4 Fonction logarithme décimal

CAPACITÉS

- Utiliser le logarithme décimal pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ d'inconnue x réelle, une inéquation du type $a^x < b$ ou $x^a < b$ d'inconnue x réelle ou du type $a^n < b$ d'inconnue n entier naturel.
- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal pour transformer des expressions numériques ou littérales.

Lucy Glöckner lors de son exploit au bol d'Or 2017.

On estime le niveau sonore d'une moto aux alentours de 90 décibels. Le seuil de douleur de l'oreille humaine se situe à environ 120 décibels.

Le niveau sonore de ces deux motos côte à côte est-il supportable pour les spectateurs ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 77

2:57
Découvrons si les décibels s'ajoutent
lienmini.fr/10445-60

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde et de Première

Questions Flash

Diaporama

12 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-61

1 Calculer avec des puissances

Soit n un entier naturel.

- $\mathbf{10^n = 1\,0\ldots0}$ (1 suivi de n zéros).
- $\mathbf{10^{-n} = 0,0\ldots0\,1}$ (n chiffres à droite de la virgule).

Exemples : $10^8 = 1\,00\,000\,000$; $10^{-4} = 0,000\,1$.

Soit a un nombre réel non nul et m et n deux entiers relatifs.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1$

2 Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a et b deux nombres réels appartenant à l'intervalle I.

- Dire que f est croissante sur l'intervalle I signifie que : **si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$.**

Les images sont rangées dans **le même ordre** que les nombres a et b.

- Dire que f est décroissante sur l'intervalle I signifie que : **si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$.**

Les images sont rangées dans **l'ordre contraire** de celui des nombres a et b.

- Une fonction **monotone** sur un intervalle I est une fonction soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse sans utiliser la calculatrice puis justifier.**

	a	b	c	Aide
1. -10^{-3} est égal à :	$-0{,}001$	$0{,}001$	$1\,000$	1
2. $3{,}1 \times 10^4$ est égal à :	$3\,100$	$31\,000$	$310\,000$	1
3. $(2^3 \times 2)^2$ est égal à :	2^6	2^8	2^5	1
4. $10^{-8} \times 10^6$ est égal à :	10^{-2}	10^{-14}	10^2	1
5. $2{,}5 \times 10^{-3}$ est égal à :	$0{,}025$	$-0{,}002\,5$	$0{,}002\,5$	1
6. La fonction cube est :	croissante sur $\mathbb{R}$.	décroissante sur $\mathbb{R}$.	n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.	2
7. On sait qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I. Alors la fonction $2f : x \mapsto 2f(x)$ est :	décroissante sur I.	croissante sur I.	n'est pas monotone sur I.	2

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 Une nouvelle fonction

SCIENCES NUMÉRIQUES ET TECHNOLOGIE

OBJECTIF Définir le logarithme décimal → Cours 1A p. 78

Un virus informatique se propage sur les ordinateurs *via* un email comportant une fausse pièce jointe : un clic pour ouvrir la pièce jointe contamine l'ordinateur où est lu le message. On estime que chaque heure, le nombre d'ordinateurs infectés est multiplié par 10. La ville de Downtown, où se propage le virus, compte plus de 50 000 ordinateurs, que ce soit chez les particuliers ou dans les entreprises.

1. On note a_n le nombre d'ordinateurs infectés à la nième heure. On pose $n = 0$ l'instant où le premier ordinateur a été infecté. Ainsi $a_0 = 1$.

a. Déterminer les valeurs des termes a_1 et a_2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

b. Exprimer a_n en fonction de n.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto 10^x$ définie sur $[0\,;10]$. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	0	1	2		4	5
$f(x)$				1 000		

3. On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction notée **log**, et définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que $\mathbf{log(10^x) = x}$.
Ainsi si on a $10^x = y$ où $y > 0$, alors $\log(y) = x$.
Réciproquement : si, pour $y > 0$, $\log(y) = x$, alors $y = 10^x$.
Exemple : $\log(10^3) = 3$; $\log(10^2) = 2$.
Quelle est la valeur de $\log(1)$? de $\log(10)$?

