1 Questions Flash

Diaporama

15 diapositives pour acquérir ses automatismes

lienmini.fr/10445-42

Calculer des limites en $+\infty$

2 Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{6}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{5}{x}+1$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{12}{x}-8$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{41}{x}+9$

Calculer des limites en $-\infty$

3 Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{9}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} 7+\frac{2}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} -20+\frac{1}{x}$

Calculer des limites en 0

4 Calculer :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2}{x}$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{16}{x}$

c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} -\frac{11}{x}$

d. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\frac{22}{x}$

e. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{9}{x}$

f. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} -\frac{6}{x}$

Calculer des dérivées de fonctions

*Dans les exercices **5** à **9**, calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I donné.*

5 a. $f(x)=\frac{26}{x}$; $\mathrm{I}=]-\infty\,;0[$.

b. $g(x)=-\frac{12}{x}$; $\mathrm{I}=]-\infty\,;0[$.

c. $h(x)=-\frac{1}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

6 a. $f(x)=7+\frac{8}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

b. $g(t)=\frac{17}{t}-9$; $\mathrm{I}=]-\infty\,;0[$.

c. $h(x)=-5+\frac{31}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

7 a. $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

b. $g(x)=5x-2+\frac{14}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

c. $h(t)=-1{,}25t+\sqrt{3}-\frac{100}{t}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

8 a. $f(t)=5t^2-6t+\frac{37}{t}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

b. $g(x)=-6x^2-3{,}2x+20-\frac{4}{x}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

c. $h(t)=\frac{41}{t}+\frac{1}{2}t^2-7t+1$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

9 a. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{13}{x}$; $\mathrm{I}=]-\infty\,;0[$.

b. $g(t)=-\frac{5}{t}+4t^3-\frac{1}{4}t^2-\frac{9}{10}t+\frac{3}{7}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$.

Calculer des nombres dérivés

10 Pour chacune des fonctions f, calculer le nombre dérivé $f'(a)$.

a. $f(x)=\frac{24}{x}$; $a=-2$.

b. $g(x)=-3x+5-\frac{9}{x}$; $a=1$.

c. $h(x)=\frac{250}{x}+2x^2-6$; $a=-5$.

d. $k(x)=x^3-4x^2-5x-\frac{18}{x}$; $a=3$.

Étudier le signe de fonctions

*Dans les exercices **11** à **14**, étudier le signe de chacune des fonctions f définies sur l'ensemble D donné.*

11 a. $f(x)=\frac{16}{x^2}$; $\mathrm{D}=]-\infty\,;0[$.

b. $f(x)=-\frac{9}{x^2}$; $\mathrm{D}=\mathbb{R}^*$.

12 a. $f(x)=\frac{4(x-1{,}1)(x+1{,}1)}{x^2}$; $\mathrm{D}=]0\,;+\infty[$.

b. $f(x)=\frac{4(x-1{,}1)(x+1{,}1)}{x^2}$; $\mathrm{D}=]-\infty\,;0[$.

13 a. $f(x)=\frac{3(x-2)(x+8)}{x^2}$; $\mathrm{D}=\mathbb{R}^*$.

b. $f(x)=\frac{-0{,}3(x-7{,}2)(x+7{,}2)}{x^2}$; $\mathrm{D}=\mathbb{R}^*$.

14 a. $f(x)=\frac{4x^3+x^2+12}{x^2}$; $\mathrm{D}=]0\,;+\infty[$.

b. $f(x)=\frac{(x-11)(2x^2+6x+3)}{x^2}$; $\mathrm{D}=]0\,;+\infty[$.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Comportement de la fonction inverse

→ Aide Cours 1 p. 38

Question de cours

15 **1.** Rappeler la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche de 0 en étant positif et celle lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3}{x}$. En remarquant que $f(x)=3\times\frac{1}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.

16 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{7}{x}$. En remarquant que $f(x)=-7\times\frac{1}{x}$, déterminer la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.

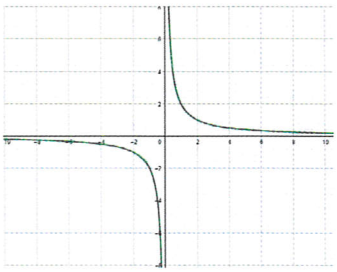
17 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=6+\frac{22}{x}$.
1. Écrire $f(x)$ sous la forme $6+k\times\frac{1}{x}$ où k est un nombre réel.
2. En déduire la limite de la fonction f en 0 puis celle en $+\infty$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 39

18 f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par $f(x)=4-\frac{39}{x}$.
1. Écrire $f(x)$ sous la forme $4+k\times\frac{1}{x}$ où k est un nombre réel.
2. En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$ puis celle en 0.

