

1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives
pour acquérir
ses automatismes



lienmini.fr/10445-03

Suites géométriques de raison positive

2 Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2,5 et de premier terme $u_0 = 1$.
Calculer u_1 et u_{20} .

3 Un capital de 1 000 euros est placé à un taux annuel de 3 %.
Quelle est sa valeur au bout de 10 ans ?

4 Soit la suite $u_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Montrer que u_n est une suite géométrique et donner les variations de u_n .

Prolongement aux réels

5 On considère la fonction $f(x) = 2^x$ définie sur \mathbb{R} .
Calculer $f(0)$, $f(-0,5)$ et $f(2,5)$.

6 Donner l'expression de la fonction f exponentielle de base $\frac{1}{3}$ telle que $f(0) = -2$.

7 Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -3(0,25)^{-x}$.
Donner la valeur exacte de $f(0)$, $f(-1)$ et $f(0,5)$.

8 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1,2^x$.
1. Calculer $f(2)$ et $f(3,5)$.
2. Déterminer le pourcentage d'évolution entre ces deux images.

9 À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $0,75^x = 5,5$.

Manipuler les propriétés algébriques

Dans les exercices 10 à 13, simplifier à chaque fois l'expression :

10 $\frac{2^{1,5}}{2^{-3,7}} \times 2^{2,3}$

11 $(3^{0,6})^2 \times 3^{-0,8} \times 3^{-1,5}$

12 $\frac{0,1 - 0,1^4}{0,1^2}$

13 $\pi^{-2,5} \times \pi^2 \times \pi^{1,5} \times \sqrt{\pi}$

Sens de variation de $f(x) = a^x$ et $f(x) = k^{ax}$

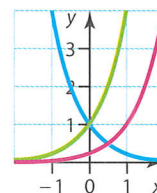
14 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \pi^x$.
Étudier son sens de variation.

15 Soit la fonction $f(x) = \left(\frac{7}{8}\right)^x$ définie sur \mathbb{R} .
Dresser son tableau de variation sur $[-2; 3,5]$.

16 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2(0,25)^x$.
1. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Donner la valeur exacte de $f(0,5)$.

17 Soit la fonction $f(x) = -2,5\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^x$ définie sur \mathbb{R} .
Étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R} .

18 On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions du type $f(x) = ka^x$, où k et a sont des réels et $a > 0$. Trouver graphiquement k et a pour chacune de ces fonctions.



19 Trouver une expression d'une fonction $f(x) = ka^x$ décroissante sur \mathbb{R} dont $f(1) = 2$.

Taux annuel moyen équivalent à n évolutions

20 Calculer le taux d'évolution global correspondant à 18 augmentations de 2 %.

21 La décote d'une voiture est de 20 % par an.
Calculer le taux moyen mensuel de la décote.

22 Le prix d'un produit subit 2 diminutions de 5 % puis 4 augmentations de 3 %.
Calculer le taux moyen après ces 6 évolutions.

23 Une moto de 125 cm³ à 2 500 euros subit 4 hausses mensuelles de 1 % puis 8 baisses consécutives de 0,75 % sur 1 an. Ce prix a-t-il augmenté ou diminué au bout d'un an ?
Calculer le taux moyen mensuel au bout d'un an.

24 Pendant 3 ans, le prix d'un produit suit 2 augmentations de t % et 1 diminution de 5 %. Le taux annuel moyen est de 3,5 %. Déterminer le taux t de l'augmentation.

25 Calculer le taux d'évolution global correspondant à 4 augmentations de 5 % et 5 diminutions de 4 %.
En déduire le taux moyen après ces 9 évolutions.

Fonctions exponentielles
de base a

→ Aide Cours 1 p. 56

Question de cours

26 Étudier le sens de variation de la suite géométrique de raison $0 < q < 1$ et de premier terme 1 puis celui de la fonction $f(x) = 0,8^x$.

27 Soit u_n la suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme 1. Calculer u_1 et u_{10} .

28 Soit $u_n = 0,75^n$. Montrer que u_n est une suite géométrique puis donner son sens de variation.

29 Représenter par un nuage de points les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{2}$.

30 Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme -2 et de raison $1,5$.

31 Représenter la courbe de $f(x) = 1,5^x$ sur $[-2; 5]$.

32 Calculer l'image de $\frac{2}{3}$ par la fonction $f(x) = 0,5^x$.

33 Soit $f(x) = (\sqrt{3})^x$. Calculer $f(1,5)$ et $f(\pi)$.

34 Soit la fonction $f(x) = \left(\frac{9}{4}\right)^x$. Calculer les images de 0 et de 1 par f .

35 Donner l'expression de la fonction exponentielle de base 0,1 et dont l'image de 0 vaut 1.

36 À l'aide de la calculatrice, trouver une valeur de x à 10^{-3} près pour que $3,5^x = 1\,000$.

37 Soit deux suites géométriques $u_n = 2 \times (0,75)^n$ et $v_n = -3(1,2)^{-n}$.

- Déterminer le 1^{er} terme et la raison de chacune des suites.
- Calculer u_1 , v_1 , u_4 et v_4 .

→ Voir Exercice résolu 1 p. 57

38 Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ et $g(x) = -3(1,2)^{-x}$. Calculer les images de $-1,5$ et $2,5$ par f et g .

Vrai ou faux

39 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La fonction $f(x) = 2(0,9)^{-x}$ est positive sur \mathbb{R} .
- Si $f(x) = -2(1,1)^x$ alors $f(5) < f(4)$.
- L'équation $-(0,01)^x = -1$ n'admet pas de solution.