4. a. À l'aide de la calculatrice et de la touche **log**, recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant éventuellement $\log(y)$ à 0,01 près :

y	10 000	20 000	30 000	40 000	50 000	55 000	60 000
$\log(y)$							

b. En utilisant ce tableau, dire au bout de combien de temps seront infectés tous les ordinateurs de la ville.
Donner le résultat en heures, puis en heures et minutes.
De quelle équation ce résultat est-il une solution approchée ?

2 Une fonction croissante

OBJECTIF Utiliser les propriétés de la fonction logarithme décimal → Cours 1B et D p. 78

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \log(x)$.
f est la fonction logarithme décimal.

1. Tracer à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;10]$.

2. Quel semble être le sens de variation de la fonction logarithme décimal ?

3. On admet que la fonction logarithme décimal est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Comparer les nombres suivants :
- $\log(3{,}5)$ et $\log(3{,}05)$;
- $\log(\sqrt{2})$ et $\log(1{,}4)$;
- $\log(3)$ et $\log(\pi)$.

b. Sachant que $\log(1) = 0$, en déduire le signe de $\log(x)$ lorsque $x > 1$ et le signe de $\log(x)$ lorsque $x < 1$.

c. En déduire le tableau de signes de la fonction logarithme décimal sur $]0\,;+\infty[$.

3 Où l'image d'un produit est la somme des images

OBJECTIF Connaître les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal → Cours 2 p. 80

Partie A

1. On sait que $\log(10^x) = x$ et que $\log(10^y) = y$. À quoi est égal $\log(10^x \times 10^y)$?
Recopier et compléter : $\log(10^x \times 10^y) = \ldots\ldots + \ldots\ldots$
De manière générale, on admettra que pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

2. En utilisant le résultat admis précédemment, à quoi est égal $\log(a^2)$, où a est un réel strictement positif ?
On admettra que, pour tout réel $a > 0$ et tout entier naturel n, $\boldsymbol{\log(a^n) = n\log(a)}$.

3. Soit b un réel strictement positif. On sait que $b \times \frac{1}{b} = 1$. En utilisant cette égalité, montrer que :

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b).$$

Partie B

Le niveau d'intensité sonore N d'un son, exprimé en décibels (dB), est donné par la relation :
$N = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ où I est l'intensité sonore de la source de bruit (exprimée en Watts par mètre carré).

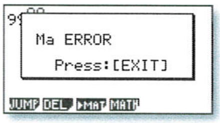
1. Montrer que si on multiplie par 2 l'intensité sonore I, alors cela revient à augmenter de 3 dB environ le niveau sonore N.

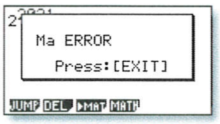
2. L'intensité sonore d'une moto en course est de 90 dB.
Sachant que les intensités sonores de deux motos s'ajoutent, quel est le niveau sonore des deux motos côte à côte ?

4 Utilisation du logarithme décimal dans l'écriture des nombres

OBJECTIF Obtenir le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un très grand nombre → Cours 2 p. 80

1. Voici ce qu'affiche une calculatrice lorsque l'on tape 99^{99} ou bien 2^{2021}.





Certaines calculatrices n'ont pas les capacités suffisantes pour effectuer ces calculs.
La notation log désigne la fonction logarithme décimal.

a. Soit un nombre entier positif N comportant 2 chiffres. N est donc compris entre 10 et 99. On a donc l'encadrement suivant : $10^1 \leqslant N \leqslant 10^2 - 1$, ce qui peut s'écrire aussi $10^1 \leqslant N < 10^2$.
Montrer que l'on a : $1 \leqslant \log(N) < 2$.

b. Soit N un entier positif à 3 chiffres. Montrer que $2 \leqslant \log(N) < 3$.

c. De manière générale, soit N un entier positif à p chiffres. Montrer que $p - 1 \leqslant \log(N) < p$.
Le nombre p de chiffres de l'entier positif N est donc le premier entier supérieur (ou égal) à son logarithme décimal.
On note ENT(x) le nombre entier tel que $\text{ENT}(x) \leqslant x < \text{ENT}(x) + 1$; on a donc : $\boldsymbol{p = \text{ENT}(\log(N)) + 1}$.

