6 Probabilités conditionnelles

CAPACITÉS

- Construire un arbre de probabilités associé à une situation aléatoire donnée.
- Interpréter les pondérations de chaque branche d'un arbre en termes de probabilités, et notamment de probabilités conditionnelles.
- Faire le lien entre la définition des probabilités conditionnelles et la multiplication des probabilités des branches du chemin correspondant.
- Utiliser un arbre de probabilités pour calculer des probabilités.
- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

3:10

Découvrons l'écologie du net

▶ lienmini.fr/10445-33

Une classe de Terminale compte 30 % d'élèves qui téléchargent des vidéos, dont 40 % qui les lisent sur leur smartphone. Le reste regarde des vidéos en streaming, dont 20 % depuis leur smartphone.

Un élève lit une vidéo sur son smartphone. Quelle est la probabilité qu'il l'ait téléchargée ?

→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 120

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions Flash

Diaporama

15 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-34

1 Proportion et tableaux croisés

Un **tableau croisé** permet l'étude de deux caractères d'une population.
Les cases du tableau peuvent se remplir avec les :

- **effectifs** ;
- **fréquences marginales** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total ;
- **fréquences conditionnelles** :

– par **lignes** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne.

– par **colonnes** : on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la colonne.

	A	B	TOTAL
C			
D			
TOTAL			

2 Probabilités conditionnelles

Si A et B sont deux événements avec $P(\mathrm{A}) \neq 0$, la **probabilité de B sachant que A est réalisé**, notée $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$, est définie par :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Le tableau ci-contre présente l'équipement audio des élèves de deux classes de Terminale. On choisit un élève au hasard.

	Écouteurs	Casque	TOTAL
Garçons	15	21	36
Filles	20	8	28
TOTAL	35	29	64

	a	b	c	d	Aide
1. L'élève choisi est une fille. La probabilité qu'elle ait un casque est :	$\frac{29}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{29}$	$\frac{8}{28}$	1
2. Sachant que c'est un garçon, la probabilité qu'il ait des écouteurs est :	$\frac{35}{64}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{12}$	$\approx 0,23$	1
3. Sachant que l'élève a un casque, la probabilité que ce soit un garçon est :	$\frac{21}{36}$	$\frac{29}{64}$	$\frac{29}{21}$	$\frac{21}{29}$	1
4. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. La carte tirée n'est ni un chiffre ni un as. La probabilité que cette carte soit noire est :	0,187 5	0,375	0,5	on ne peut pas savoir	2
5. Dans la même situation que précédemment, la probabilité que cette carte soit un roi ou une dame est :	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{32}$	2

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

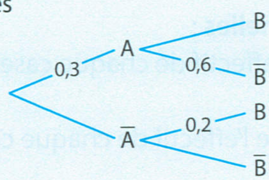
1 Un drôle d'arbre

OBJECTIF Construire et exploiter un arbre de probabilités → Cours 1A, 1B, 1C p. 122 et p. 124

On schématise une situation aléatoire par un **arbre de probabilités.** Une **branche** est un segment menant à un événement. Chaque branche porte la probabilité de l'événement à laquelle elle mène, conditionnée par l'(es) événement(s) d'où elle provient. Un **nœud** est le croisement de plusieurs branches. La **somme** des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.

1. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les probabilités des événements :

- $\overline{A}$
- B sachant A
- $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$



2. Un **événement bilan**, situé à l'une des extrémités de l'arbre, est l'intersection de tous les événements qui y mènent. Sa probabilité est le produit des probabilités des branches du **chemin** qui y mène.
Calculer $P(A \cap B)$, et le comparer à $P(A) \times P_A(B)$.