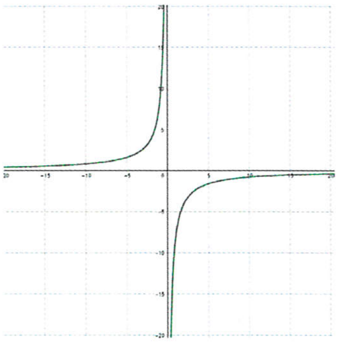
→ Voir Exercice résolu 1 p. 39

19 On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x}$.



1. Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement ces résultats.

20 On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{8}{x}$.



1. Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement ces résultats.

21 ALGO PYTHON **Écrire un programme**

f est une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{a}{x}$ où a est un nombre réel.
1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition dans le cas où $a=8$ puis dans le cas où $a=-4$.
2. a. Écrire un algorithme en langage Python dont le rôle est d'afficher la limite de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition pour une valeur de a saisie par l'utilisateur.
b. Le programmer sur la calculatrice ou sur un ordinateur et le faire fonctionner pour retrouver les résultats obtenus à la question **1.**

Vrai ou faux

22 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*
1. Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{14}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
2. Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{23}{x}$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=-\infty$.
3. Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}-7$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=7$.
4. Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-2+\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=-2$.

Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

→ Aide Cours 2 p. 38

Question de cours

23 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{9}{x}$.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et en déduire le sens de variation de f.

Dans les exercices 24 à 28, calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Écrire le résultat sous forme de quotient.

24 **a.** $f(x)=\frac{6}{x}$ **b.** $g(x)=-\frac{8{,}25}{x}$
c. $h(x)=-\frac{1}{q}$ **d.** $l(x)=\frac{1{,}3}{x}$
e. $m(x)=-\frac{20}{x}$ **f.** $p(x)=\frac{8}{x}$

25 **a.** $h(x)=\dfrac{20}{x}-4{,}2$ **b.** $g(x)=3-\dfrac{17{,}3}{x}$

c. $f(t)=-5t+\dfrac{4}{t}$ **d.** $k(x)=4x-2-\dfrac{5}{x}$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 39

26 **a.** $f(x)=10{,}2x-6+\dfrac{3{,}1}{x}$

b. $g(x)=-0{,}5x+3-\dfrac{7}{x}$ **c.** $h(x)=-\dfrac{7{,}2}{x}+3{,}5x-1{,}2$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 39

27 **a.** $f(t)=7t^2+2{,}8t-1+\dfrac{0{,}6}{t}$

b. $g(x)=\dfrac{3}{x}-9x^2+x$ **c.** $h(q)=5q^2+4{,}7+\dfrac{10}{q}-3{,}1q$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 39

28 **a.** $f(x)=0{,}1x^3+5x^2-3x-4{,}2+\dfrac{8}{x}$

b. $g(t)=-4t^3+0{,}3t^2+2{,}5-\dfrac{2}{t}$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 39

QCM

29 *Indiquer pour chaque question la bonne réponse.*

1. Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5+\dfrac{7}{x}$, alors :

a. $f'(x)=5-\dfrac{7}{x^2}$ **b.** $f'(x)=-\dfrac{7}{x^2}$ **c.** $f'(x)=\dfrac{7}{x^2}$

2. Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par $f(x)=-8{,}3x+1-\dfrac{110}{x}$, alors :

a. $f'(x)=-8{,}3-\dfrac{110}{x^2}$ **b.** $f'(x)=\dfrac{110}{x^2}$

c. $f'(x)=\dfrac{-8{,}3x^2+110}{x^2}$

3. Si f est la fonction définie sur l'intervalle $[10\,;100]$ par $f(x)=4x^2-5x+1+\dfrac{16}{x}$, alors :

a. $f'(x)=\dfrac{8x^3-5x^2-16}{x^2}$ **b.** $f'(x)=\dfrac{8x^3-5x^2+16}{x^2}$

c. $f'(x)=\dfrac{8x^3-4x^2-16}{x^2}$

30 Confirmer par le calcul les informations suivantes données par un logiciel de calcul formel.

a.

1 Dérivée$\left(x-100+\dfrac{6400}{x}\right)$

$\to$ $1-\dfrac{6400}{x^2}$

2 Factoriser$\left(1-\dfrac{6400}{x^2}\right)$

$\to$ $(x-80)\cdot\dfrac{x+80}{x^2}$

b.