2. Application : déterminer le nombre de chiffres des nombres 99^{99} et 2^{2021}.

Cours

1 Fonction logarithme décimal

A Définition du logarithme décimal

Définition Pour tout nombre réel strictement positif b, il existe un unique nombre réel x tel que $10^x = \boldsymbol{b}$.
Ce nombre est appelé **logarithme décimal de** $\boldsymbol{b}$.

Notation

On note **log(b)** le **logarithme décimal** de $\boldsymbol{b}$.

Remarque • $10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b)$.

Exemples
- $10^4 = 10\,000 \Leftrightarrow 4 = \log(10\,000)$
- $10^{-3} = 0{,}001 \Leftrightarrow -3 = \log(10^{-3})$

Définition On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe son logarithme décimal, c'est-à-dire la fonction définie par : $x \mapsto \log(x)$.

Remarques
- La fonction logarithme décimal est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- Pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{\log(10^x) = x}$.

Exemples
- $\log(10^4) = 4$
- $\log(10^{-3}) = -3$

Cas particuliers
$\boldsymbol{\log(1) = 0}$; $\boldsymbol{\log(10) = 1}$ et pour tout entier relatif n, $\boldsymbol{\log(10^n) = n}$.

Exemples
- $\log(1\,000) = \log(10^3) = 3$
- $\log(0{,}1) = \log(10^{-1}) = -1$.

→ Voir Exercice résolu 1

B Sens de variation de la fonction logarithme décimal

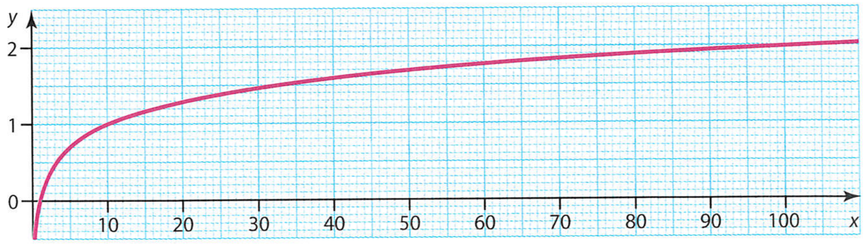
Propriété **(admise)** La fonction logarithme décimal est **strictement croissante** sur l'intervalle $\boldsymbol{]0\,;+\infty[}$. Ce qui entraîne :

$$\boldsymbol{a \leqslant b \Leftrightarrow \log(a) \leqslant \log(b)}.$$

Remarque • $a = b \Leftrightarrow \log(a) = \log(b)$.

C Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction logarithme décimal est représentée ci-contre dans un repère orthogonal du plan.



D Tableau de signes de la fonction log

La stricte croissance de la fonction log et $\log(1) = 0$ permet de dresser le tableau de signes de la fonction log.

x	0		1		$+\infty$
Signe de log(x)	‖	$-$	0	$+$	

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Utiliser la définition du logarithme décimal

Écrire sous forme décimale chacun des nombres suivants :

1. $\log(10^3)$
2. $\log(10^{-6})$
3. $\log(0{,}001)$
4. $\log(10\,000)$
5. $\log(0{,}01)$
6. $\log(0{,}000\,1)$

Méthode — **Pour écrire sous forme décimale un nombre avec la définition du logarithme décimal**

❶ On **écrit** les nombres à l'aide d'une puissance de 10 si besoin.

❷ On **applique** la définition du logarithme décimal.