40 Montrer que 2 n'a pas d'antécédent par la fonction $f(x) = -3 \times a^x$.

41 On utilise un tableur pour obtenir différents termes de la suite géométrique u_n de raison 0,95 et de premier terme 35 et différentes images de la fonction $f(x) = 35(0,95)^x$.

	A	B	C	D
1	n	$u(n)$	x	$f(x) = 35(0,95)^x$
2	0	35	0	35
3	1		1	
4	2		2	
5	3		3	
6	4			
7	5			

- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule B3 pour calculer, par recopie vers le bas, tous les termes de la suite ?
- Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 pour calculer, par recopie vers le bas, toutes les images de la fonction f ?
- À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer les antécédents de 2 et de 4,5 par f .

Coup de pouce

- Pour l'antécédent de 2, taper : `1 solve(4.5*0.5^x)=2`

42 Modifier un programme

On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
from math import*
def resol(k):
    x=-20
    while ((1.5**x)<k):
        x=x+0.1
    return x
```

- Que fait ce programme quand on tape `resol(3)`, `resol(-1)` ?
- Modifier ce programme afin qu'il puisse résoudre l'équation $2(0,8)^x = 0,5$. En déduire la solution de cette équation.

QCM

43 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. Si $f(x) = 9^x$ alors :

- a. $f(-1) = 0$ b. $f(-1) = -9$ c. $f(-1) = \frac{1}{9}$

2. Si $f(x) = -2(0,16)^x$ alors $f(0,5)$ est :

- a. positive b. $-1,6$ c. $-0,8$

3. La solution de l'équation $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4\sqrt{6}}{27}$ est :

- a. $\sqrt{6}$ b. $\frac{7}{2}$ c. $\frac{\sqrt{6}}{27}$

Propriétés algébriques

→ Aide **Cours 2** p. 56

Question de cours

44 Montrer que : $\frac{2^{2,5} \times 2^{-1,5}}{(2^{-3,5})^{-1,5}} = 2^{-4,25}$.

45 Simplifier : $0,89^{1,5} \times 0,89 \times 0,89^{-3,2}$.

46 Simplifier : $3,5^{2,2} \times 2^{2,2} \times 0,5^{2,2}$.

47 Simplifier : $\frac{4,1^{2,5} \times 4,1^{-5,2}}{4,1^{-4,8} \times 4,1^{2,7}}$.

48 Montrer que : $5,5^{-1,2} \times \sqrt{5,5} = 5,5^{-0,7}$.

49 Calculer à l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près, $(2,5^{-3,2})^{2,7}$.

50 Simplifier : $\pi^{2,8} \times (\pi^{-1,5})^2$.

51 Simplifier : $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^3 \times 2,25^{-1,5}\right)^{-1}$.

52 Simplifier les expressions suivantes :

$A = 5^{-3} \times 5^{-5}$ $B = \frac{2,7^3 \times 2,7^{-5}}{2,7^5}$ $C = (4,5^3)^{-2,1} \times 4,5^{6,2}$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 57

53 Si $f(x) = 2,1^x$ simplifier le calcul : $f(1) \times f(-2,5) \times f(3)$.

54 Développer l'expression : $\frac{1}{2}(0,5^x - 1)(0,5^x + 1)$.

55 Montrer que : $\left(\frac{a^{1+0,25x}}{a^{1-0,25x}}\right)^2 = a^x$.

56 Écrire avec une seule base a l'expression : $(a^{0,8} \times a^{-1,3} \times a^{2,5})^3$.

QCM

57 Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. $\frac{a^{x-1} \times a^2 \times a^{-x}}{a^{x+1}}$ vaut :

a. a^x b. a^{-x} c. 1

2. $(3^{1,2})^{-0,5} \times \frac{3}{3^{-2,5}}$ est égal à :

a. $3^{-2,9}$ b. $3^{1,6}$ c. $3^{2,9}$

3. Si $f(x) = -1,5(0,4)^x$ alors $f(0,5) \times f(-1,5)$ est égal à :

a. $-1,5(0,4)^{-1}$ b. $\frac{90}{16}$ c. $2,25(0,4)^1$

Vrai ou faux

58 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. $(\sqrt{3}, 1)^3 = 3,1^{3,5}$

2. $(a^{2x+3})^2 = a^{4x+9}$

3. $2,5^{2,7} + 2,1^{1,3} = 2,1^4$

Sens de variation

→ Aide **Cours 3** p. 58

Question de cours

59 Soit la fonction $f(x) = 3,2^x$ définie sur \mathbb{R} .
Dresser son tableau de variation sur $[-2 ; 2]$ en justifiant.

60 Dans chaque cas, donner le sens de variation de f sur \mathbb{R} :
a. $f(x) = 2,21^x$ b. $f(x) = 0,94^x$

61 Dans chaque cas, donner le sens de variation de g sur \mathbb{R} :
a. $g(x) = 0,99^{-x}$ b. $g(x) = 1,001^{-x}$

62 Dans chaque cas, donner le sens de variation de f sur \mathbb{R} :
a. $f(x) = 0,005 \times 2,6^x$ b. $f(x) = 2\,500 \times 0,99^x$
→ Voir **Exercice résolu 3** p. 59

63 Dans chaque cas, donner le sens de variation de h sur \mathbb{R} :
