2 Fonction inverse

CAPACITÉ

- Étudier et représenter des fonctions obtenues par combinaisons linéaires de la fonction inverse et de fonctions polynomiales de degré au maximum 3.

Une entreprise cherche assez naturellement à minimiser ses coûts de production. Tout aussi généralement, ce n'est pas le coût de chaque unité produite qu'elle cherche à rendre minimal, mais le coût moyen de production, c'est-à-dire le coût global de production par unité produite.

Comment déterminer la quantité à produire par une entreprise pour minimiser ses coûts de production ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 37

4:25

Découvrons la fabrication du verre

▶ lienmini.fr/10445-40

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde et de Première

Questions Flash

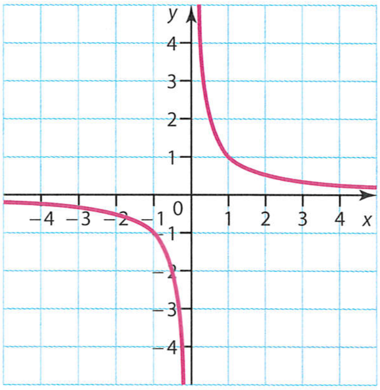
Diaporama

15 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10445-41

1 La fonction inverse

- La fonction inverse est la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x}}$. Sa courbe représentative est une hyperbole.
- La fonction inverse est **impaire** ; l'hyperbole représentant la fonction est donc symétrique par rapport à l'origine O du repère.
- La fonction inverse est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.



2 Signe d'une fonction affine

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=ax+b}$, où $a\neq 0$, s'annule pour $x=-\frac{b}{a}$. Elle est du signe de a lorsque $x>-\frac{b}{a}$.

3 Signe d'une fonction polynôme de degré 2

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)}$, où $a\neq 0$, s'annule pour $x=x_1$ et pour $x=x_2$. Elle est du signe de a sauf sur l'intervalle $]x_1\,;x_2[$.

Vérifier les acquis de Seconde et de Première

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	Aide
1. L'inverse de 3 par la fonction inverse est :	-3	0,333	$\frac{1}{3}$	1
2. Parmi ces différentes propositions, celle qui est exacte est :	$\frac{1}{25}<\frac{1}{27}<\frac{1}{29}$	$\frac{1}{147}<\frac{1}{14{,}8}<\frac{1}{1{,}49}$	$\frac{1}{54}<\frac{1}{58}<\frac{1}{5{,}2}$	1
3. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-1$ est :	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -0{,}5 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0{,}5 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 0{,}5 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & \end{array}$	2
4. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-0{,}1x+4$ est :	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 40 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -40 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 40 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & \end{array}$	2
5. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}5(x+2)(x+6)$ est :	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -6 & & -2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -6 & & -2 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 2 & & 6 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	3
6. Le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x-3)(x+1)$ est :	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & -3 & & 1 & & +\infty \\ \hline f(x) & & - & 0 & + & 0 & - & \end{array}$	3

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 Il y a une limite à tout PYTHON

OBJECTIF Étudier le comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition → Cours 1 p. 38

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	10	800	10 000	50 000	400 000	1 000 000
$f(x)$						

b. Vers quel nombre semblent se rapprocher les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

2. Si cette conjecture est vraie, cela signifie qu'on peut s'approcher de la valeur obtenue autant qu'on le souhaite. On vérifie cela à l'aide d'un algorithme écrit en langage Python :

```python
A=float(input("Entrer un nombre positif proche de 0 "))
x=1
while 1/x > A:
    x=10*x
print('x=',x)
```

a. Le programmer et donner la valeur obtenue à la sortie lorsque $A=0{,}000\,01$.

b. Interpréter le résultat affiché.

c. Donner la valeur obtenue lorsque $A=2{,}5\times10^{-8}$ et interpréter le résultat obtenu.

Synthèse $\dfrac{1}{x}$ peut être **aussi proche de 0** que l'on veut si l'on choisit x **suffisamment grand**.