Solution

1. $\log(10^3) = 3$.
2. $\log(10^{-6}) = -6$.
3. $\log(0{,}001) = \log(10^{-3}) = -3$.
4. $\log(10\,000) = \log(10^4) = 4$.
5. $\log(0{,}01) = \log(10^{-2}) = -2$.
6. $\log(0{,}000\,1) = \log(10^{-4}) = -4$.

→ Voir Exercices 25 à 28 p. 84

Exercice résolu 2 — Utiliser le sens de variation de la fonction logarithme décimal pour comparer deux images

Dans chacun des cas suivants, comparer les deux nombres donnés sans utiliser la calculatrice :

1. $\log(\pi)$ et $\log(3{,}14)$.
2. $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$.
3. $\log(3 \times 10^{-3})$ et $\log(3 \times 10^{-4})$.
4. $\log(1{,}414\,2)$ et $\log(1{,}414\,3)$.
5. $\log(2{,}56 \times 10^{-2})$ et $\log(2\,570 \times 10^{-5})$.

Méthode — **Pour comparer deux images avec le sens de variation de la fonction log**

❶ On **compare** les deux nombres situés entre parenthèses.

❷ Puis on **utilise** la croissance de la fonction logarithme décimal sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ pour **comparer** les images de ces deux nombres.

Solution

1. $\log(\pi)$ et $\log(3{,}14)$

On sait que $\pi > 3{,}14$ donc $\log(\pi) > \log(3{,}14)$ puisque la fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. $\log(\sqrt{2})$ et $\log(\sqrt{3})$

$\sqrt{2} < \sqrt{3}$ donc $\log(\sqrt{2}) < \log(\sqrt{3})$.

3. $\log(3 \times 10^{-3})$ et $\log(3 \times 10^{-4})$

$10^{-3} > 10^{-4}$ donc $\log(3 \times 10^{-3}) > \log(3 \times 10^{-4})$.

On conclut que $\log(3 \times 10^{-3}) > \log(3 \times 10^{-4})$.

4. $\log(1{,}414\,2)$ et $\log(1{,}414\,3)$

Comme $1{,}414\,2 < 1{,}414\,3$, on a donc :

$\log(1{,}414\,2) < \log(1{,}414\,3)$.

5. $\log(2{,}56 \times 10^{-2})$ et $\log(2\,570 \times 10^{-5})$

$2{,}56 \times 10^{-2} = 0{,}025\,6$ et $2\,570 \times 10^{-5} = 0{,}025\,7$

donc $2{,}56 \times 10^{-2} < 2\,570 \times 10^{-5}$.

Grâce à la stricte croissance de la fonction log, on déduit que $\log(2{,}56 \times 10^{-2}) < \log(2\,570 \times 10^{-5})$.

→ Voir Exercices 30 à 32 p. 84

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

Théorème **(admis)** Pour tous nombres réels strictement positifs a et b,

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Exemple • $\log(200) = \log(2 \times 100) = \log(2) + \log(100) = \log(2) + \log(10^2) = \log(2) + 2$.
La calculatrice donne $\log(2) \simeq 0{,}301$ d'où $\log(200) \simeq 2{,}301$.

Le théorème ci-dessus permet de démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés a et b sont deux réels strictement positifs et n est un entier relatif.

$\log(a^n) = n\log(a)$ ① $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log(a)$ ② $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ ③

Démonstration de la relation ① sur quelques valeurs de n

Pour $n = 2$, $\log(a^2) = \log(a \times a) = \log(a) + \log(a)$ d'après le théorème. D'où $\log(a^2) = 2\log(a)$.
Pour $n = 3$, $\log(a^3) = \log(a \times a^2) = \log(a) + \log(a^2) = \log(a) + 2\log(a) = 3\log(a)$.

La relation ② a été découverte dans l'activité 3. **La relation** ③ découle de la relation $a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ et de la relation ②, en appliquant le théorème précédent.