1 Dérivée$\left(2x-3+\dfrac{50}{x}\right)$

$\to$ $2-\dfrac{50}{x^2}$

2 Factoriser$\left(2-\dfrac{50}{x^2}\right)$

$\to$ $2(x-5)\,\dfrac{x+5}{x^2}$

31 f est la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par :
$$f(x)=-\frac{1{,}5}{x}.$$
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;0[$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0[$.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 39

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{6}{x}+2{,}3$.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de 0.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 39

33 ALGO PYTHON **Écrire un algorithme**

f est une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=a+\dfrac{b}{x}$ où a et b sont des nombres réels avec $b\neq 0$.
1. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel appartenant à $]0\,;+\infty[$.
b. La valeur de a influence-t-elle le sens de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$?
c. Discuter suivant les valeurs de b le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. a. Écrire un algorithme en langage Python dont le rôle est d'afficher le sens de variation de f pour une valeur de a et de b saisies par l'utilisateur.
b. Le programmer sur la calculatrice ou sur ordinateur et le faire fonctionner pour $a=6{,}4$ et $b=7$ puis pour $a=-3{,}2$ et $b=-5{,}9$ afin de vérifier son bon fonctionnement.

34 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=0{,}16x+4{,}7+\frac{1}{x}.$$
1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{0{,}16(x-2{,}5)(x+2{,}5)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

35 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4}{x}+2x^2$.
1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

36 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[$ par :
$$f(x)=x^3+11x-7-\frac{9}{x}.$$
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
2. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

Comportement de la fonction inverse

37 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{31}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la calculatrice et conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Déterminer les deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Valider les conjectures précédentes en calculant ces limites.

38 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{12}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur la calculatrice et conjecturer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Déterminer les deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Valider les conjectures précédentes en calculant ces limites.

39 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=-\frac{25}{x}.$$

Valider par le calcul les résultats suivants obtenus par un logiciel de calcul formel.

1	$\text{Limite}\left(-\frac{25}{x},-\infty\right)$
	$\rightarrow\ 0$
2	$\text{LimGauche}\left(-\frac{25}{x},0\right)$
	$\rightarrow\ \infty$
3	$\text{LimDroite}\left(-\frac{25}{x},0\right)$
	$\rightarrow\ -\infty$
4	$\text{Limite}\left(-\frac{25}{x},\infty\right)$
	$\rightarrow\ 0$

40 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=-2+\frac{4}{x}.$$

Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

QCM

41 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{17}{x}=$

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 17

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}-\dfrac{8}{x}=$

a. $+\infty$ **b.** $-\infty$ **c.** -8

3. $\lim\limits_{x\to-\infty}-3+\dfrac{1}{x}=$

a. 0 **b.** -3 **c.** $-\infty$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}4+\dfrac{18}{x}=$

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 4

Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

Vrai ou faux

42 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. La dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par $f(x)=x^2+11x-5+\dfrac{3}{x}$ est définie par :

$$f'(x)=\frac{(x-0{,}5)(2x^2+12x+6)}{x^2}.$$

2. La dérivée de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x-1+\dfrac{8}{x}$ est définie par $f'(x)=\dfrac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.

3. La fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ par $f(x)=\dfrac{13{,}4}{x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

4. La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5x^3-\dfrac{4{,}7}{x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

5. La fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(t)=2t+\dfrac{18}{t}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;3]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

43 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=0{,}1x-1+\frac{0{,}4}{x}.$$

Montrer que pour tout réel x non nul, $f'(x)=\dfrac{0{,}1(x-2)(x+2)}{x^2}$.

44 Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-19x-11{,}4-\frac{5}{x}.$$

Montrer que pour tout réel x non nul,

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-10x+5)}{x^2}.$$

45 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}1\,;1]$ par :

$$f(x)=2-0{,}1x-\frac{0{,}025}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0{,}1\,;1]$, $f'(x)=\dfrac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2}$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}1\,;1]$.

46 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=-10x+62-\frac{3\,240}{x}.$$

1. Montrer que pour tout réel x non nul,

$f'(x)=\dfrac{-10(x-18)(x+18)}{x^2}$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

47 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par : $f(x) = 5 - \dfrac{10}{x}$. Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	1		10
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-5	↗	4

48 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0{,}5x + 2 + \dfrac{8}{x}$. Justifier toutes les informations données par le tableau de variation de f ci-dessous.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	

49 Lorsqu'un véhicule roule entre 10 km·h^{-1} et 130 km·h^{-1}, sa consommation d'essence c (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en km·h^{-1}) par l'expression $c(v) = 0{,}06v + \dfrac{150}{v}$.

1. Vérifier que pour tout v appartenant à l'intervalle $[10 ; 130]$, $c'(v) = \dfrac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$.

2. Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10 ; 130]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction c.

3. a. En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale.

b. Déterminer la consommation minimale en litres.