3. En déduire $P(A \cap \overline{B})$.

4. On admet que $P(B) = 0,26$. Calculer $P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Qu'en déduit-on ?
La formule obtenue est appelée **formule des probabilités totales.**

2 Streaming et téléchargement

VIE QUOTIDIENNE

OBJECTIF Faire le lien entre l'arbre et les formules de probabilités → Cours 1B, 1C p. 122 et p. 124

Dans une classe de Terminale, 30 % des élèves téléchargent les vidéos, les autres les regardent en streaming.
Parmi ceux qui utilisent le téléchargement, 40 % le font sur leur smartphone, contre 20 % pour ceux qui utilisent le streaming (les autres utilisent une tablette ou un ordinateur).
On note les événements :

- M : « l'élève lit les vidéos sur son smartphone ».
- T : « l'élève utilise le téléchargement ».
- S : « l'élève utilise le streaming ».

1. Déterminer $P(T)$, $P(S)$, $P_T(M)$ et $P_S(M)$.

2. a. Traduire par une phrase les événements $T \cap M$ et $S \cap M$.

b. À l'aide de la formule d'une probabilité conditionnelle, calculer $P(T \cap M)$ et $P(S \cap M)$.

3. L'ensemble des élèves qui lisent une vidéo sur leur smartphone regroupe ceux qui utilisent le streaming et lisent une vidéo sur leur smartphone, et ceux qui utilisent le téléchargement et lisent une vidéo sur leur smartphone. De cette information et de la question **2.**, en déduire $P(M)$.

4. Un élève a lu une vidéo sur son smartphone. Quelle est la probabilité qu'il l'ait téléchargée ?

3 Un test si fiable ?

STL BIOLOGIE

OBJECTIF Appliquer la formule des probabilités totales sans arbre → Cours 1B, 1C p. 122 et p. 124

À la suite d'une étude épidémiologique réalisée dans une population, il a été révélé qu'un individu sur 1 000 est atteint par une maladie virale. Afin de sensibiliser la population à la prévention de cette maladie, un laboratoire propose un test de dépistage ayant les caractéristiques suivantes :
– si un individu est atteint par la maladie, le test est positif à 99,7 % ;
– si un individu n'est pas atteint par la maladie, le test est négatif à 0,95 %.
Si ces chiffres semblent très bons, ce test doit être validé par le ministère de la santé local avant d'autoriser ou non sa commercialisation.
Le test sera considéré comme « fiable » si la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie sachant que le test est positif est supérieure à 95 %. On considère les événements suivants :

- M : « L'individu est atteint par la maladie » ;
- T : « Le test est positif ».

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie.

2. En déduire la probabilité qu'un individu soit atteint par la maladie sachant que le test est positif.

3. Peut-on affirmer que ce test est fiable ?

4 L'indépendance

OBJECTIF Découvrir l'indépendance de deux événements → Cours 2A, 2B p. 124

On considère un jeu classique de 32 cartes dans lequel toutes les cartes sont supposées avoir la même probabilité d'apparition.
On tire une carte au hasard dans ce jeu.
On note R l'événement : « la carte tirée est un roi » et N l'événement : « la carte tirée est un nombre ». On prendra pour convention que les As sont considérés comme des nombres (et non des figures).
Deux événements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** si, par exemple (quitte à inverser A et B), la probabilité de A sachant que B est réalisé est égale à la probabilité de A. Autrement dit, la réalisation de l'événement B ne modifie pas la probabilité de l'événement A.

1. Les événements R et N sont-ils indépendants ?

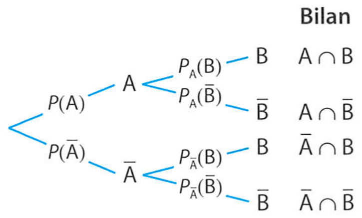
2. On tire une carte du jeu. Cette carte tirée n'est pas un cœur. On note C cet événement.
a. Que peut-on dire des événements C et N ? Et des événements C et $\overline{N}$?
b. Que peut-on dire des événements C et R ? Et des événements C et $\overline{R}$?
Il semblerait donc que l'on ait la propriété suivante : si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B, A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

1 Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

Ω désigne l'univers, A et B deux événements de Ω, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs événements contraires.

