1 Suites numériques

CAPACITÉS

- Prouver que trois nombres sont (ou ne sont pas) les termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer la raison d'une suite arithmétique ou géométrique modélisant une évolution.
- Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Reconnaître une situation relevant du calcul d'une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Au 1er janvier 2019, un particulier installe 20 m^2 de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il sait que 1 m^2 produit 125 kWh par an avec cependant une perte de 3 % par an. La durée de vie de l'installation est estimée à 25 ans.

La rentabilité financière de l'installation est-elle assurée ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 15

2:25

Découvrons comment fonctionnent ces panneaux

▶ lienmini.fr/10445-55

Pour retrouver les automatismes

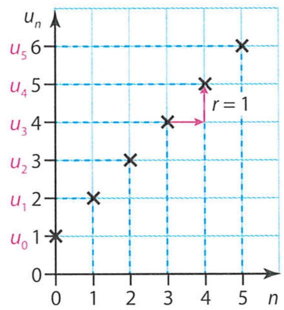
Revoir les acquis de Première

Questions Flash
Diaporama
20 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10445-56

1 Suites arithmétiques

Pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel appelé raison de la suite :
- si la raison r est positive alors la suite (u_n) est **croissante** ;
- si la raison r est négative alors la suite (u_n) est **décroissante**.

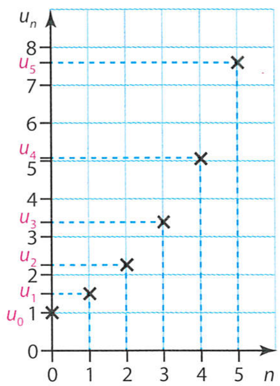
Sa **représentation graphique** sous forme d'un nuage de points dont les coordonnées sont $(n\,;u_n)$ constitue une **droite**. On parle alors de croissance linéaire.



2 Suites géométriques

Pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$ où q est un réel appelé raison de la suite :
- si la raison est **comprise entre 0 et 1** et le premier terme u_0 **positif** alors la suite (u_n) est **croissante** ;
- si la raison q est **supérieure à 1** et le premier terme u_0 **positif** alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Sa **représentation graphique** sous forme d'un nuage de points dont les coordonnées sont $(n\,;u_n)$ constitue une **courbe** de type exponentielle.



Vérifier les acquis de Première

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 8$. La valeur de u_1 est :	-3	3	$\frac{8}{5}$	13	1
2. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$. La valeur de u_1 est :	10	$2{,}5$	$0{,}4$	-3	2
3. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison $q = 0{,}8$. Cette suite peut modéliser :	une hausse de 8 %	une hausse de 80 %	une baisse de 20 %	une baisse de 2 %	2
4. Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_3 = 7$ et de raison $r = 8$. La valeur de u_2 est :	13	1	-1	2	1
5. Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_2 = -2$ et de raison $q = 3$. La valeur de u_5 est :	-54	54	-18	7	2
6. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $r = 4$. On a :	$u_4 = 18$	$u_4 = 20$	$u_5 = 30$	$u_5 = 26$	1

→ Voir Corrigé p. 324

Activités

1 Moyenne arithmétique contre moyenne géométrique

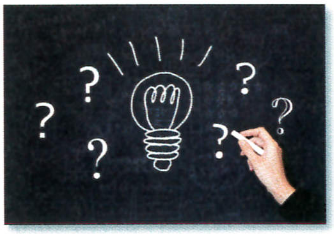
STMG FINANCES

OBJECTIF Comparer deux méthodes de calcul d'une moyenne → Cours 1A, 2A pp. 16 et 18

Une société financière propose à ses clients un « super *deal* » : s'ils achètent aujourd'hui des actions de l'entreprise APLAT, la société garantit à ses clients les rendements suivants :
+50 % la première année et −40 % de la somme de départ la seconde année.
Antoine décide de se lancer dans l'aventure.

1. Il calcule la moyenne *arithmétique* des deux pourcentages. Quel est le pourcentage moyen trouvé ? Ce pourcentage engage-t-il au placement ?

2. Ayant un doute, Antoine décide de calculer le résultat de son investissement au bout de deux ans à partir d'une mise de départ de 1 000 €.
a. Quel est le résultat de cet investissement la première année ? Quel est alors son capital ?
b. À partir de la somme globale dont Antoine dispose à la fin de la première année, déterminer la valeur totale de son portefeuille au bout des deux ans.
c. Le placement est-il aussi avantageux que promis ? Justifier.



3. a. Déterminer le coefficient multiplicateur a pour la première année.
b. Déterminer le coefficient multiplicateur b pour la deuxième année.
c. Calculer la moyenne *géométrique* des deux nombres a et b.
d. Quel est le taux moyen d'évolution du placement par année ?