50 Une entreprise fabrique des tables de jardin. La production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.

Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à $C(q) = q^2 + 50q + 100$ où q appartient à l'intervalle $[1 ; 30]$.

1. a. Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

b. Calculer le coût unitaire de production, en euros, pour 20 tables produites.

2. À chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production, $C_U(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

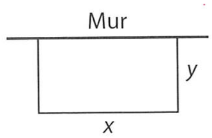
a. Représenter la fonction C_U sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites, le coût unitaire, en euros, est inférieur ou égal à 80.

b. Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1 ; 30]$, $C'_U(q) = \dfrac{(q-10)(q+10)}{q^2}$.

c. Étudier le signe de $C'_U(q)$ sur l'intervalle $[1 ; 30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_U.

d. Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

51 Une jardinerie souhaite construire une extension rectangulaire à l'extérieur du magasin pour stocker des arbres en pots. L'aire de cette extension est égale à 722 m². L'un des côtés est un mur du magasin ; le gérant souhaite clôturer les 3 autres côtés avec du grillage et goudronner le sol. Le prix du grillage est 15 € le mètre et celui du goudron 25 € le m². On note x et y les longueurs, en mètres, des côtés de l'extension et on admet que x appartient à l'intervalle $[20 ; 60]$.



1. Justifier que $y = \dfrac{722}{x}$.

2. On note $l(x)$ la longueur, en mètres, de la clôture.

a. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[20 ; 60]$, $l(x) = x + \dfrac{1\,444}{x}$.

b. Démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[20 ; 60]$, $l'(x) = \dfrac{(x-38)(x+38)}{x^2}$.

c. Étudier le signe de $l'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 60]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction l.

d. En déduire les dimensions de cette extension pour que la longueur de la clôture soit minimale et déterminer le prix à payer par le responsable de cette jardinerie.

52 Un moulin artisanal peut produire chaque jour une quantité q de farine biologique où q est compris entre 0,3 et 6 tonnes. À chaque valeur de q appartenant à l'intervalle $I = [0{,}3 ; 6]$, on associe le coût unitaire de production, $C_U(q) = 4q + \dfrac{9}{q}$, exprimé en centaines d'euros.

1. Représenter sur la calculatrice la courbe de la fonction C_U et conjecturer la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal.

2. a. Démontrer que pour tout réel q appartenant à l'intervalle I, $C'_U(q) = \dfrac{4(q-1{,}5)(q+1{,}5)}{q^2}$.

b. Déterminer le signe de $C'_U(q)$ sur l'intervalle I.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction C_U.

d. En déduire la quantité de farine à produire pour que le coût unitaire soit minimal et déterminer le coût unitaire minimal en euros.

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10445-43

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

	V	F
53 Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{24}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.		
54 Si f est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}+8$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.		
55 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=-\dfrac{6}{x}+10$ alors $f'(x)=-\dfrac{6}{x^2}$.		
56 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=8x-5+\dfrac{2}{x}$ alors $f'(x)=\dfrac{8x^2+2}{x^2}$.		
57 Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x^2+7x-4+\dfrac{9}{x}$ alors $f'(x)=\dfrac{(x+3)(2x^2+x-3)}{x^2}$.		

→ Vérifier les résultats p. 324

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

58 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{11}{x}$.

1. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

a. -11 **b.** 0 **c.** $-\infty$

2. On a : $f'(x)=$

a. $\dfrac{11}{x^2}$ **b.** $-\dfrac{11}{x^2}$ **c.** -11

3. La fonction f :

a. est strictement croissante. **b.** est strictement décroissante. **c.** change de variation.

59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=0{,}01x+1+\dfrac{9}{x}$.

1. Pour tout réel x non nul, $f'(x)=$

a. $\dfrac{0{,}01x^2+9}{x^2}$ **b.** $\dfrac{0{,}01(x-30)(x+30)}{x^2}$ **c.** $1{,}01-\dfrac{9}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est strictement monotone sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

b. est strictement monotone sur $]-\infty\,;0[$ et change de variation sur $]0\,;+\infty[$.

c. change de variation sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

60 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par $f(x)=0{,}5x^2-7{,}5x+\dfrac{32}{x}$.

1. Pour tout réel x non nul, $f'(x)=$

a. $\dfrac{(x-8)(x^2+0{,}5x+4)}{x^2}$ **b.** $\dfrac{x^3-32}{x^2}$ **c.** $x-7{,}5+\dfrac{32}{x^2}$

2. Sur l'intervalle $[1\,;10]$, la fonction f :

a. est strictement décroissante. **b.** est strictement croissante. **c.** change de variation.

