3 Fonctions exponentielles de base a

CAPACITÉS

- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$, selon le signe de k et les valeurs de a.
- Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
- Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.

Les fonctions exponentielles permettent de modéliser toutes sortes d'évolutions, l'évolution moyenne d'une population ou la consommation de carburant d'un véhicule en fonction de la vitesse. Ainsi, si à 80 $km{\cdot}h^{-1}$, la consommation d'une voiture de sport est de 4,3 L aux 100 km, elle est de 14,8 L à 130 $km{\cdot}h^{-1}$!

Si cette voiture de sport passe de 90 $km{\cdot}h^{-1}$ à 80 $km{\cdot}h^{-1}$, de quel pourcentage baissera sa consommation d'essence ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 55

Découvrons l'éco-conduite

lienmini.fr/10445-01

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Première

Questions Flash
Diaporama
10 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10445-02

1 Les suites géométriques

• Soit u_n la suite géométrique de raison **positive** q et de premier terme u_0.
Formule de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.
Formule explicite : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n = u_p \times q^{n-p}}$.
• Si $u_0 > 0$, si $0 < q < 1$ alors u_n est strictement **croissante**.
si $q > 1$ alors u_n est strictement **décroissante**.

2 Les calculs de puissances

Soit a et b deux réels positifs, n et p des entiers non nuls :

• $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots \times a = a^n$ • $a^0 = 1$ • $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

• $a^n \times b^n = (ab)^n$ • $a^n \times a^p = a^{n+p}$ • $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

3 Les taux d'évolution

• **Augmenter** de t % une valeur, c'est la multiplier par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$ = Coefficient Multiplicateur (CM).

• **Diminuer** de t % une valeur, c'est la multiplier par $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$.

• Si une valeur subit ***n* évolutions successives**, de coefficients multiplicateurs CM1, CM2, CM3, …, CMn, alors le coefficient multiplicateur global est CM1 × CM2 × CM3 × … × CMn.

Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. Si (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 3$ alors $v_n =$	6^n	2×3^n	3×2^n	$2v_{n+1}$	1
2. La suite $u_n = 1{,}5\,(0{,}4)^{n-1}$ est :	croissante	décroissante	non monotone	constante	1
3. $\dfrac{2{,}5^2 \times 2{,}5^{-2}}{2{,}5^4} =$	1	$2{,}5^{-3}$	$2{,}5^4$	$2{,}5^{-4}$	2
4. Une augmentation de 5 % puis une diminution de 7 % est une :	baisse de 2 %	hausse de 2 %	baisse de 2,35 %	baisse de moins de 2 %	3
5. Un article de 20 euros augmente de 4 % par trimestre. Quel est son prix au bout de 3 ans ?	30 euros	22,5 euros	environ 54,88 euros	environ 32 euros	3

→ Voir Corrigé p. 324

1 Baisse exponentielle de prix ! Tableur

Télécommunications

OBJECTIF Découvrir la fonction exponentielle de base a → Cours 1 p. 56

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 0,87 et de premier terme $u_0 = 1$.

1. Sur la feuille de tableur ci-dessous, quelle formule doit-on rentrer dans la cellule B3 pour obtenir les termes de cette suite par recopie vers le bas ?

	A	B	C	D
1	n	u_n	x	$f(x)$
2	0	1	0	
3	1		0,2	
4	2		0,3	
5	3		0,4	
6	4		0,5	
7	5		0,6	
8	6		0,7	
9	7		0,8	
10	8		0,9	
11	9		1	
12	10		1,1	

2. Représenter par un nuage de points les 10 premiers termes.

3. Dans la cellule D2, inscrire la fonction $f(x) = 0{,}87^x$ définie sur $[0 ; 10]$ et la recopier vers le bas puis représenter la courbe de f par un nuage de points.

4. Le prix d'un smartphone haut de gamme de 1 000 euros baisse régulièrement de 13 % par an. En utilisant la colonne B ou D, répondre aux questions suivantes :

a. Quel est son prix au bout de 5 ans ? Au bout de 2 ans et demi ? De 4 ans et 3 mois ?

b. Au bout de combien de temps son prix initial aura-t-il baissé de moitié ?