a. $h(x) = 2,3(5^x)$ b. $h(x) = 0,4(0,87^x)$

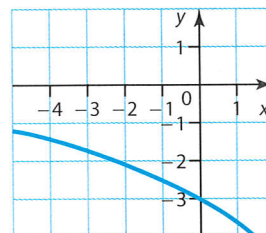
64 Dans chaque cas, donner le sens de variation de h sur \mathbb{R} :
a. $h(x) = 8\,000(0,25^{-x})$ b. $h(x) = 0,4(0,87^{-x})$

65 On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction $f(x) = ka^x$.

Quelle est l'expression de f parmi les 4 propositions suivantes ?

Justifier.

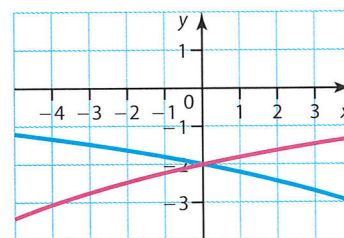
- $f_1(x) = 3(0,8)^x$
- $f_2(x) = -3(0,8)^x$
- $f_3(x) = -3(1,2)^x$
- $f_4(x) = 3(1,2)^{-x}$



66 On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g telles que :

$f(x) = -2(0,9)^x$ et $g(x) = -2(1,1)^x$.

Identifier la courbe de f et celle de g .



67 Montrer que la courbe de la fonction $f(x) = 2(0,5)^x$ passe par le point $A(-1 ; 4)$.

68 Étudier le sens de variation de la fonction définie par : $f(x) = -3,1(3,1)^x$.

69 Donner l'expression de la fonction $f(x) = ka^x$ telle que $f(0) = -2$ et $f(1) = -1$.

Exercices

Pour commencer

- 70** Soit la fonction $f(x) = (2,8)^{-x}$ définie sur \mathbb{R} .
1. Dresser son tableau de variation sur $[-1,5 ; 1,5]$ en justifiant.
 2. Pourquoi 0 n'a pas d'antécédent par f ?

- 71** Voici le tableau de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$.
1. Déterminer les valeurs de k et a .
 2. Compléter alors l'image de 1 et de 3,5.

x	-1	0	1	3,5
f(x)	5	1,5		

- 72** Trouver l'expression de la fonction exponentielle de base a de la forme $f(x) = ka^{x-1}$ dont $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$.

QCM

- 73** Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.
1. La fonction $f(x) = 0,8^{-x}$ est :
a. croissante b. décroissante c. négative
 2. la fonction $f(x) = -3(1,001)^x$ est :
a. croissante b. décroissante c. croissante puis décroissante
 3. la fonction $f(x) = -a^x$ avec a réel tel que $0,3 < a < 0,9$ est :
a. négative b. décroissante c. positive

Vrai ou faux

- 74** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
1. $f(x) = -2,1(0,1)^x$ est décroissante sur \mathbb{R} .
 2. Toute fonction exponentielle de base $a > 0$ est soit croissante soit décroissante.
 3. La fonction $f(x) = \frac{2}{3} \times (\pi^{-x})$ est décroissante sur \mathbb{R} .

Taux d'évolution moyen

→ Aide **Cours 4** p. 58

Question de cours

- 75** 1. Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 5 hausses de 3 %.
2. Quel est le taux d'évolution moyen équivalent à 5 augmentations de 3 % ?
- 76** Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 20 augmentations de 0,5 %.
- 77** Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 3 baisses de 2 %.

- 78** Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à une hausse de 1 % et une baisse de 2 %.

- 79** Calculer le coefficient multiplicateur global correspondant à 2 baisses de 3 % suivies d'une baisse de 2 %.

- 80** Déterminer le taux moyen équivalent à 2 augmentations de 3 % suivi de 2 diminutions de 1 %.

- 81** Déterminer le taux moyen équivalent à 3 baisses de 2 % suivi de 3 hausses de 3 %.

Vrai ou faux

- 82** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
1. 2 baisses de 10 % et 1 hausse de 20 % correspond à une baisse de 1 %.
 2. Le taux annuel moyen correspondant à 2 hausses annuelles de 10 % puis 3 baisses annuelles de 5 % est moins de 1 %.
 3. Un taux annuel moyen est toujours positif.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 59

QCM

- 83** Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.
1. Le taux d'évolution moyen équivalent à 10 augmentations de 3,2 % est environ :
a. $\frac{1}{3}$ b. 0,315 c. 3,2
 2. Le taux d'évolution moyen correspondant à 2 augmentations de 10 % et une baisse de 5 % est :
a. 5 % b. 4,75 %
c. solution de l'équation $(1+t)^3 = 1,2 \times 0,95 \times 1,2$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 59

- 84** Montrer que la solution x de l'équation $(1+x)^5 = 5,5$ est $5,5^{0,2} - 1$.


- 85** **ALGO**  Voici un algorithme en langage naturel et en langage Python.