3. Sur l'intervalle $[1\,;10]$, la fonction f :

a. admet un maximum en 8. **b.** admet un minimum en 8. **c.** admet un minimum en 5,5.

→ Vérifier les résultats p. 324

61 **In english**

A company produces x thousand litres of paint with $x \in [0{,}5\,;8]$. The average cost of production of x thousand litres of paint in thousand euros is : $C_M(x) = x + 4 + \frac{25}{x}$.

1. Calculate $C'_M(x)$.

2. Draw the variation table of the function C_M and deduce the number of litres of paint the company needs to produce for its average cost to be minimal.

62 COMPÉTENCE **Calculer**

Une entreprise produit au plus 60 000 téléphones mobiles pour la France et les vend 800 € l'unité. Les coûts de fabrication, en euros, sont modélisés par l'expression :

$C(q) = 0{,}01q^2 + 250q + 2\,496\,400$ (où q est le nombre d'exemplaires fabriqués et vendus).

1. Montrer que le bénéfice, selon le nombre q d'exemplaires vendus, est défini sur $[0\,;60\,000]$ par :

$B(q) = -0{,}01q^2 + 550q - 2\,496\,400$.

2. On s'intéresse désormais au bénéfice unitaire qui est modélisé par la fonction B_U définie sur $]0\,;60\,000]$ par $B_U(q) = \frac{B(q)}{q}$. Sur un tableur, on a préparé une feuille de calculs dont on donne, ci-dessous, un aperçu :

	A	B	C
1	Nombre d'exemplaires q	Bénéfice $B(q)$	Bénéfice unitaire $B_U(q)$
2	10 000	2003600	200,36000
3	11 000	2343600	213,05455
4	12 000	2663600	221,96667
5	13 000	2963600	227,96923
6	14 000	3243600	231,68571
7	15 000	3503600	233,57333
8	16 000	3743600	233,97500
9	17 000	3963600	233,15294
10	18 000	4163600	231,31111
11	19 000	4343600	228,61053
12	20 000	4503600	225,18000

a. Quelle formule doit-on saisir en C2 pour obtenir, par recopie vers le bas, les valeurs du bénéfice unitaire ?

b. D'après le tableau, estimer le nombre d'exemplaires à fabriquer et vendre pour avoir un bénéfice unitaire maximal.

c. Déterminer l'expression de $B_U(q)$; en déduire celle de $B'_U(q)$.

d. Établir le tableau de variation de la fonction B_U sur $]0\,;60\,000]$ et en déduire le nombre d'exemplaires à fabriquer et à vendre pour avoir un bénéfice unitaire maximal.

63 COMPÉTENCE **Raisonner**

Une entreprise fabrique chaque jour x litres d'un produit chimique, où x appartient à $[1\,;50]$. Le coût total journalier de production pour x litres est donné par la fonction C définie sur $[1\,;50]$ par $C(x) = 0{,}5x^2 + 2x + 200$, les coûts étant exprimés en centaines d'euros.

1. Le coût moyen de production d'un litre quand on en produit x litres est la fonction C_M définie par $\frac{C(x)}{x}$, où $x \in [1\,;50]$.

a. Exprimer le coût moyen de production en fonction de x.

b. Justifier que pour tout x appartenant à $[1\,;50]$,
$C'_M(x) = \frac{0{,}5(x-20)(x+20)}{x^2}$.

c. Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur l'intervalle $[1\,;50]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M.

d. En déduire la quantité de produit chimique à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2. Le coût marginal de production, noté C_m, pour une quantité produite x, est le supplément de coût total de production engendré par la production d'un litre supplémentaire. On a donc $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

a. Calculer le coût marginal pour une production de 10 litres de produit, c'est-à-dire l'augmentation du coût total de production pour passer de 10 litres à 11 litres.

b. En pratique, les économistes assimilent le coût marginal de production à la dérivée du coût total et considèrent donc que $C_m(x) = C'(x)$.

Calculer $C'(10)$ et comparer avec le résultat obtenu à la question précédente.

c. Les économistes affirment que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

Résoudre l'équation $C_M(x) = C_m(x)$ pour confirmer l'affirmation faite par les économistes.

64 GEOGEBRA COMPÉTENCE **Représenter**

Un confiseur produit chaque jour une quantité x, comprise entre 0 et 100 kg de pâtes de fruits.

Le coût total quotidien de fabrication, en euros, de x kg de pâtes de fruits est donné par

$C_T(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}09x^2 + 2x + 149{,}5$.

Le coût moyen, en euros, pour une production de x kg de pâtes de fruits est : $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

1. Conjecturer un résultat

a. Ouvrir un fichier GeoGebra.