On note : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

3. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	−10	−1 000	−8 000	−100 000	−500 000	−2 000 000
$f(x)$						

b. Recopier et compléter : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots\ldots$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\ldots$

4. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	1	0,1	0,025	0,000 08	0,000 002	0,000 000 1
$f(x)$						

b. Comment semblent se comporter les $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0 ?

5. Si cette conjecture est vraie, cela signifie qu'on peut obtenir des valeurs de $f(x)$ aussi grandes que l'on veut en s'approchant suffisamment de 0 en restant positif. On vérifie cela à l'aide d'un algorithme écrit en langage Python :

```python
A=float(input("Entrer un nombre positif"))
x=0.1
N=1
while 1/x < A:
    N=N+1
    x=1/10**N
print('x=',x)
```

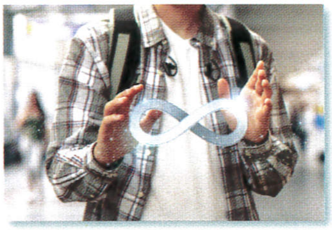
a. Le programmer et donner la valeur obtenue à la sortie lorsque $A=350\,000$.

b. Interpréter le résultat affiché.

c. Donner la valeur obtenue lorsque $A=20\,000\,000$ et interpréter le résultat obtenu.

Synthèse $\dfrac{1}{x}$ peut être **aussi grand** que l'on veut si l'on choisit x **positif suffisamment proche de 0**.

On note : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{1}{x}=+\infty$



6. a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	−1	−0,05	−0,000 1	−0,000 02	−0,000 004	−0,000 000 5
$f(x)$						
$\lvert f(x)\rvert$						

b. Comment semblent se comporter les valeurs de $\lvert f(x)\rvert$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus proches de 0 ?

c. Recopier et compléter : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\dfrac{1}{x}=\ldots\ldots\ldots$

2 À la recherche de la dérivée TABLEUR

OBJECTIF Déterminer le nombre dérivé de la fonction inverse en un nombre réel → Cours 2 p. 38

1. Recopier et compléter :

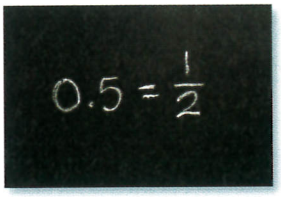
Si f est une fonction dérivable en un a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ldots$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a. Ouvrir une feuille de tableur et suivre les instructions suivantes :

Étape 1 Reproduire la première ligne comme ci-dessous :

	A	B	C
1	h	f(2+h)-f(2)	Taux de variation



Étape 2 Dans la cellule A2, saisir le nombre 0,5 et dans la cellule A3 saisir la formule =A2/2.
Étirer la cellule A3 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Étape 3 Dans la cellule B2, saisir la formule permettant de calculer $f(2+h)-f(2)$.
Étirer la cellule B2 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Étape 4 Saisir dans la cellule C2 la formule qui convient pour que soit calculé le taux de variation souhaité.
Étirer la cellule C2 vers le bas jusqu'à la ligne 20.

Lorsque h se rapproche de 0 (en étant positif), quelle est la limite du taux de variation ?

b. Remplacer le nombre 0,5 de la cellule A2 par – 0,5.
Lorsque h se rapproche de 0 (en étant négatif), quelle est la limite du taux de variation ?

c. À l'aide des questions précédentes, conjecturer la valeur de $f'(2)$.

d. Justifier que pour tout nombre réel h non nul, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -\dfrac{1}{2(2+h)}$ puis valider la conjecture de la question **c.**

3. Généralisation

Soit a un nombre réel non nul. Justifier que pour tout nombre réel h non nul : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$.

En déduire une expression de $f'(a)$ en fonction de a.

3 Attention, embouteillages sur la chaîne ! STI2D INDUSTRIE

OBJECTIF Étudier les variations d'une fonction pour en déterminer son minimum → Cours 2 p. 38

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre.
Le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :
$C(x)=0{,}5x^3-4x^2+20x+72$.
Le coût moyen de production d'une tonne de bouteilles quand on en produit x tonnes est la fonction notée C_M et définie par $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$ avec $x \in [1 ; 10]$.