(A) Définitions

• Un **arbre de probabilités** est un schéma permettant de résumer une situation aléatoire donnée, connaissant des probabilités.



Dans un tel arbre :

• une **branche** est un segment reliant deux événements. À chaque branche de l'arbre, on associe une probabilité correspondant à l'événement qui y mène. Ci-dessus, sur la branche de A à B, on place $P_A(B)$, la probabilité conditionnelle de B sachant A ;

• un **nœud** est un croisement entre plusieurs branches ;

• un **chemin** est une succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre ;

• **l'événement bilan**, situé à l'extrémité d'un chemin, est l'intersection de tous les événements qui constituent le chemin.

(B) Règles de construction d'un arbre

Un arbre de probabilités satisfait les propriétés suivantes :

Propriété La **somme des probabilités** des branches **issues d'un même nœud** est égale à 1.

→ Voir Exercice résolu 1

Exemple • $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Remarque • On dit alors que les événements incompatibles A et $\overline{A}$ forment une **partition de l'univers.** D'une manière générale, une **partition d'un ensemble** est un « découpage » d'un ensemble en plusieurs sous-parties disjointes (ou « incompatibles ») telles que, si on les réunit, on reconstitue l'ensemble tout entier. En particulier, si A_1 et A_2 forment une partition d'un ensemble A, alors $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$.

Propriété La probabilité d'un chemin est le **produit des probabilités** des branches qui le composent.

→ Voir Exercices résolus 1 et 2

Remarque • La probabilité d'un événement bilan est donc le produit des probabilités des branches du chemin qui mènent à cet événement.

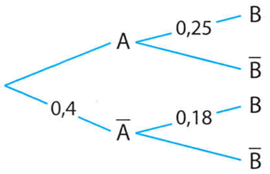
Exemple • $P(A \cap B)=P(A)\times P_A(B)$.

Vocabulaire

Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exercice résolu 1 Utiliser un arbre pour calculer des probabilités

On donne l'arbre de probabilités ci-dessous.



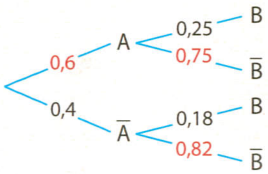
1. Reproduire et compléter cet arbre.
2. Lire $P_{\overline{A}}(B)$.
3. Déterminer $P(A \cap B)$.
4. On donne $P(B) = 0{,}222$. En déduire $P_B(A)$ arrondie au millième.

Méthode **Pour calculer des probabilités à l'aide d'un arbre**

❶ On **complète** les branches.
❷ On **utilise** les règles de calculs.
❸ Une probabilité conditionnelle qui ne se lit pas sur l'arbre se **calcule** avec la formule.

Solution

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1, donc :



2. $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}18$.
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}6 \times 0{,}25 = 0{,}15$.
4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}222} = 0{,}676.$$

→ Voir Exercices 16 à 18 p. 128

Exercice résolu 2 Construire et exploiter un arbre de probabilités

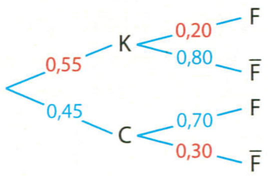
Un panier contient 45 % de citrons et le reste de kiwis. Parmi les citrons, 70 % proviennent de France. Parmi les kiwis, 80 % ne proviennent pas de France. On note les événements :
C : « le fruit est un citron ».
K : « le fruit est un kiwi ».
F : « le fruit provient de France ».
1. Décrire la situation par un arbre de probabilités.
2. Traduire l'événement « F sachant K » et donner sa probabilité.
3. En déduire $P(K \cap F)$.

Méthode **Pour construire un arbre de probabilités**

❶ Une probabilité conditionnelle donnée **indique** le premier niveau de l'arbre.
❷ On **complète** les branches.
❸ On **utilise** les règles de calculs.