Construire la courbe représentant la fonction C_T ainsi que la droite (OM) où O(0 ; 0) et M est un point de la courbe.

b. Exprimer le coefficient directeur de la droite (OM) en fonction de x et justifier qu'il est égal à $C_M(x)$.

c. Déplacer le point M sur la courbe afin de déterminer graphiquement la quantité de pâtes de fruits à produire pour que le coût moyen soit minimal.

2. Démontrer la conjecture par le calcul

a. Déterminer l'expression de $C_M(x)$.

b. Justifier que pour tout x appartenant à $]0\,;100]$,
$C'_M(x) = \frac{(x-65)(0{,}002x^2 + 0{,}04x + 2{,}6)}{x^2}$.

c. Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur $]0\,;100]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M sur $]0\,;100]$.

d. En déduire la quantité de pâtes de fruits à produire pour que le coût moyen soit minimal.

Des baskets en matières recyclées... et recyclables

CAPACITÉ Déterminer des extrema par le calcul et à l'aide d'un algorithme.

Une entreprise fabrique des baskets dont les composants utilisés dans la fabrication sont 100 % recyclés et recyclables.
Elle fabrique entre 5 et 100 paires de baskets par jour.

Elle estime que le coût total de production, en euros, de la fabrication de x paires de baskets est donné par : $C(x) = x^3 - 90x^2 + 2\,700x + 8\,836$.
Lorsque x paires de baskets sont fabriquées, on appelle coût moyen d'une paire de baskets, le quotient $\dfrac{C(x)}{x}$. On le note $C_M(x)$.

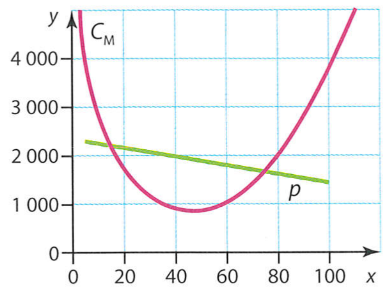
1. Justifier que pour tout x appartenant à $[5\,;100]$, $C_M(x) = x^2 - 90x + 2\,700 + \dfrac{8\,836}{x}$.

2. a. Calculer $C'_M(x)$ pour tout x appartenant à $[5\,;100]$ et justifier que $C'_M(x) = \dfrac{(x-47)(2x^2+4x+188)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ lorsque x appartient à $[5\,;100]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M.

c. En déduire le nombre de paires de baskets à produire pour que le coût moyen soit minimal.

3. Le prix de vente $p(x)$ d'une paire de baskets dépend de la quantité vendue. Lorsque x est compris entre 5 et 100, on a $p(x) = -9x + 2\,340$.
On donne ci-contre la courbe représentative des fonctions C_M et p.
Déterminer graphiquement le nombre x_0 de paires de baskets à fabriquer pour que le bénéfice réalisé par l'entreprise sur une paire de baskets soit maximal.



En salle informatique

PYTHON lienmini.fr/10445-44

On se propose de déterminer un encadrement du nombre x_0 à l'aide d'un algorithme.
Pour cela, on divise l'intervalle $[5\,;100]$ en 3 sous-intervalles de même longueur : $[5\,;c]$, $[c\,;d]$ et $[d\,;100]$.
On cherche alors auquel de ces 3 sous-intervalles appartient x_0.
On réitère ce procédé jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle obtenu soit inférieure à la précision choisie.
Voici l'algorithme Python :

```
from math import*
def Benefice(x) :
    return -x**2+81*x-360-8836/x
a=5
b=100
while b-a>1:
    h=(b-a)/3
    c=a+h
    d=b-h
    if Benefice(c)>Benefice(d):
        ..................
    else:
        ..................
print(a,b)
```

1. Justifier l'expression écrite à la ligne 3.

2. Expliquer pourquoi si Benefice(c) > Benefice(d) alors x_0 ne peut pas être dans l'intervalle $[d\,;b]$.
À quel intervalle appartient alors x_0 ?
Expliquer pourquoi si Benefice(c) ⩽ Benefice(d) alors x_0 ne peut pas être dans l'intervalle $[a\,;c]$.
À quel intervalle appartient alors x_0 ?