2 Un placement intéressant ?

STMG Gestion et finances

OBJECTIF Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives → Cours 4 p. 58

Louna a placé le 1er janvier 2017 un capital de 1 000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4 %. Le 30 juin 2020, elle retire l'intégralité de son capital. La banque lui reverse 1 147,14 euros. Surprise par ce montant, elle s'aperçoit qu'elle avait opté pour un taux mensuel et non annuel.

1. a. Si t est le taux mensuel, montrer que t est solution de l'équation $\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1{,}04$.

b. En déduire la valeur de t en utilisant la calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

2. Louna a ainsi retiré son capital au bout de 3 ans et demi. N'y a-t-il pas un autre moyen plus simple pour retrouver le capital le 30 juin 2020 ?

Aide : sur la calculatrice, taper $1\,000 \times 1{,}04$^3,5.

3 Un coquetier conceptuel
→ Mémento GEOGEBRA p. 319

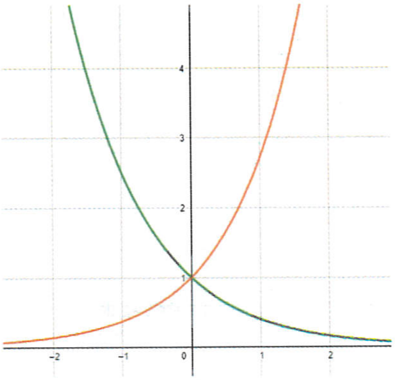
STI2D CONCEPTION DE PRODUITS

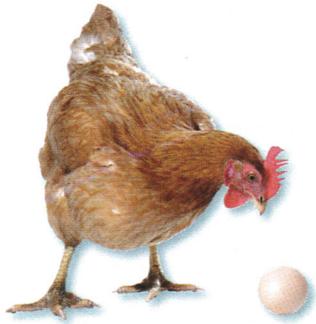
OBJECTIF Modéliser la conception d'un produit → Cours 1 p. 56

1. Ouvrir une feuille GeoGebra et créer un curseur a allant de 0,1 à 10 incrément 0,1.

2. Pour $a = 1$, $a = 0{,}4$, $a = 1{,}2$, $a = 2{,}7$, représenter les différentes fonctions $f(x) = a^x$.

Aide : dans le champ de saisie, taper $\boxed{f(x) = \text{fonction } [a\hat{}x, -10, 10]}$.





3. Étudier le sens de variation de $f(x) = a^x$ suivant les valeurs de a.

4. Trouver les deux fonctions utilisées pour fabriquer ce coquetier.

4 Lever le pied, c'est écologique !
→ Mémento TABLEUR p. 322

ENVIRONNEMENT

OBJECTIF Modéliser une situation concrète par une fonction exponentielle → Cours 1 p. 56

On modélise la consommation, en litres d'essence, d'une voiture de sport par la fonction f définie sur [10, 130] par $f(x) = 0{,}6 \times 1{,}025^x$ où x est la vitesse en km·h^{-1}.

	A	B
1	Vitesse (km.h^{-1})	Consommation (L = $f(x)$)
2	10	
3	20	
4	30	
5	40	
6	50	
7	60	

1. Indiquer la formule à écrire en B2 qui, par recopie vers le bas, calcule la consommation de cette voiture.

2. Déterminer les consommations à 50, 80, 90, 110 et 130 km·h^{-1}. Interpréter les résultats.

3. a. À partir de quelle vitesse la consommation dépasse-t-elle 10 L ?