```
from math import*
D= float(input("saisir D"))
F=float(input("saisir F"))
N=int(input("saisir N"))
C=F/D
Q=C**(1/N)
T=(Q-1)*100
print ("le taux est ",T)
```

```
D ← ?
F ← ?
N ← ?
C ← F/D
Q ← C1/N
T ← (Q-1) × 100
Afficher T
```

1. Expliquer les valeurs de C , Q et T .
2. La population d'une ville est passée de 10 453 à 23 542 habitants en 10 ans.
En utilisant cet algorithme, calculer le taux de croissance moyen annuel.

Fonctions exponentielles de base a

86  Une usine fabrique des valves pour robinets. Le 1^{er} janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P , en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3 % chaque mois à partir de cette date.



Au bout de n mois écoulé, on a donc la suite $P_n = 2 \times (1,03)^n$ pour n entier.

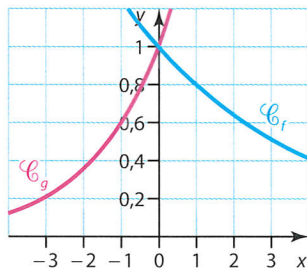
Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction $P(x) = 2 \times (1,03)^x$ où x est un réel.

On considère qu'un mois dure 30 jours. Au bout de 6 jours, la production sera ainsi de $P(0,2)$ et au bout de 15 jours $P(0,5)$.


1. Montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 2.
2. Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ?
3. Calculer la production le 1^{er} février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.

À l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de valves de robinets dépassera 4 500 par jour.

87 1. Quelle semble être la nature des fonctions f et g représentées ci-contre ? Justifier.



2. En vous appuyant sur cette hypothèse, déterminer les expressions de f et de g .
3. La courbe de g passe-t-elle par le point A $(-3 ; 0,2)$?
4. La courbe de f passe par le point B $(x ; 3)$. Quelle est la valeur de x ?

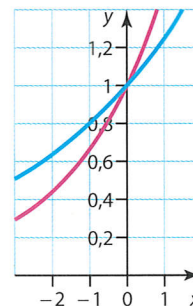
88  Mélissa a placé une certaine somme sur un compte épargne à 0,75 % d'intérêts annuels et a un solde de 992 euros à ce jour.




1. Elle souhaite fermer son compte dans deux ans, trois mois et quatre jours (1 an = 365 jours et 1 mois = 31 jours), quel sera alors le solde de son compte ?
2. Le compte a été créé il y a 10 ans 3 mois et 20 jours. Combien Mélissa avait-elle placé initialement ?
3. Combien de jours devrait-elle attendre au minimum pour que son compte atteigne 2 000 euros ?

89 Soit la fonction $f(x) = 1,5^x$ et la fonction g telle que $g(x) = 1,25^x$.

1. Graphiquement, en combien de points ces courbes semblent-elles se couper ?
2. Montrer que résoudre $f(x) = g(x)$ revient à résoudre l'équation $1,2^x = 1$ puis conclure.



90  Emma veut vendre un casque audio qu'elle n'utilise plus et dont le prix est compris entre 10 et 30 euros sur les sites de vente d'occasion.



Elle estime que, pour un prix de x euros d'occasion, l'offre $f(x)$ sera $f(x) = 1,05^x$ et la demande $g(x) = 7 \times (1,05)^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variation et de signes de f et de g sur $[10 ; 30]$.
2. Montrer que le prix d'équilibre est solution de l'équation $1,1025^x = 7$.
3. En déduire le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre.

Coup de pouce

- Le prix d'équilibre est celui qui égalise la demande et l'offre, il est donc solution de l'équation $f(x) = g(x)$.



Sens de variation

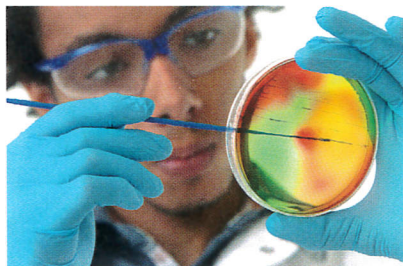
91   Utiliser un programme

Soit la fonction $f(x) = 3,5^x$ définie sur $[-1 ; 5]$.

1. Dresser son tableau de signes et de variation sur $[-1 ; 5]$.
2. En utilisant le tableau de variation, dire pourquoi l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur $[-1 ; 5]$.
3. Utiliser l'algorithme ci-dessous en langage Python pour résoudre l'inéquation $f(x) > 2 000$.

```
from math import*
def resol(k):
    x=-1
    while(3.5**x<k):
        x=x+0.1
    return x
```

- 92**   Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; 8]$ par : $f(x) = 25\,000 \times 1,1^x$.



- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 2 h puis après 4 h 30.
- Déterminer les variations de f sur $[0; 8]$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura doublé.

- 93** Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :
- $$f(x) = 0,3^{x+2} + 3 \times 0,3^{x+1} - 0,3^x.$$

- Calculer les images de 0, 1 et -2 par f .
- Factoriser l'expression de f par $0,3^x$.
- En déduire le signe et les variations de f sur \mathbb{R} .


Vrai ou faux

- 94** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

- Une suite géométrique de raison 1,47 correspond à une fonction exponentielle de base 0,47.
- Une fonction exponentielle de base 0,95 correspond à une décroissance de 5 %.
- Une grandeur qui a un taux de croissance annuel de 200 % correspond à une fonction exponentielle de base 2.
- Une fonction exponentielle de base $\frac{1}{22}$ est décroissante sur \mathbb{R} .

QCM

- 95** Indiquer pour chaque question la bonne réponse.
- La fonction $f(x) = -2(0,54)^{-x}$ est :
 - décroissante sur \mathbb{R} .
 - positive sur \mathbb{R} .
 - de base 0,54.
 - La fonction $f(x) = kq^x$ pour k réel et q réel tel que $q > 0$ est :
 - décroissante si $0 < q < 1$.
 - positive si $q > 1$.
 - croissante pour $0 < q < 1$.
 - La fonction exponentielle de base a $f(x) = a^x$ est :
 - nulle en une unique abscisse.
 - positive sur \mathbb{R} .
 - positive si $a > 1$.

- 96**   **Tester un programme**
Soit la fonction $f(x) = 2,5^x$ définie sur $[0; 10]$.

- Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $[0; 10]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution pour k réel appartenant à l'intervalle $[0; 500]$.
- On considère l'algorithme suivant traduit en langage Python :

```
from math import*
def resol(k):
    a=0
    b=10
    while b-a>1:
        m=(a+b)/2
        if (2.5**m<k):
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

- Exécuter la fonction `resol(20)`. Interpréter le résultat
- Reproduire et compléter le tableau ci-dessous pour retrouver le résultat de **a**.

a	0	0	...
b	10	5	...
$b - a > 1$?	vrai	...	
m	5	...	
$2,5^x < k$?	faux	...	