3. En utilisant la question précédente, compléter les lignes 11 et 13 de l'algorithme ci-contre.

4. Programmer l'algorithme et déterminer x_0.

Sujet résolu BAC

<table>
<tr><th>Énoncé</th><th>Automatisme à utiliser</th><th>Réponse</th></tr>
<tr><td>65 Écrire $0{,}25x^2 - 1{,}44$ sous la forme $a(x-b)(x+b)$ où a et b sont des réels.</td><td>Factoriser par 0,25 puis faire apparaître une identité remarquable.</td><td>$0{,}25(x-2{,}4)(x+2{,}4)$</td></tr>
<tr><td>66 Donner le signe de $f(x) = -3(x-5)(x+5)$ suivant les valeurs du réel x.</td><td>Déterminer les 2 racines du trinôme puis donner son signe grâce à celui de $a = -3$.</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-5</td><td></td><td>5</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>67 Donner le signe de $f(x) = (x-2)(3x^2+x+7)$ suivant les valeurs du réel x, où $x \in [0\,;8]$.</td><td>Justifier que, sur $[0\,;8]$, l'un des facteurs est positif et étudier le signe de l'autre facteur.</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>2</td><td></td><td>8</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

68 Le coût de production, exprimé en millions d'euros, pour fabriquer q milliers de tonnes d'un produit est donné par $C(q) = \dfrac{q^2}{4} + q + 4$ où $q \in [1\,;20]$.

1. Démontrer que le coût unitaire de production d'un millier de tonnes, noté $U(q)$, de ce produit lorsque la production est de q milliers de tonnes est $U(q) = \dfrac{q}{4} + 1 + \dfrac{4}{q}$.

2. Justifier que $U'(q) = \dfrac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$ où q appartient à l'intervalle $[1\,;20]$.

3. Étudier le signe de $U'(q)$ sur l'intervalle $[1\,;20]$ et dresser le tableau de variation de U.

4. L'entreprise décide de choisir le niveau de production à produire qui minimisera son coût unitaire. Déterminer cette production.

<table>
<tr><th>Méthode à appliquer</th><th>Solution rédigée</th></tr>
<tr><td>1. On utilise la formule $U(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ puis on « casse » le quotient pour obtenir le résultat de $U(q)$ sous la forme attendue.</td><td>1. $U(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{\frac{q^2}{4}+q+4}{q} = \dfrac{\frac{q^2}{4}}{q} + \dfrac{q}{q} + \dfrac{4}{q} = \dfrac{q^2}{4} \times \dfrac{1}{q} + 1 + \dfrac{4}{q} = \dfrac{q}{4} + 1 + \dfrac{4}{q}.$</td></tr>
<tr><td>2. On dérive chacun des termes de $U(q)$ puis on factorise le numérateur de $U'(q)$.
→ Voir Exercice résolu 2 p. 39</td><td>2. $U'(q) = \dfrac{1}{4} \times 1 + 0 + 4 \times \left(-\dfrac{1}{q^2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{q^2} = \dfrac{q^2-16}{4q^2} = \dfrac{(q-4)(q+4)}{4q^2}$</td></tr>
<tr><td>3. On justifie que, sur l'intervalle $[1\,;20]$, étudier le signe de $U'(q)$ revient à étudier celui de $(q-4)$.
→ Voir Exercice résolu 3 p. 39</td><td>3. Sur $[1\,;20]$, $4q^2 > 0$ et $(q+4) > 0$ donc $U'(q)$ est du signe de $(q-4)$.
Et $q - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow q \geqslant 4$. D'où :
<table><tr><td>q</td><td>1</td><td></td><td>4</td><td></td><td>20</td></tr><tr><td>U′(q)</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr><tr><td>U(q)</td><td>5,25</td><td>↘</td><td>3</td><td>↗</td><td>6,2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>4. On cherche, dans le tableau de variation, la valeur de q qui rend minimale la fonction U.</td><td>4. Le coût unitaire est minimal pour une production de 4 000 tonnes de produit (4 milliers de tonnes).</td></tr>
</table>

Sujet guidé BAC

69 CAPACITÉS

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [20\,;150]$ par $f(x) = 2x + \dfrac{13\,122}{x}$.

1. Montrer que sur l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$.

Méthode Dériver chacun des termes de $f(x)$ puis factoriser le numérateur de $f'(x)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 39

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I.

Méthode Justifier que, sur l'intervalle I, étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier celui de $(x-81)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 39

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

4. Représenter la fonction f sur la calculatrice et déterminer la valeur arrondie à 10^{-1} près des solutions de l'équation $f(x) = 350$.

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $5 + \dfrac{v^2}{300}$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à $\dfrac{3\,000}{v} + 2v$.

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2. En utilisant la Partie A :

a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

70 CAPACITÉ

- Étudier des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Une entreprise produit des appareils électroménagers. Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par : $C(x) = x^2 + 50x + 100$ pour $5 \leqslant x \leqslant 40$.