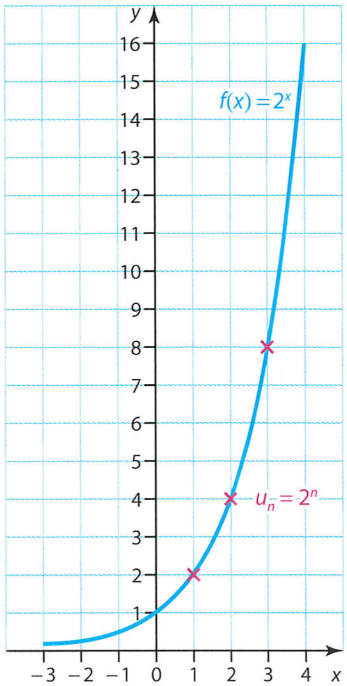
b. Si on passe de 90 km·h^{-1} à 80 km·h^{-1}, de quel pourcentage baisse la consommation d'essence ?

c. Si le prix de l'essence est de 1,50 euro le litre, quelles sont les économies réalisées sur 300 km en passant de 90 à 80 km·h^{-1} ?

Cours

1 Les fonctions exponentielles de base a

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$. Elle est définie pour tout **entier naturel** n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout **réel strictement positif**, on définit la fonction exponentielle de base a.



DÉFINITION La fonction $x \mapsto a^x$ avec a réel strictement positif s'appelle la **fonction exponentielle** de base a.

REMARQUES
- Si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$ est une fonction **constante**.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x, $\boldsymbol{f(x) > 0}$.
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.
- À l'aide de la calculatrice, on peut calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base a : $1{,}5^{5{,}1} = 7{,}097$ à 10^{-3} près.

EXEMPLES
- La fonction $x \mapsto 1{,}5^x$ est une fonction exponentielle de base 1,5.
- La fonction $x \mapsto 0{,}6235^x$ est une fonction exponentielle de base 0,6235.

→ Voir Exercice résolu 1

2 Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉ Pour tous réels x et y et $a > 0$,
$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

EXEMPLES
- $5^{2{,}5} \times 5^{0{,}5} = 5^{2{,}5+0{,}5} = 5^3 = 125$
- $\left(\sqrt{2}\right)^{7{,}4} \times \left(\sqrt{2}\right)^{0{,}6} = \left(\sqrt{2}\right)^{8} = 2^4$

PROPRIÉTÉS Pour tous réels x et y et n entier relatif :

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ ① $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ ② $(a^x)^n = a^{nx}$ ③

DÉMONSTRATION

① $a^x \times a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$ soit $a^x \times a^{-x} = 1$ d'où $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

② $a^{x-y} = a^{x+(-y)} = a^x \times a^{-y} = a^x \times \dfrac{1}{a^y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

③ C'est une propriété des puissances entières.

EXEMPLES
- $\dfrac{8{,}75^3 \times 8{,}75^{-5}}{8{,}75^5} = \dfrac{8{,}75^{-2}}{8{,}75^5} = 8{,}75^{-2-5} = 8{,}75^{-7}$
- $(1{,}8^4)^{-1{,}1} \times 1{,}8^{4{,}2} = 1{,}8^{-4{,}4} \times 1{,}8^{4{,}2} = 1{,}8^{-0{,}2}$

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Passer d'une suite géométrique de raison *a* à la fonction exponentielle de base *a*

Rémi place 500 euros au taux annuel de 4,5 % pendant n années et $0 < n < 18$. Soit (u_n) le capital à l'année n.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

2. Quel est le capital de Rémi au bout de 3 ans ? De 17 ans ?

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x appartenant à $[0\,;18]$ par $f(x) = 500(1{,}045)^x$.

a. Calculer $f(1{,}5)$ et $f\left(\dfrac{7}{3}\right)$.

b. Interpréter concrètement les résultats.

Méthode — Pour passer d'une suite géométrique de raison *a* à la fonction exponentielle de base *a*

1. On **détermine** la formule de récurrence de la suite.
2. On **utilise** la formule explicite de la suite.
3. On **utilise** la calculatrice.

Solution

1. $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{4{,}5}{100}\right)u_n$ donc u_n est une suite géométrique de raison 1,045 et de premier terme $u_0 = 500$.

2. La formule explicite est $u_n = 500 \times 1{,}045^n$ donc $u_3 = 500 \times 1{,}045^3 = 570{,}58$ euros et $u_{17} = 500 \times 1{,}045^{17} = 1\,056{,}69$ euros.