Solution

1. Les données de l'énoncé et les règles de calculs nous donnent l'arbre ci-contre.
2. L'événement est « le fruit provient de France sachant que c'est un kiwi ». D'après l'arbre, on a $P_K(F) = 1 - 0{,}8 = 0{,}20$.
3. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur toutes ses branches, donc $P(K \cap F) = P(K) \times P_K(F) = 0{,}55 \times 0{,}2 = 0{,}11$.



→ Voir Exercice 21 p. 128

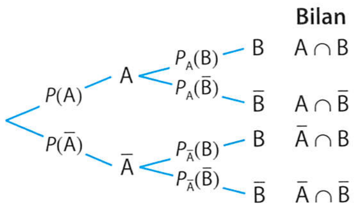
(C) Formule des probabilités totales

Propriété La probabilité d'un événement est la **somme des probabilités** des chemins menant à cet événement dans un arbre pondéré.

Démonstration • Les événements incompatibles $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B, donc $\boldsymbol{P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)}$.

Exemple • Pour l'arbre pondéré ci-contre, la probabilité de l'événement B est, d'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

→ Voir **Exercice résolu 2**



2 Indépendance de deux événements

(A) Définition

Définition Pour un événement A de probabilité non nulle, on dit que :
– **B est indépendant de A** si $P_A(B) = P(B)$.
– **A et B sont indépendants** si B est indépendant de A et A est indépendant de B.

Propriété Si A et B sont de probabilités non nulles, A et B sont **indépendants** si et seulement si $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$ ou $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$.

Démonstration • Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
Si A et B sont indépendants, on a par définition $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$.
Réciproquement, supposons (par exemple) que $P_A(B) = P(B)$, c'est-à-dire que B est indépendant de A.
Puisque $P(A) \neq 0$, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B)$.
Or, $P(B) \neq 0$ donc, en échangeant les rôles de A et B, on obtient aussi $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P(B)$. Ainsi, $P_B(A) = P(A)$ d'où A est indépendant de B. Par définition, on en déduit que A et B sont indépendants.

(B) Une autre formule pour l'indépendance

Propriété A et B sont deux événements **indépendants** si et seulement si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$.

Exemple • On lance un dé équilibré à six faces. On considère les événements A : « obtenir un chiffre pair », B : « obtenir un chiffre strictement supérieur à 4 » et C : « obtenir un nombre premier ».
Ainsi, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, $A = \{2 ; 4 ; 6\}$, $B = \{5 ; 6\}$ et $C = \{2 ; 3 ; 5\}$.

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.

$P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = P(A \cap C)$: A et C ne sont pas indépendants.

→ Voir **Exercices résolus 3 et 4**

Exercice résolu 3 — Calculer la probabilité d'un événement relativement à une partition de l'univers

83 % des élèves d'une classe ont choisi espagnol LV2, les autres ont choisi allemand LV2.
64 % des élèves ayant choisi allemand LV2 sont des garçons contre 50 % ayant choisi espagnol LV2.
On choisit un élève au hasard.
Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Méthode — **Pour calculer la probabilité d'un événement relativement à une partition de l'univers**

1. On **repère** les probabilités conditionnelles relatives à l'événement.
2. On **utilise** la formule des probabilités totales.

Solution

On note les événements :
G : « l'élève est un garçon ».
A : « l'élève fait allemand LV2 ».
E : « l'élève fait espagnol LV2 ».
L'énoncé donne :
$P(\mathrm{E}) = 0{,}83$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) = 0{,}64$ et $P_{\mathrm{E}}(\mathrm{G}) = 0{,}5$.
Les garçons ayant choisi allemand LV2 et ceux ayant choisi espagnol LV2 forment une partition de l'ensemble des garçons.
Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{G}) &= P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}) + P(\mathrm{E}) \times P_{\mathrm{E}}(\mathrm{G}) \\ &= 0{,}17 \times 0{,}64 + 0{,}83 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}523\ 8. \end{aligned}$$

→ Voir **Exercice 22** p. 128

Exercice résolu 4 — Démontrer l'indépendance de deux événements

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire une boule au hasard.
On note D l'événement « obtenir un multiple de deux », T l'événement « obtenir un multiple de trois », N l'événement « obtenir un nombre supérieur ou égal à neuf ».