4. Quelle est la méthode la mieux adaptée : moyenne arithmétique ou moyenne géométrique ?

2 Une suite pour la musique

OBJECTIF Exprimer u_n en fonction de n → Cours 1B p. 16

Mathilde a reçu pour étrennes au 1er janvier 2020 la somme de 50 €.
Sa mère lui donne aussi 10 € le premier jour de chaque mois.
Mathilde décide d'économiser toute l'année afin de s'acheter une guitare au prix de 200 €.
On désigne par u_n la somme dont dispose Mathilde le mois $(n+1)$ de l'année.
Ainsi, $u_0 = 50$ (janvier est le $0+1$ soit premier mois de l'année).

1. De quelle somme dispose Mathilde au 1er février 2020 ? Quel terme de la suite a-t-on calculé ?

2. De quelle somme dispose Mathilde au 1er mars 2020 ? Quel terme de la suite a-t-on calculé ?

3. À partir des valeurs de u_0, u_1 et u_2, conjecturer la nature de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison 10.
a. Exprimer le terme u_n en fonction de n.
b. Déterminer alors la somme dont dispose Mathilde au 1er mai 2020.

5. Mathilde peut-elle s'offrir sa guitare ? Justifier.

3 Un roi qui « riz »

OBJECTIF Exprimer un terme d'une suite géométrique en fonction de n → Cours 2B p. 18

D'après la légende, c'est en Inde que le jeu d'échecs a été inventé, pour le roi Belkib par le sage Sissa. Le roi, enchanté, décida de récompenser Sissa.
– « Que veux-tu ? », demanda alors le roi au sage.
– « Voyez ce plateau de jeu, offrez-moi un grain de riz sur la première case, puis 2 grains de riz sur la seconde case, 4 grains sur la troisième, 8 sur la quatrième, etc. », répliqua Sissa.
Le roi accepta sans hésitation, persuadé de s'en tirer à bon compte.

1. La suite de nombres 1, 2, 4, 8 semble-t-elle être géométrique ? Si oui, en déterminer la raison et le premier terme.

2. On suppose que sur la n^e case, il y a u_n grains de riz. On note u_{n+1} le nombre de grains de riz dans la case suivante.
a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
b. En déduire la nature de la suite (u_n).
c. Exprimer alors u_n en fonction de n. En déduire le nombre de grains de riz disposés sur la 8^e case.

3. Déterminer le nombre de grains de riz que le roi doit offrir à Sissa, sachant que le plateau comporte 64 cases.

4. Sachant qu'un kilogramme de riz compte 60 000 grains de riz, combien Sissa doit-il recevoir de tonnes de riz ?

5. Chercher sur internet la production mondiale de riz et commenter ce résultat.

4 Panneaux photovoltaïques

STI2D — DÉVELOPPEMENT DURABLE

OBJECTIF Déterminer une somme de termes d'une suite géométrique → Cours 2C p. 18

Au 1er janvier 2019, un particulier installe 20 m² de panneaux photovoltaïques à son domicile. Pour estimer la rentabilité de cette installation, il sait que :

> En France, 1 m² de panneaux photovoltaïques correctement orientés produit environ 125 kWh/an.
> La première année, une installation produit effectivement cette quantité et on estime que la perte de rendement est de 3 % par an.
> La rentabilité financière est assurée à partir du moment où la quantité totale d'énergie produite depuis le début de l'installation dépasse 20 000 kWh.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2019 + n$.

1. a. Déterminer la quantité d'énergie produite en 2019 et celle produite en 2020.
b. Vérifier que $u_{n+1} = 0{,}97 \times u_n$.

2. Quelle estimation, à la dizaine de kWh près, peut-on donner de la quantité d'énergie produite en 2050 ?

3. Que devient la quantité d'énergie produite annuellement au bout d'un grand nombre d'années ?

4. En quelle année l'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement ?

5. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
a. Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{24} = \sum_{k=0}^{24} u_k$.
b. La rentabilité financière de l'installation est-elle assurée ?

1 Suites arithmétiques

A Moyenne arithmétique de deux nombres

Définition Soit a et b deux nombres. La **moyenne arithmétique** des deux nombres a et b est donnée par la formule suivante : $\dfrac{a+b}{2}$.

Exemple • La moyenne arithmétique des deux nombres 5 et 17 est : $\dfrac{5+17}{2}$ soit 11.