3. a. $f(1{,}5) = 500 \times 1{,}045^{1,5} = 534{,}13$.

b. $f\left(\dfrac{7}{3}\right) = 500 \times 1{,}045^{\frac{7}{3}} = 554{,}08$.

c. Au bout d'un an et demi, le capital sera de 534,13 euros. Au bout de 2 ans et 4 mois $\left(\dfrac{7}{3}\text{ années}\right)$, le capital sera de 554,08 euros.

→ Voir Exercices 37, 38, 41 p. 62

Exercice résolu 2 — Transformer des expressions numériques avec les propriétés algébriques

1. Écrire plus simplement avec la forme a^x les expressions suivantes :

a. $(1{,}3^2)^{0,2} \times \dfrac{1{,}3^{-3}}{1{,}3^{2,5}}$ **b.** $\dfrac{3{,}5^{-2} \times 3{,}5^{-1,5}}{5^{-3,5}}$

2. Montrer que $(1{,}4^x - 2)(1{,}4^x + 4) = 1{,}4^{2x} + 2(1{,}4)^x - 8$.

3. Simplifier l'expression : $\dfrac{1{,}1^{x-0,5}}{2{,}2} + \dfrac{1{,}1^{x+0,5}}{2{,}2}$.

Méthode — Pour transformer des expressions numériques avec les propriétés algébriques

1. On **utilise** les propriétés connues :

$a^x \times a^y = a^{x+y}$ $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $(a^x)^n = a^{nx}$

Solution

1. a. $(1{,}3^2)^{0,2} \times \dfrac{1{,}3^{-3}}{1{,}3^{2,5}} = 1{,}3^{0,4} \times 1{,}3^{-3-2,5}$

$= 1{,}3^{0,4-3-2,5}$

$= 1{,}3^{-5,1}$.

b. $\dfrac{3{,}5^{-2} \times 3{,}5^{-1,5}}{5^{-3,5}} = \dfrac{3{,}5^{-2-1,5}}{5^{-3,5}}$

$= \dfrac{3{,}5^{-3,5}}{5^{-3,5}}$

$= \left(\dfrac{3{,}5}{5}\right)^{-3,5}$

$= 0{,}7^{-3,5}$.

2. $(1{,}4^x - 2)(1{,}4^x + 4) = 1{,}4^x \times 1{,}4^x + 4 \times 1{,}4^x - 2 \times 1{,}4^x - 2 \times 4$

$= 1{,}4^{2x} + 2 \times 1{,}4^x - 8$

3. $\dfrac{1{,}1^{x-0,5}}{2{,}2} + \dfrac{1{,}1^{x+0,5}}{2{,}2} = \dfrac{1{,}1^{x-0,5} + 1{,}1^{x+0,5}}{2 \times 1{,}1}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1{,}1^{x-0,5}}{1{,}1^1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1{,}1^{x+0,5}}{1{,}1^1}$

$= \dfrac{1}{2} \times 1{,}1^{x-0,5-1} + \dfrac{1}{2} \times 1{,}1^{x+0,5-1}$

$= \dfrac{1}{2} \times 1{,}1^{x-1,5} + \dfrac{1}{2} \times 1{,}1^{x-0,5}$

$= \dfrac{1}{2} \times 1{,}1^x(1{,}1^{-1,5} + 1{,}1^{-0,5})$

→ Voir Exercices 44 à 52 p. 63

3 Sens de variation

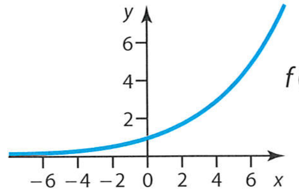
A Sens de variation de $x \mapsto a^x$

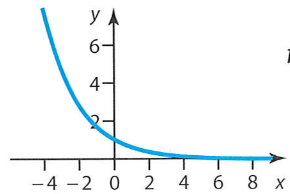
Propriétés Soit la fonction exponentielle f de base a telle que $x \mapsto a^x$ avec a réel **strictement positif.**
Si $\mathbf{0 < a < 1}$, alors $f(x) = a^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
Si $\mathbf{a > 1}$, alors $f(x) = a^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
Si $\mathbf{a = 1}$, alors $f(x) = a^x$ est **constante** sur $\mathbb{R}$.