1. Les événements N et T sont-ils indépendants ?
2. Que dire des événements D et N ?

Méthode — **Pour démontrer l'indépendance de deux événements**

1. Pour deux événements A et B de probabilités non nulles, on **vérifie** soit :
   - $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B})$ ou $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A})$.
   - $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.
2. Dans le cas contraire, les événements A et B ne sont pas indépendants.

Solution

1. Parmi les numéros de ces boules :
– quatre sont multiples de 3, $\mathrm{T} = \{3\,;6\,;9\,;12\}$,
– quatre sont supérieurs ou égaux à 9, $\mathrm{N} = \{9\,;10\,;11\,;12\}$,
– deux sont à la fois multiples de 3 et supérieurs ou égaux à 9, $\mathrm{N} \cap \mathrm{T} = \{9\,;12\}$.
Ainsi, $P(\mathrm{N}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $P(\mathrm{T}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ et $P(\mathrm{N} \cap \mathrm{T}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = P(\mathrm{N}) \times P(\mathrm{T})$, donc N et T ne sont pas indépendants.

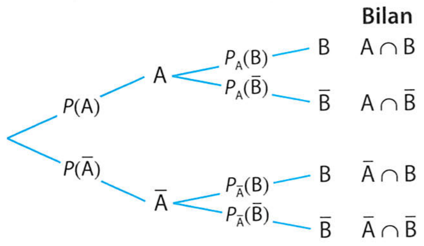
2. Parmi les nombres supérieurs ou égaux à 9, deux sont des multiples de 2, donc $P_{\mathrm{N}}(\mathrm{D}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(\mathrm{D})$.
Ainsi, les événements D et N sont indépendants.

→ Voir **Exercices 27 à 31** p. 129-130

L'essentiel

1 Probabilités conditionnelles et arbre de probabilités

- **Arbre de probabilités** : schéma permettant de résumer une situation aléatoire.



- **Branche** : segment reliant deux événements, auquel on associe une probabilité.
- **Nœud** : croisement entre plusieurs branches.
- **Chemin** : succession de branches du nœud initial à une des extrémités de l'arbre.
- **Événement bilan** : événement à l'extrémité d'un chemin, qui est l'intersection de tous les événements constituant le chemin.
- La **somme des probabilités** des branches **issues d'un même nœud** est égale à 1.
- Sur la branche de A à B, on place $P_A(B)$, la **probabilité conditionnelle** de B sachant A.
- La **probabilité d'un chemin** est le **produit** des probabilités des branches qui le composent.
- La **probabilité d'un événement** est la **somme** des probabilités des chemins menant à cet événement (**formule des probabilités totales**).

En particulier :

- $P(A)+P(\bar{A})=1$
- $P(A \cap B)=P(A)\times P_A(B)$
- $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(B)$

2 Indépendance de deux événements

- Lorsque $P(A)\neq 0$, **B est indépendant de A** si $P_A(B)=P(B)$.
- Lorsque $P(B)\neq 0$, **A est indépendant de B** si $P_B(A)=P(A)$.
- **A et B sont indépendants** si B est indépendant de A et A est indépendant de B.
- Lorsque $P(A)\neq 0$ **et** $P(B)\neq 0$, A et B sont **indépendants** si et seulement si l'une des égalités ci-dessous est satisfaite :

$$P_A(B)=P(B)$$
$$P_B(A)=P(A)$$

- Sans supposer $P(A)\neq 0$ ou $P(B)\neq 0$, **l'indépendance de A et B** peut se prouver par la formule :

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B).$$