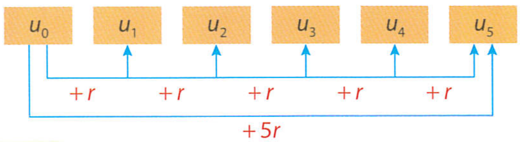
→ Voir Exercice résolu 1

B Expression en fonction de n du terme de rang n

Définition Une **suite arithmétique** est définie de manière récurrente par la donnée d'un terme (très souvent de rang 0 : u_0 ou de rang 1 : u_1) et de sa raison r (r est un réel). Alors, pour tout entier naturel n, on a la relation suivante :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Remarque • L'exploitation de la définition d'une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r sous forme de schéma permet de mieux comprendre comment exprimer, par exemple, u_5 en fonction de 5 :



Propriété L'expression **en fonction de n du terme de rang n** est donnée par la formule suivante :

• Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0, alors $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

• Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1, alors $\boldsymbol{u_n = u_1 + (n-1)r}$.

→ Voir Exercice résolu 2

C Somme des n premiers termes

Propriété La **somme** des n premiers termes d'une **suite arithmétique** est égale à : $\dfrac{n \times (\text{1er terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$.

Remarques

• Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0, alors la somme des n premiers termes de cette suite arithmétique sera :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n(2u_0 + (n-1)r)}{2}.$$

• Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1, alors la somme des n premiers termes de cette suite arithmétique sera :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n(2u_1 + (n-1)r)}{2}.$$

→ Voir Exercice résolu 3

Histoire des maths

Le symbole Σ a été proposé par **Leonhard Euler** en 1755. Euler est un mathématicien suisse du XVIIIe siècle.

Détail d'un billet de 10 francs suisses.

Exercice résolu 1 Calculer une moyenne arithmétique

Un automobiliste roule pendant une heure à la vitesse constante de 90 km·h^{-1}, puis pendant encore une heure à la vitesse constante de 120 km·h^{-1}.
Déterminer à quelle vitesse constante il aurait dû rouler pendant la durée totale du trajet pour effectuer le même nombre de kilomètres.

Méthode Pour calculer une moyenne arithmétique

1. On **détermine** la distance parcourue pendant la première heure de trajet puis pendant la 2e heure de trajet.
2. On **détermine** la vitesse moyenne en effectuant la moyenne arithmétique des deux distances parcourues.

Solution

On utilise la formule $d = v \times t$ dans laquelle d est la distance parcourue et t le temps (la durée). La première heure, la distance parcourue est 90 km et la deuxième heure la distance parcourue est 120 km. La vitesse constante à laquelle l'automobiliste aurait dû rouler est obtenue à partir de : $v = \frac{d}{t} = \frac{90+120}{1+1} = \frac{90+120}{2} = 105$ soit 105 km·h^{-1}.

→ Voir Exercices 2 et 3 p. 21

Exercice résolu 2 Exprimer en fonction de *n* le terme de rang *n*

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer le terme u_n en fonction de n.
En déduire les valeurs de u_{20} et u_{50}.

Méthode Pour exprimer en fonction de *n* le terme de rang *n*

1. On **regarde** quel est le premier terme de la suite (ici u_0) et la valeur de la raison r.
2. On **utilise** la formule $u_n = u_0 + nr$.

Solution

1. $u_1 = u_0 + r = 2 + 3 = 5$; $u_2 = u_1 + r = 5 + 3 = 8$; $u_3 = u_2 + r = 8 + 3 = 11$.
2. $u_n = u_0 + nr$. Donc $u_n = 2 + 3n$. Donc $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 62$; $u_{50} = 2 + 3 \times 50 = 152$.

→ Voir Exercices 27 à 29 p. 22

Exercice résolu 3 Faire la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 19$ et de raison $r = 5$.
Déterminer $S_{10} = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

Méthode Pour faire la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique

1. On **regarde** quel est le premier terme de la suite (ici u_0) et la valeur de la raison r.
2. On **détermine** le nombre de termes de cette somme.
3. On **calcule** la valeur du dernier terme de cette somme et on utilise la formule.

Solution

Le premier terme est $u_0 = 19$.
Cette somme comporte 11 termes. Attention, la somme commence à $k = 0$ et finit à $k = 10$.

Le dernier terme est : $u_{10} = u_0 + 5n = 19 + 5 \times 10 = 69$.
Donc $S_{10} = \frac{11}{2}(19 + 69) = 484$.

→ Voir Exercices 33 à 35 p. 22

2 Suites géométriques

A Moyenne géométrique de deux nombres

Définition Soit a et b deux nombres de même signe. La **moyenne géométrique** des deux nombres a et b est donnée par la formule suivante : $\sqrt{a \times b}$.

Exemple • La moyenne géométrique des deux nombres 4 et 9 est $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$.