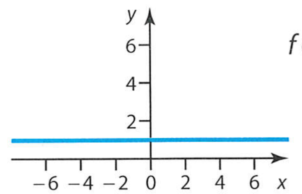
Vocabulaire

On parle de **croissance** ou **décroissance exponentielle**.

Exemples
- La fonction $f(x) = 1{,}3^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 0{,}6^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = 1^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.







Remarques
- La fonction $f(x) = a^x$ a le même sens de variation que la suite géométrique $u_n = a^n$.
- Toutes les courbes des fonctions $f(x) = a^x$ passent par le point $(0\,;1)$.

B Sens de variation de $x \mapsto ka^x$

Propriétés Soit k réel et a réel strictement positif.
Si $\mathbf{k > 0}$ et $\mathbf{0 < a < 1}$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
et $\mathbf{a > 1}$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
Si $\mathbf{k < 0}$ et $\mathbf{0 < a < 1}$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
et $\mathbf{a > 1}$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Exemple • La fonction $f(x) = -2(0{,}457)^{-1{,}7}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $k = -2 < 0$ et $a = 0{,}457 < 1$.

→ Voir Exercice résolu 3

4 Taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions

Définition On appelle **taux moyen d'évolution** t le réel $100\left(CM^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ où CM est le coefficient multiplicateur global sur n évolutions.

En effet, le taux t vérifie l'équation $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^n = CM$ pour t réel d'où $1 + \dfrac{t}{100} = CM^{\frac{1}{n}}$.

Remarque • Si $t > 0$, l'évolution correspond à une **augmentation**, si $t < 0$, à une **diminution**.

Exemple • On veut calculer le taux moyen annuel t d'une augmentation de 20 % en 10 ans. Le coefficient CM global est $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \left(1 + \dfrac{20}{100}\right) = 1 + 0{,}2 = 1{,}2$.

Soit $t = 100(1{,}2^{\frac{1}{10}} - 1) = 100(1{,}2^{0{,}1} - 1) \approx 1{,}84\ \%$.

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 Étudier le sens de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$

Soit la fonction $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer l'image de $-1,5$ puis $f(0)$.

2. Étudier le sens de variation de f.

3. Montrer que la courbe représentative de f passe par le point $(0 ; 2)$ et le point $(0,5 ; \sqrt{3})$.

Méthode Pour étudier de sens de variation d'une fonction $f(x) = ka^x$

1. On **utilise** la calculatrice.
2. si $a > 1$ et $k > 0$ alors $f(x) = a^x$ est croissante.
Si $0 < a < 1$ et $k > 0$ alors $f(x) = a^x$ est décroissante.
3. $a^{0,5} = \sqrt{a}$.

Solution

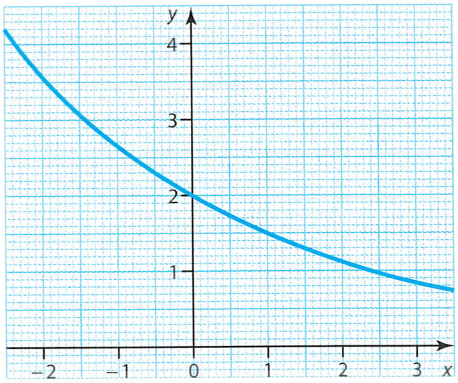
1. $f(-1,5) = 2 \times (0,75)^{-1,5} \approx 3,08$.
$f(0) = 2 \times (0,75)^0 = 2$.

2. $k = 2$ et $a = 0,75$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. On a $f(0) = 2$ donc la courbe représentative de f passe par le point $(0 ; 2)$.

$$f(0,5) = 2 \times (0,75)^{0,5}$$
$$= 2 \times \frac{3}{4}^{0,5}$$
$$= 2 \times \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{3}.$$

La courbe représentative de f passe par le point $(0,5 ; \sqrt{3})$.