1. Exprimer le coût moyen de production en fonction de x.

2. a. Tracer la courbe représentative de la fonction C_M dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 1 tonne sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'euros sur l'axe des ordonnées).

b. Déterminer graphiquement le nombre de bouteilles à produire pour obtenir un coût moyen minimum.

3. a. Justifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 10]$, $C'_M(x)=\dfrac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $C'_M(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction C_M.

c. Retrouver la quantité à produire pour obtenir un coût moyen minimum.

1 Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

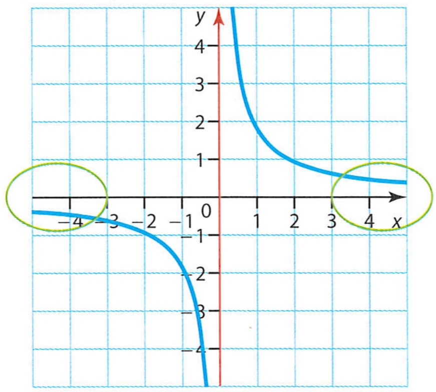
La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, on s'intéresse au comportement des images $\dfrac{1}{x}$ lorsque x se rapproche des bornes de son ensemble de définition.

Propriétés • Soit x un nombre réel strictement **positif**. On peut rendre $\dfrac{1}{x}$ **aussi proche de 0** que l'on veut si l'on choisit **x suffisamment grand**.

On note alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

• Soit x un nombre réel strictement **négatif**. On peut rendre $\dfrac{1}{x}$ **aussi proche de 0** que l'on veut si l'on choisit **x suffisamment petit**.

On note alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$



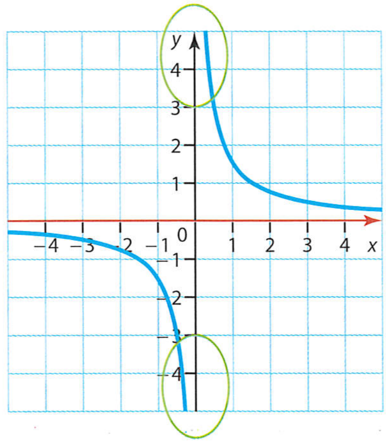
Conséquence graphique • En $-\infty$ et en $+\infty$, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.
On dit que l'axe des abscisses est **asymptote horizontale** à l'hyperbole en $-\infty$ et en $+\infty$.

Propriétés • On peut rendre $\dfrac{1}{x}$ **aussi grand** que l'on veut dès lors **que x est choisi suffisamment proche de 0** en restant **positif**.

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

• On peut rendre $\dfrac{1}{x}$ **aussi grand** que l'on veut en valeur absolue dès lors **que x est choisi suffisamment proche de 0** en restant **négatif**.

On note alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty$



Conséquence graphique • Lorsque x se rapproche de 0, l'hyperbole représentant la fonction inverse se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.
On dit que l'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à l'hyperbole.

→ Voir Exercice résolu 1

2 Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

Théorème La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$. On a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Tableau de variation complet de la fonction inverse :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

→ Voir Exercices résolus 2 et 3

Exercice résolu 1 — Calculer la limite d'une fonction

Soit f la fonction définie par $f(x)=5\times\frac{1}{x}+2$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Méthode — **Pour calculer la limite d'une fonction**

1. On **identifie** les opérations et la fonction inverse dans l'expression de la fonction.
2. On **utilise** le cours sur les limites de la fonction inverse et les règles de calculs pour déterminer la limite demandée.

Solution

$f(x)=5\times\frac{1}{x}+2$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}5\times\frac{1}{x}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}5\times\frac{1}{x}+2=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

→ Voir **Exercices 15 à 22** p. 42

Exercice résolu 2 — Calculer la dérivée d'une fonction

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=-5x^2+x-\frac{2}{x}$.

