, k réel, est définie sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\boldsymbol{f'(x) = ke^{kx}}$ donc les variations de f dépendent du signe de k :

– si $\boldsymbol{k > 0}$ f est croissante sur $\mathbb{R}$;

– si $\boldsymbol{k < 0}$ f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- **Limites**

$$\lim_{x \to +\infty} e^{kx} = \begin{cases} +\infty \text{ si } k > 0 \\ 0 \text{ si } k < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^{kx} = \begin{cases} 0 \text{ si } k > 0 \\ +\infty \text{ si } k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{kx}}{x^n} = +\infty \text{ pour } k > 0 \text{ et } n \text{ entier } \lim_{x \to +\infty} x^n \times e^{-kx} = 0$$

Bilan

Fonction exponentielle de base a : $f(x) = a^x$ → La fonction exponentielle de base e : $f(x) = e^x$

La fonction exponentielle de base e : $f(x) = e^x$ →

Propriétés
$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$

Dérivée, variation
- $f'(x) = e^x$
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Limites
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

La fonction exponentielle de base e : $f(x) = e^x$ → La fonction $f(x) = e^{kx}$ →

Dérivée, variation
- $f'(x) = ke^{kx}$
- Les variations de f dépendent du signe de k.