Taux d'évolution moyen

- 97** Soit t le taux d'évolution annuel de 24 %. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer à 0,01 % près :
- Le taux mensuel moyen équivalent à t .
 - Le taux trimestriel moyen équivalent à t .
 - Le taux semestriel moyen équivalent à t .
 - Le taux quotidien moyen équivalent à t .

- 98** Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11 % pendant 4 ans puis a augmenté de 8 % pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?



99 De 30 % en 2018, le taux d'endettement d'un ménage est passé à 10 % en 2020.

- Déterminer le taux d'évolution moyen annuel.
- Si l'évolution se poursuit, quel sera le taux d'endettement en 2030 ?

100 En 2000, le nombre d'habitants d'un pays était de 11 millions. Depuis, ce nombre a augmenté de 3,5 % par an pendant 10 ans successivement puis a baissé de 1 % jusqu'en 2020.

- Quelle est sa population en 2020 ?
- Calculer le taux annuel moyen d'évolution.

101 La cote argus d'une voiture mise en circulation le 1^{er} avril 2015 est modélisée par la fonction $f(x) = 21\,345(1,2)^{-x}$ où x est le temps écoulé en années depuis le 1^{er} avril 2015.



- Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter les résultats.
- En déduire le taux de diminution annuel de la valeur de la voiture.
- Cette voiture est revendue le 1^{er} octobre 2019.
 - Calculer la cote argus de cette voiture à cette date, puis le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat.
 - En déduire le taux mensuel moyen de la décote.

102 De 2010 à 2017, le nombre d'étudiants à l'université est passé de 1 437 000 à 1 584 800 pour atteindre 1 672 300 à la rentrée 2018.



- Calculer le coefficient multiplicateur entre 2010 et 2017 puis entre 2017 et 2018.
- En déduire le taux d'évolution moyen annuel du nombre d'étudiants entre 2010 et 2018.

103 Le gouvernement d'un pays envisage de baisser une taxe de 30 % en 5 ans.

- Justifier que le pourcentage de baisse moyenne annuelle est de 6,89 %.

2. La première année, la taxe a baissé de 5 %, la deuxième de 1 % et la troisième de 3 %. Quel pourcentage de baisse annuel moyen doit décider ce gouvernement pour atteindre les objectifs en supposant que le pourcentage est le même les deux dernières années ?

104 **STMG** Paul, élève de terminale STMG, dispose de 300 euros qu'il souhaite placer sur un livret au taux annuel de 0,78 %.



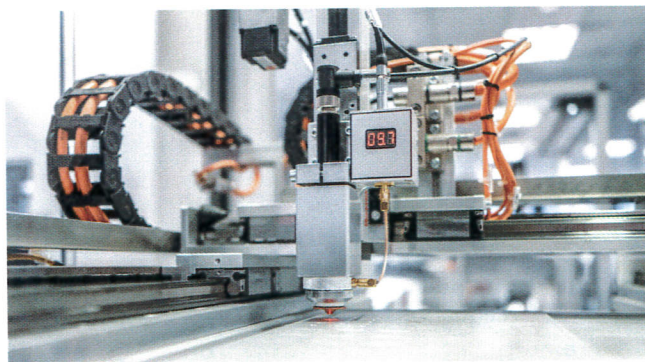
- Quel est son capital au bout de 36 mois ?
- Quel sera son capital quand il aura doublé son âge ?
- Combien d'années Paul devra-t-il patienter pour doubler son capital initial ?

105 **STL** On injecte à un patient 2 mL d'un médicament. Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.



- Quelle est la quantité de médicament dans l'organisme au bout de 3 h ? Au bout d'un jour ?
- Donner l'expression de la fonction exponentielle de base a .
- Au bout de combien de temps le médicament sera-t-il totalement assimilé ?

106 **STI2D** Une machine-outil achetée neuve coûte 20 000 euros. Son prix de revente baisse de 18 % par an.



- Quel est le prix de revente au bout de 3 ans ? de 4 ans et demi ?
- Au bout de combien d'années le prix de revente passera en dessous de 2 000 euros ?
- Pour des raisons financières, la machine doit être vendue au bout de 37 mois. Quel sera alors son prix de revente ?



Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
107 La suite $u_n = 2(0,8)^{-n}$ est géométrique et croissante.		
108 L'image de $-0,5$ par la fonction $f(x) = 2(4)^{-x}$ est 4.		
109 $\frac{3^{2,5} \times \sqrt{3}}{9^{0,5}}$ est égal à 9.		
110 La fonction $f(x) = -3,1 (3,1)^x$ est décroissante.		
111 0 n'a pas d'antécédent par la fonction $f(x) = -2 \times (1,2)^x$.		
112 Si $f(x) = a^x$ alors $f(x) \times f(-x) = 1$.		
113 La courbe représentative de la fonction $f(x) = 2(0,8)^{-x}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.		
114 Un taux d'évolution moyen annuel n'est jamais négatif.		
115 Entre 2005 et 2011, le prix du gaz a augmenté de 65 %, ce qui correspond à un taux annuel moyen de 10,8 %.		
116 Si un taux annuel moyen est de 5,2 % alors l'évolution sur 10 ans est de plus de 52 %.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- 117 La fonction $f(x) = -3(0,5)^x$ a des images sur \mathbb{R} :
- a. positives. b. négatives. c. positives si $x < 0$ et négatives si $x > 0$.
- 118 $1 + 1,1^x + 1,21^x =$
- a. $\frac{1-1,1^{3x}}{1-1,1}$ b. $10 - 1,1^{3x}$ c. $10(1,1)^{3x}$
- 119 La fonction $f(x) = a^x$ avec $a > 0$ est :
- a. définie sur \mathbb{R}^+ . b. toujours strictement positive. c. toujours strictement croissante.
- 120 La fonction $f(x) = -2(1,5)^{-x}$ est :
- a. croissante. b. décroissante. c. positive.
- 121 L'équation $(2,1)^x = (2,1)^{-2x+1}$ admet sur \mathbb{R} :
- a. aucune solution. b. une seule solution. c. une infinité de solutions.
- 122 La solution t de l'équation $(1-t)^7 = 1,45$ est :
- a. $1,45^7 - 1$ b. $(1-1,45)^{\frac{1}{7}}$ c. $1-1,45^{\frac{1}{7}}$
- 123 Le taux annuel moyen correspondant à 5 augmentations de 2 % suivies de 3 diminutions de 1 % est :
- a. 7 %. b. moins de 7 %. c. plus de 7 %.