Méthode — **Pour calculer la dérivée d'une fonction**

1. On **identifie** l'opération et les fonctions usuelles dans l'expression de la fonction.
2. On **calcule** les dérivées des fonctions usuelles identifiées.

Solution

$f=u+v+w$ avec $u(x)=-5x^2$, $v(x)=x$ et $w(x)=-\frac{2}{x}$. Donc $f'(x)=-5\times2x+1-2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-10x+1+\frac{2}{x^2}$.

→ Voir **Exercices 23 à 30** p. 42-43

Exercice résolu 3 — Étudier les variations d'une fonction

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

Méthode — **Pour étudier les variations d'une fonction**

1. On **calcule** $f'(x)$ que l'on écrit sous la forme d'un quotient et dont on factorise, si l'on peut, le numérateur.
2. On **étudie** le signe de $f'(x)$. Si $f'(x)$ change de signe, on détermine avant ce qui la fait changer de signe. On **obtient** les variations de f grâce au signe de $f'(x)$.

Solution

$f'(x)=1+4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$

Sur $\mathbb{R}^*$, $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x-2)$.
Or, la fonction $x\mapsto 1(x-2)(x+2)$ est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont -2 et 2. Elle est du signe de a, autrement dit strictement positive (car $a=1$) sauf sur l'intervalle $]-2\,;2[$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	4	↗	

→ Voir **Exercices 31 à 36** p. 43

L'essentiel

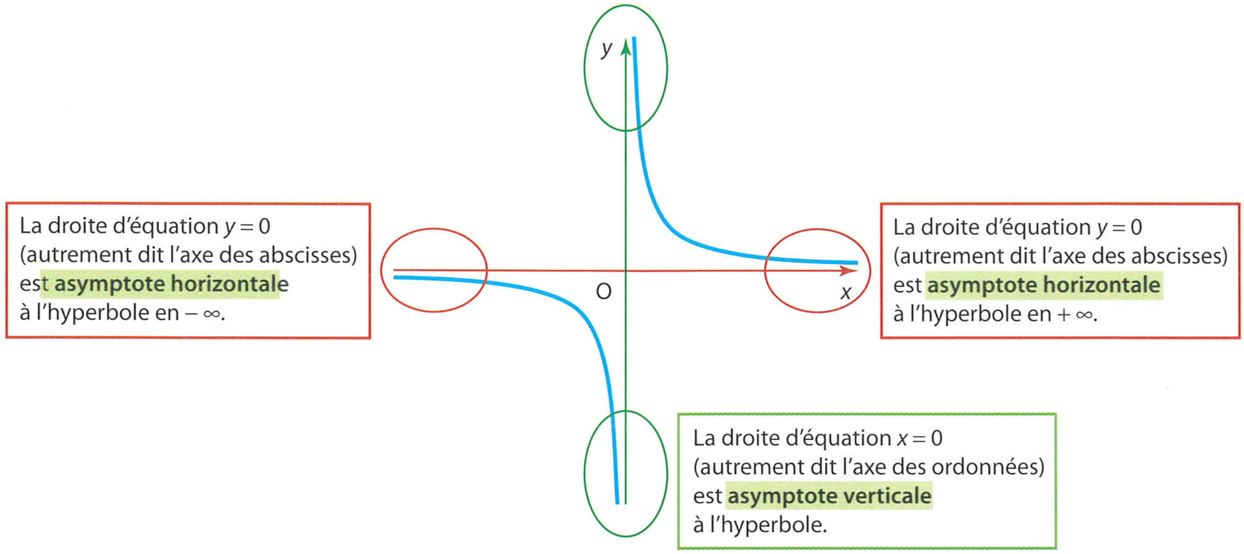
1 Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\, \cup\,]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Lorsque x se rapproche des bornes de l'ensemble de définition de f, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

- **Interprétation graphique**



2 Dérivée et sens de variation de la fonction inverse

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

On a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

- **Tableau de variation**

Le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0