1. L'entreprise vend chaque appareil 100 euros.

a. Expliquer pourquoi le bénéfice horaire réalisé par la fabrication et la vente de x objets est égal à :
$B(x) = -x^2 + 50x - 100$ pour x appartenant à l'intervalle $[5\,;40]$.

b. B' étant la fonction dérivée de B sur l'intervalle $[5\,;40]$, calculer $B'(x)$ et étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de B sur l'intervalle $[5\,;40]$.

d. Quel est le nombre d'appareils à produire pour que le bénéfice horaire de l'entreprise soit maximal ?

2. Le coût unitaire de production d'un appareil lorsque x appareils sont produits est égal à $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[5\,;40]$.

a. Montrer que $f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle $[5\,;40]$.

b. f' étant la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;40]$, montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-10)(x+10)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[5\,;40]$.

Méthode Dériver chacun des termes de $f(x)$ puis factoriser le numérateur de $f'(x)$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 39

c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[5\,;40]$ et dresser le tableau de variation de f.

Méthode Justifier que sur l'intervalle $[5\,;40]$, étudier le signe de $f'(x)$ revient à étudier celui de $(x-10)$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 39

d. Pour quelle valeur de x le coût unitaire est-il minimal ? Préciser alors sa valeur.

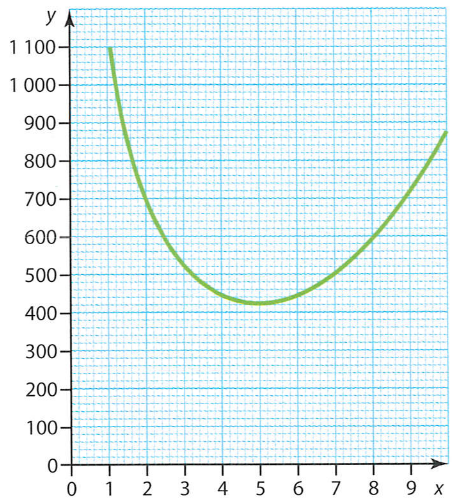
Sujet BAC

71 Une entreprise fabrique chaque jour des rouleaux de tissu en coton. La production quotidienne varie entre 1 et 10 kilomètres de tissu. On note x la production de tissu en kilomètres. Le coût total de production, exprimé en euros, de x kilomètres de tissu est donné par la fonction C définie pour x appartenant à $[1\,;10]$ par :
$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$.

Partie A : Lectures graphiques

On appelle coût moyen de production la fonction C_M définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

La représentation graphique de la fonction C_M est donnée ci-dessous.



1. Donner par lecture graphique une valeur approchée de $C_M(7)$.

2. Déterminer par lecture graphique combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit fabriquer pour que le coût moyen de production soit minimal.

Partie B : Calculs

1. Montrer que :
$C_M(x) = 15x^2 - 120x + 500 + \dfrac{750}{x}$
pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;10]$.

2. a. Démontrer que :
$C'_M(x) = \dfrac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$
pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\,;10]$.

b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ et dresser le tableau de variation de C_M sur l'intervalle $[1\,;10]$.

c. En déduire la longueur de tissu à produire pour que le coût moyen soit minimal.

72 Un artisan fabrique des meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués est donné par : $C(x) = x^2 + 50x + 900$, pour $x \in [10\,;60]$.

Partie A

1. Quel est le coût de production de 20 meubles ?

2. Quel est le coût de production par meuble, lorsque l'artisan fabrique 20 meubles ?

3. Soit $f(x)$ le coût unitaire moyen pour x meubles fabriqués. Exprimer $f(x)$ en fonction de x, pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;60]$.

Partie B

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[10\,;60]$ par :
$f(x) = x + 50 + \dfrac{900}{x}$.

1. Justifier que $f'(x) = \dfrac{(x-30)(x+30)}{x^2}$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[10\,;60]$.

3. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	10	15	20	25	30	40	45	50	60
$f(x)$									

4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : 1 cm pour 5 meubles en abscisses et 1 cm pour 5 euros en ordonnées en commençant la graduation à 100.

Partie C

Dans cette partie, la production est comprise entre 10 et 60 meubles.

1. Quel nombre de meubles doit fabriquer l'artisan pour que le coût unitaire moyen soit minimal ? Indiquer ce coût.

2. Chaque meuble est vendu 115 euros.

a. Construire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 115$ sur le graphique précédent.

b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

c. En déduire l'intervalle de production pour lequel l'artisan réalise un bénéfice.

3. Exprimer, en fonction de x, la recette $R(x)$ produite par la vente de x meubles.

4. En déduire l'expression en fonction de x du bénéfice $B(x)$ réalisé par la vente des x meubles (utiliser l'expression de $C(x)$ donnée dans la Partie A).

5. Calculer $B(20)$, $B(45)$ et $B(30)$. Les résultats trouvés sont-ils en accord avec les conclusions de la question **2. c.** ?