→ Vérifier les résultats p. 324



124 In English

For a man, the heart frequency during the recovery stage after a 8 minutes exercise test is modelled by $f(t) = 660(0,85)^t$ for t time in minutes and the numbers of beats per minute.

1. Give the variation of f .
2. Give the numbers of beats after a 10 minutes recovery.
3. Find the recovery time threshold for a heart rate below 115 beats.

125 COMPÉTENCE Modéliser

Les organismes vivants contiennent du carbone 14 (élément radioactif). À leur mort, ce carbone 14 présent se désintègre. La concentration en carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort (t milliers d'année) est modélisée par la fonction $f(t) = 15,3 \times (0,883)^t$.

1. Déterminer les variations de f sur $[0; +\infty[$.
2. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration de carbone 14 égale à 7,24 unités. Estimer l'âge de ces fragments.
3. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus dater. Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

126 COMPÉTENCE Calculer

La longueur d'un glacier, en km, est donnée par la fonction $f(t) = 15,6 - 0,2(1,01)^t$ où t est le nombre d'années écoulées depuis l'année 2000.



1. Quelle était la longueur du glacier en 2000 ? Quelle était sa longueur en 2019 ?
2. À l'aide de la calculatrice, estimer l'année de disparition du glacier.

127 COMPÉTENCE Raisonner, calculer, communiquer

La résistance à la compression (en mégapascal) d'une dalle en béton est modélisée par la fonction $R(t) = 28(1 - (0,87)^t)$ où t est la durée de séchage en jours.

1. Calculer la résistance quand le béton vient d'être préparé, c'est-à-dire pour $t = 0$.
2. Pourquoi cette résistance n'atteindra jamais 28 mégapascals ?



3. On peut marcher sur cette dalle dès que la résistance est supérieure à 14 mégapascals. Après combien de jours de séchage est-il possible de marcher dessus ?

128 COMPÉTENCE Modéliser

Dans un pays, entre 2014 et 2019, les prix ont baissé de 25 %. L'indice des prix (base 100) est modélisé par la fonction $f(t) = 100(0,994)^t$ où t est le temps en mois à partir de janvier 2014.

1. Calculer l'indice le 1^{er} janvier 2015 puis le 1^{er} mai 2017.
2. Calculer le taux moyen annuel après 5 baisses.

129 COMPÉTENCE Modéliser, calculer

Le nombre mensuel de visiteurs d'un musée est modélisé par $v(t) = 1\,520(1,05)^t$ où t est le temps en mois écoulé depuis l'ouverture en mai 2015.



1. Calculer le nombre de visiteurs le 1^{er} janvier 2017.
2. Calculer le nombre de visiteurs prévu le 1^{er} janvier 2022.
3. Calculer $\frac{v(1) - v(0)}{v(0)}$.

Interpréter ce calcul et le contextualiser.

4. Il faudra recruter un agent supplémentaire si le nombre de visiteurs dépasse 3 000. Déterminer la date de recrutement d'un agent.

► Créer un algorithme de construction des points de $f(x) = a^x$

CAPACITÉ Intercaler entre deux points un troisième point d'abscisse (respectivement d'ordonnée) la moyenne arithmétique (respectivement géométrique) des abscisses (respectivement des ordonnées) des deux points initiaux.

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Donner la forme explicite de la suite (u_n) .
2. À l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n) .
3. En remarquant que $1,5^{-n} = \frac{1}{1,5^n}$ pour n entier naturel, donner les différentes valeurs de $1,5^n$ pour $-7 < n < 7$ puis représenter le nuage de points $(n; 1,5^n)$.
4. Soit $B(n; 1,5^n)$ un point du nuage précédent.
 - a. Quelle est l'ordonnée du point A, d'abscisse $n - 1$, puis celle du point C, d'abscisse $n + 1$?
 - b. Comparer la moyenne arithmétique des abscisses des points A et C à l'abscisse de B.
 - c. Calculer $\sqrt{y_A \times y_C}$.

Aide : la moyenne arithmétique des abscisses des points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$ est $\frac{x_A + x_B}{2}$.

La moyenne géométrique des ordonnées des points A $(x_A; y_A)$ et B $(x_B; y_B)$ est $\sqrt{y_A \times y_B}$.

Remarque : chaque point du nuage a pour abscisse la moyenne arithmétique des abscisses des deux points qui l'entourent et a pour ordonnée la moyenne géométrique des ordonnées des points qui l'entourent.