Propriété **(admise)** Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x : $\log(a^x) = x\log(a)$

Exemples

• $\log(3 \times 10^3) = \log(3) + \log(10^3) = \log(3) + 3$

• $\log\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\log(2)$ • $\log\left(\dfrac{3^2}{2^3}\right) = \log(3^2) - \log(2^3) = 2\log(3) - 3\log(2)$

→ Voir Exercice résolu 3

3 Équations du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ et inéquations du type $a^x < b$ ou $x^a < b$

Propriétés **(admises)** Soit x et y deux réels strictement positifs.

$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$ $\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$

Exemples

• Résoudre l'équation $2^x = 100$.

$2^x = 100 \Leftrightarrow \log(2^x) = \log(100)$
$\Leftrightarrow x\log(2) = \log(10^2) = 2$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{\log(2)}$.

• Résoudre l'inéquation $5^x < 0{,}0001$.

$5^x < 0{,}0001 \Leftrightarrow \log(5^x) < \log(10^{-4})$
$\Leftrightarrow x\log(5) < -4$
$\Leftrightarrow x < \dfrac{-4}{\log(5)}$

($\log(5) > 0$: l'inégalité est conservée).

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales

1. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(2)$:
a. $\log(8 \times 10^3)$ **b.** $\log(1\,600)$ **c.** $\log(0{,}32)$
2. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(3)$:
a. $\log(27)$ **b.** $\log(0{,}09)$ **c.** $\log(0{,}008\,1)$
3. Écrire les expressions suivantes en fonction de $\log(a)$, où a est un nombre réel strictement positif :
a. $\log(a^2 \times a^3)$ **b.** $\log\left(\dfrac{a^7}{a^3}\right)$ **c.** $\log\left(\dfrac{1}{a^3}\right)$

Méthode — **Pour simplifier ou transformer des expressions numériques ou littérales**

1. On **identifie** l'opération algébrique qui figure entre les parenthèses et, si besoin, on fait apparaître une puissance de 10.
2. On **applique** les propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal.

Solution

1. a. $\log(8 \times 10^3) = \log(2^3 \times 10^3) = \log(2^3) + \log(10^3) = 3\log(2) + 3$.
b. $\log(1\,600) = \log(16 \times 10^2) = \log(2^4) + \log(10^2) = 4\log(2) + 2$.
c. $\log(0{,}32) = \log(32 \times 10^{-2}) = \log(2^5 \times 10^{-2}) = \log(2^5) + \log(10^{-2}) = 5\log(2) - 2$.
2. a. $\log(27) = \log(3^3) = 3\log(3)$.
b. $\log(0{,}09) = \log(9 \times 10^{-2}) = \log(3^2) + \log(10^{-2}) = 2\log(3) - 2$.
c. $\log(0{,}008\,1) = \log(81 \times 10^{-4}) = \log(3^4) + \log(10^{-4}) = 4\log(3) - 4$.
3. a. $\log(a^2 \times a^3) = \log(a^2) + \log(a^3) = 2\log(a) + 3\log(a) = 5\log(a)$.
b. $\log\left(\dfrac{a^7}{a^3}\right) = \log(a^7) - \log(a^3) = 7\log(a) - 3\log(a) = 4\log(a)$.
c. $\log\left(\dfrac{1}{a^3}\right) = -\log(a^3) = -3\log(a)$.

→ Voir Exercices 39 à 43 p. 85

Exercice résolu 4 — Résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ (x réel), une inéquation du type $a^n < b$ (n entier)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :
1. $2\,000 \times 0{,}4^x = 3\,000$
2. $15 \times 2^x < 8$

Méthode — **Pour résoudre une équation du type $a^x = b$ ou $x^a = b$ (x réel), une inéquation du type $a^n < b$ (n entier)**

1. On **ramène** l'équation (ou l'inéquation) à la forme $a^x = b$ (ou $a^x < b$).
2. On **applique** le logarithme décimal aux deux membres de l'équation (ou de l'inéquation).
3. On **simplifie** les écritures en utilisant la propriété $\log(a^x) = x\log(a)$.
4. On **applique** les opérations algébriques sur l'équation (ou l'inéquation) pour isoler l'inconnue x.