→ Voir Exercices 59 à 65 p. 63

Exercice résolu 4 Déterminer un taux d'évolution annuel moyen

La cote en bourse d'une action a augmenté de 3 % par an pendant 5 ans. Elle a ensuite baissé de 4 % pendant 4 ans puis a de nouveau augmenté de 2 % pendant 3 ans.

1. Quel est le taux d'évolution global ?

2. Quel est le taux annuel moyen après 12 évolutions ?

3. L'action valait 52 euros. Quelle est sa cote au bout de 12 ans ?

Méthode Pour déterminer un taux d'évolution annuel moyen

1. Le taux d'évolution global est égal au coefficient multiplicateur global (CM).
2. On **utilise** la formule $100(\text{CM}^{\frac{1}{n}} - 1)$.
3. On **applique** le taux annuel moyen sur la période de 12 ans.

Solution

1. Pour la première augmentation, le coefficient multiplicateur annuel est : $1 + 0,03 = 1,03$. Le coefficient multiplicateur global sur les 5 ans est donc : $1,03^5$.
De même, on obtient $0,96^4$ pour la baisse de 4 % pendant 4 ans et $1,02^3$ pour l'augmentation de 2 % pendant 3 ans.
$\text{CM} = 1,03^5 \times 0,96^4 \times 1,02^3 = 1,045$.
Le taux d'évolution global est donc 4,5 % à 10^{-3} près.

2. Soit t le taux annuel moyen.
$t = 100\left(1,045^{\frac{1}{12}} - 1\right) = 0,367$ %.
Le taux annuel moyen sur 12 ans est 0,367 %.

3. Le taux global sur 12 ans est : $(1,00367)^{12}$.
Si l'action valait 52 euros, sa valeur au bout de 12 ans est : $52 \times (1,00367)^{12} = 54,33$ euros.

→ Voir Exercices 76 à 81 p. 64

L'essentiel

1 Les fonctions exponentielles de base a

- Les fonctions $f(x) = a^x$ peuvent être considérées comme un prolongement à des valeurs réelles de la suite géométrique a^n où n est un entier naturel.
- Si $a = 1$, $f(x) = 1^x = 1$, f est une fonction **constante**.
- Comme $a > 0$, pour tout réel x, $f(x) > 0$.
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

2 Propriétés algébriques

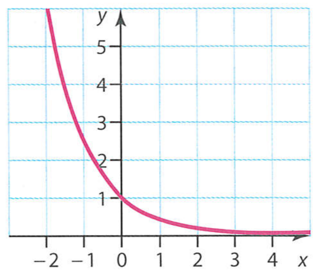
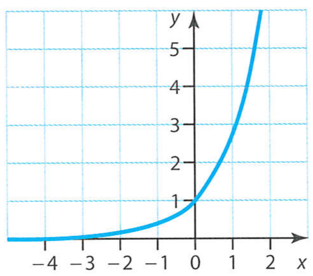
Pour tous réels x et y, n entier relatif et $a > 0$,

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (a^x)^n = a^{nx}$$

3 Sens de variation

- **Sens de variation de $x \mapsto a^x$**

$0 < a < 1$	$a > 1$
$f(x) = a^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$	$f(x) = a^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$
	

- **Sens de variation de $x \mapsto ka^x$**

Soit k réel et a réel strictement positif.

Si $k > 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$ et $0 < a < 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$
et $a > 1$ alors $f(x) = ka^x$ est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

4 Taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives

- $t = 100(CM^{\frac{1}{n}} - 1)$ où CM est le **coefficient multiplicateur global** sur n évolutions.
- $CM = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$

Le **coefficient multiplicateur global** d'une augmentation de 20 % pendant trois ans est ainsi : $\left(1 + \frac{20}{100}\right)^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728$.

Le **taux d'évolution moyen** est égal à : $100(1{,}728^{\frac{1}{3}} - 1) = 20$.