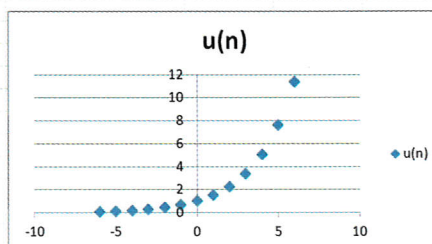
En salle informatique



lienmini.fr/10445-05

1. Reproduire sur tableur la feuille de calcul ci-dessous :


	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	$u(n)$	abscisse nouveau point	ordonnée					
2	-6	0,0877915							
3	-5	0,13168724							
4	-4	0,19753086							
5	-3	0,2962963							
6	-2	0,44444444							
7	-1	0,66666667							
8	0	1							
9	1	1,5							
10	2	2,25							
11	3	3,375							
12	4	5,0625							
13	5	7,59375							
14	6	11,390625							



2. Saisir en C2 la formule `=MOYENNE(A2;A3)` et la copier jusqu'en C13 puis saisir en D2 la formule `=MOYENNE.GEOMETRIQUE(B2;B3)` et la copier jusqu'en D13.
3. Insérer ces nouveaux points sur le graphique.
- Aide :** faire un clic droit sur le graphique puis **Sélectionner des données** et **Ajouter**.
4. Refaire ce processus plusieurs fois : on retrouve la courbe représentative de la fonction $f(x) = 1,5^x$.

SUJET RÉSOLU

Énoncé	Automatisme à utiliser	Réponse
130 Si $u_n = 2^n$, calculer u_3 .	$u_3 = 2^3$	8
131 Si $f(x) = 4^x$, calculer $f(0,5)$.	$a^{0,5} = \sqrt{a}$	$f(0,5) = 4^{0,5} = 2$
132 Simplifier : $1,5^{-2,3} \times 1,5^{5,3}$.	$a^p \times a^q = a^{p+q}$	$1,5^3$
133 Simplifier : $\frac{0,8^{2,5} \times 0,8^{-1}}{(0,8^{(1,5)^2})}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$0,8^{-1,5}$
134 Donner le sens de variation de $f(x) = -6(0,54)^x$ sur \mathbb{R} .	Étudier le signe de k et comparer la base à 1.	f croissante
135 Si le coefficient multiplicateur global est de 1,21 sur 2 évolutions, alors le taux moyen t est de :	On applique la formule $= 100 \left(\text{CM}^{\frac{1}{2}} - 1 \right)$	$t = 10 \%$

136  Après administration d'un médicament, on modélise la concentration (en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$) de son principe actif dans le sang par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 15 (0,82)^t$ où t est le temps en heure après l'injection.

- Déterminer la concentration initiale.
- Déterminer la concentration au bout de deux heures.
- Étudier son sens de variation en justifiant.
- Au bout de combien de temps la concentration aura-t-elle diminué de moitié ?
- Estimer à l'aide de votre calculatrice au bout de combien de temps la concentration sera inférieure à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Méthode à appliquer	Solution rédigée
1. Le temps initial est le temps $t = 0$. On remplace t par 0 dans l'expression de $f(t)$.	1. $f(0) = 15 (0,82)^0 = 15 \times 1 = 15 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
2. Ici, $t = 2$. On remplace t par 2 dans l'expression de $f(t)$.	2. $f(2) = 15(0,82)^2 = 10,086 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
3. $f(t)$ est de la forme ka^x avec $k = 15$ et $a = 0,82$. On applique les propriétés du cours sur le sens de variation. → Voir Exercice résolu 3 p. 59	3. $k = 15 > 0$ et $a = 0,82 < 1$ donc f est strictement décroissante.
4. Il faut résoudre $f(t) = 7,5$.	4. À la calculatrice, on trouve qu'au bout de 3 h 30 la concentration diminue de moitié ($f(t) < 7,5$).
5. Utiliser le menu TABL de la calculatrice.	5. Au bout de 36 h 52 min ($f(36,86) = 9,98 \cdot 10^{-3}$) la concentration sera inférieure à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

137

CAPACITÉ



- Modéliser une situation par une fonction du type $f(x) = ka^x$.

Wetube est un site spécialisé dans le streaming écologique sur Internet. La durée de chargement d'une vidéo (en secondes) en fonction du nombre d'internautes connectés x (en milliers) est modélisée par la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par $f(x) = 0,25(1,5)^x$.

1. Quelle est la durée de chargement si 1 000 internautes sont connectés ? 5 000 internautes ?

Méthode Il s'agit de calculer les images par f de 1 et 5.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

2. Calculer $f(8)$ et interpréter le résultat
3. Étudier le sens de variation de f et interpréter le résultat.

Méthode On étudie le signe de k et on compare la base a à 1.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 59

4. À l'aide de la calculatrice, estimer à partir de combien de personnes connectées la durée de chargement dépasse 3 secondes.

5. Compléter ce programme python pour répondre à la question 4.

```
from math import *
def resol(k):
    t=1
    while (0.25*(1.25)**t < k):
        t=t+0.1
    return t
```

138

CAPACITÉ



- Modéliser une situation par une suite et par une fonction exponentielle de base a .

1. Une ville comptait 20 000 habitants en 2015 et chaque année ce nombre a baissé de 7 %.

a. Modéliser cette situation par une suite géométrique u , u_n représentant le nombre d'habitants en milliers à l'année 2015 + n .

Méthode La forme explicite d'une suite géométrique est $u_n = u_0 \times q^n$ où q est la raison de la suite.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

b. Calculer le nombre d'habitants en 2019.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population sera inférieure à 15 000 habitants.

d. Compléter cet algorithme pour répondre à la question c.

```
from math import *
def seuil(N):
    N=0
    U=20
    while (U>15):
        N=N+1
        U=20*(0.93**N)
    return(N)
```

e. Représenter les premiers termes de cette suite par un nuage de points.

2. On admet que le nuage de points obtenu se situe sur la représentation d'une fonction exponentielle $f(x) = ka^x$.

a. Déterminer une expression de f .