Solution

1. $2\,000 \times 0{,}4^x = 3\,000$ donne $0{,}4^x = \dfrac{3\,000}{2\,000}$ soit $0{,}4^x = 1{,}5$.
$\log(0{,}4^x) = \log(1{,}5)$ d'où $x\log(0{,}4) = \log(1{,}5)$.
On obtient $x = \dfrac{\log(1{,}5)}{\log(0{,}4)}$ ($x \simeq -0{,}442$ à 0,001 près par excès).
2. $15 \times 2^x < 8$ donne $2^x < \dfrac{8}{15}$.
$\log(2^x) < \log\left(\dfrac{8}{15}\right)$ d'où $x\log(2) < \log\left(\dfrac{8}{15}\right)$.
Comme $\log(2) > 0$, on obtient $x < \dfrac{\log\left(\dfrac{8}{15}\right)}{\log(2)}$.
$\dfrac{\log\left(\dfrac{8}{15}\right)}{\log(2)} \simeq -0{,}907$ (à 10^{-3} près par défaut).

→ Voir Exercices 47, 48, 51, 52 p. 85

L'essentiel

1 Fonction logarithme décimal

- Pour tout nombre réel strictement positif b, il existe un unique nombre réel x tel que $10^x = b$.

Ce nombre est appelé **logarithme décimal** de b. On note **$\log(b)$** le logarithme décimal de b.

$$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b).$$

- On appelle **fonction logarithme décimal** la fonction qui à tout nombre réel strictement positif associe son logarithme décimal, c'est-à-dire la fonction définie par : $x \mapsto \log(x)$.

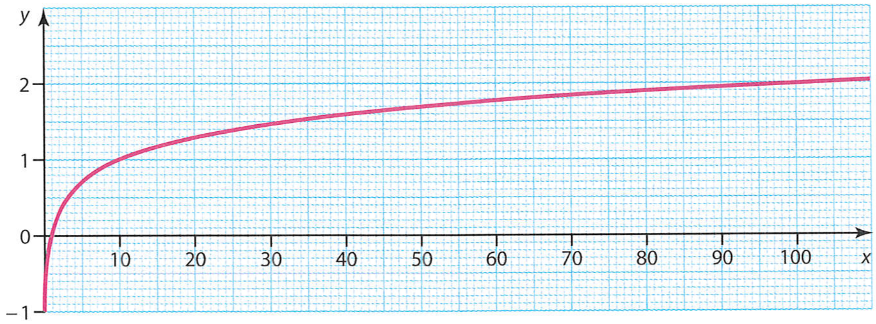
La fonction logarithme décimal est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Pour tout nombre réel x, **$\log(10^x) = x$**.

- **Cas particuliers** : **$\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$** et pour tout entier naturel n, **$\log(10^n) = n$**.
- La fonction logarithme décimal est **strictement croissante** sur l'intervalle **$]0 ; +\infty[$**.

Ainsi, pour tous réels a et b strictement positifs, **$a \leqslant b \Leftrightarrow \log(a) \leqslant \log(b)$**.

- Dans un repère orthogonal du plan, la **courbe représentative** de la fonction logarithme décimal est :



- **Tableau de signes de la fonction logarithme décimal**

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\log(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2 Propriétés algébriques de la fonction logarithme décimal

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, **$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$**.
- a et b étant deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, on a :

$$\log(a^n) = n\log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

- Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre réel x : **$\log(a^x) = x\log(a)$**.

3 Équations du type $a^x = b$ et inéquations du type $a^x < b$

- Soit x et y deux réels strictement positifs.

$$\log(x) = \log(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\log(x) < \log(y) \Leftrightarrow x < y$$