Méthode Utiliser deux images par f et identifier k et a .

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 57

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice le mois et l'année où le nombre d'habitants sera divisé par 2.

139

CAPACITÉ

- Rechercher un taux moyen.

1. On sait qu'entre 2002 et 2009, le nombre d'internautes en Chine est passé de 60 millions à 385 millions. Calculer le taux d'évolution moyen annuel du nombre d'internautes en Chine entre 2002 et 2009.

Méthode Le coefficient multiplicateur CM est le quotient $\frac{V_A}{V_D}$ où V_A est la valeur d'arrivée et V_D la valeur

de départ. On a donc : $t = 100 \left(\frac{V_A}{V_D}^{\frac{1}{7}} - 1 \right)$.

2. Le nombre d'internautes a quadruplé entre 2009 et 2015.

a. Calculer le taux moyen annuel entre 2009 et 2015.

Méthode Le coefficient multiplicateur CM est donné par le terme « a quadruplé »...

b. Donner le nombre d'internautes en 2015.

3. Le nombre a augmenté de 15 % entre 2015 et 2016 puis de 32 % entre 2016 et 2019.

Déterminer le taux annuel moyen entre 2015 et 2019 puis le nombre d'internautes en 2019 en Chine.

Méthode On applique la formule avec $n = 4$

$CM = 1,15 \times 1,32^3$ et $t = 100(CM^{\frac{1}{4}} - 1)$.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 59

140



PYTHON

Une espèce animale est menacée depuis 1950. Le nombre d'animaux, en millions, de cette espèce est donné par la fonction $f(t) = 35(0,948)^t$ où t est le temps en années écoulé depuis 1950.

1. Calculer $f(0)$ et $f(50)$. Interpréter concrètement ces résultats.
2. Calculer le pourcentage de diminution de cette espèce en 50 ans puis le taux annuel moyen de baisse sur ces 50 ans.
3. Pourquoi cette espèce est-elle menacée ? Va-t-elle disparaître complètement ? Justifier.
4. À l'aide de la calculatrice, résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ et interpréter le résultat.
5. Compléter l'algorithme ci-dessous en langage python qui permet de répondre à la question 4.

```
from math import*
def resol(k):
    x=0
    while (          ):
        x=x+1
    return x
```

141



Le nombre, en milliards, de SMS envoyés par les Français peut être modélisé par la fonction $s(t) = 3,3(1,44)^t$ où t est le nombre d'années écoulées depuis 2005.

1. Calculer le nombre de SMS envoyés en 1 an.
2. Calculer $\frac{s(t+1)}{s(t)}$.

En déduire le taux annuel d'augmentation du nombre de SMS envoyés.

3. Répondre aux affirmations suivantes par vrai ou faux en justifiant.
 - a. La barre des 200 milliards de SMS a été atteinte en 2019.
 - b. Le taux d'augmentation en 10 ans est de 235 %.
 - c. Le taux annuel moyen sur 10 ans est de 23,5 %.

142



Partie A

Une dose d'un médicament est injectée dans le sang par piqure intraveineuse. On suppose que le médicament se répartit instantanément dans le sang et que sa concentration initiale dans le sang est égale à $85 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$. On admet que le corps élimine chaque heure 25 % du médicament. On considère la suite (C_n) où C_n désigne la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang n heures après l'injection avec n désignant un entier naturel. On a ainsi $C_0 = 85 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Calculer C_1 et C_2 . Arrondir à 0,01. Interpréter ces deux résultats.

2. Montrer que la suite (C_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Pour calculer à chaque heure la concentration de médicament présente dans le sang, on utilise un tableur.

Quelle formule à recopier vers le bas, faut-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les premières valeurs de la suite (C_n) ?

4. Exprimer C_n en fonction de n . En déduire la concentration de médicament dans le sang au bout de 14 heures. Arrondir à 0,01.

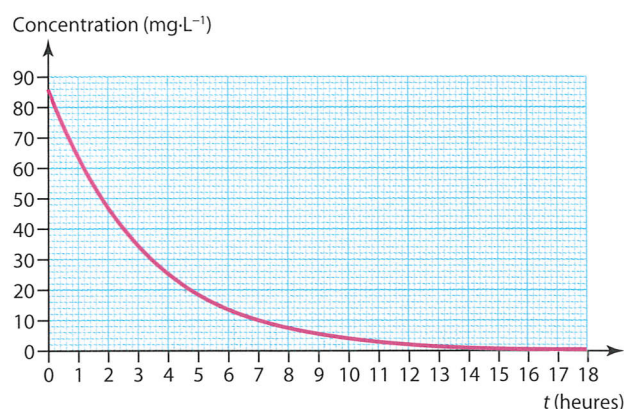
	A	B
1	n	C_n
2	0	85,00
3	1	
4	2	
5	3	35,86
6	4	26,89
7	5	20,17
8	6	15,13
9	7	11,35
10	8	8,51
11	9	6,38
12	10	4,79

Partie B

Pour avoir des résultats plus précis, on admet que la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ de médicament dans le sang t heures après l'injection peut être modélisée par la fonction G définie sur $[0 ; 19]$ par :

$$G(t) = 85 \times 0,75^t$$

La courbe représentative de la fonction G est tracée ci-dessous :



1. Par lecture graphique, avec la précision permise par le graphique, déterminer :

- a. La concentration de médicament présente dans le sang au bout de 4 heures et 30 minutes.
- b. Le temps à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 50 % de la concentration initiale.

2. Déterminer par le calcul une valeur approchée à 0,1 heure près du temps t_0 à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieure à 20 % de la concentration initiale, puis exprimer cette valeur approchée en heures et minutes.