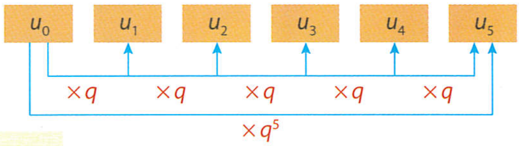
→ Voir Exercice résolu 4

B Expression en fonction de n du terme de rang n

Définition Une **suite géométrique** est définie de manière récurrente par la donnée d'un terme (très souvent de rang 0 : u_0 ou de rang 1 : u_1) et de sa raison q (q est un réel). Alors, pour tout entier naturel n, on a la relation suivante :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Remarque • L'exploitation de la définition d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de sa raison q sous la forme d'un schéma permet de mieux comprendre comment exprimer, par exemple, u_5 en fonction de 5.



Propriété L'expression en fonction de n du terme de rang n est donnée par la formule suivante :

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0, alors $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.
- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1, alors $\boldsymbol{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$.

→ Voir Exercice résolu 5

C Somme des n premiers termes

Propriété La **somme** des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$ est égale à : **1^er^ terme de la somme** $\times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Remarque

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 0**, soit u_0, alors la somme des n premiers termes de cette suite géométrique sera :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

- Si le premier terme connu de la suite est le terme de **rang 1**, soit u_1, alors la somme des n premiers termes de cette suite géométrique sera :

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

- Si $q = 1$ alors la suite est constante et la somme des n premiers termes de cette suite est égale à n.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 4 — Calculer une moyenne géométrique

Dans un pays, au mois de janvier, les prix ont augmenté de 0,9 %, puis en février de 1,2 %. Déterminer l'augmentation mensuelle constante qu'il y aurait dû avoir pendant les deux mois pour obtenir le même résultat à l'issue des deux mois.

Méthode Pour calculer une moyenne géométrique

1. On **détermine** le coefficient multiplicateur (CM) relatif à l'augmentation du mois de janvier et du mois de février.
2. On **détermine** l'augmentation mensuelle constante en effectuant la moyenne géométrique des deux coefficients multiplicateurs précédents.

Solution

$CM_1 = 1 + \frac{0,9}{100} = 1,009$. $CM_2 = 1 + \frac{1,2}{100} = 1,012$.

$CM = \sqrt{CM_1 \times CM_2} = \sqrt{1,021108} \approx 1,0105$.

L'augmentation mensuelle est : $1,0105 - 1 = 0,0105$ soit une augmentation de 1,05 %.

→ Voir Exercices 14 et 15 p. 21

Exercice résolu 5 — Exprimer en fonction de *n* le terme de rang *n*

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer pour tout entier n le terme u_n en fonction de n.

3. En déduire les valeurs de u_7, u_{11} et u_{19}.

Méthode Pour exprimer en fonction de *n* le terme de rang *n*

1. On **regarde** quel est le premier terme de la suite (ici u_0) et la valeur de la raison q.
2. On **utilise** la formule $u_n = u_0 \times q^n$.
3. On **remplace** n par 7 puis 11 puis 19 dans la formule précédente.

Solution

1. $u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$; $u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$; $u_3 = u_2 \times q = 12 \times 2 = 24$.

2. $u_n = u_0 \times q^n$. Donc $u_n = 3 \times 2^n$.

3. $u_7 = 3 \times 2^7 = 384$; $u_{11} = 3 \times 2^{11} = 6\,144$; $u_{19} = 3 \times 2^{19} = 1\,572\,864$.

→ Voir Exercices 37 à 41 p. 23-24

Exercice résolu 6 — Faire la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{9}$ et de raison $q = 3$.
Déterminer $S_8 = \sum_{k=0}^{8} u_k$.

Méthode Pour faire la somme des *n* premiers termes d'une suite géométrique

1. On **détermine** le nombre de termes de cette somme de 1er terme u_0.
2. On **utilise** la formule : 1er terme de la somme $\times \frac{1-q^n}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

Solution

Le premier terme est $u_0 = \frac{1}{9}$. Cette somme comporte 9 termes. Attention, la somme commence à $k = 0$ et finit à $k = 8$.

Donc $S_8 = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{9} \times \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{9\,841}{9}$.

→ Voir Exercices 43 à 45 p. 24

L'essentiel

1 Suites arithmétiques

Moyenne arithmétique

Soit deux nombres a et b ; la moyenne arithmétique de a et b est : $\dfrac{a+b}{2}$.

Exemple • Mathilde a obtenu 15 et 17 en mathématique, sa moyenne arithmétique est : $\dfrac{15+17}{2}$ soit 16.

Expression en fonction de n du terme de rang n

(u_n) est la suite arithmétique de raison r telle que $u_{n+1} = u_n + r$

- Le premier terme de cette suite est u_0 : $u_n = u_0 + nr$
- Le premier terme de cette suite est u_1 : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Somme des n premiers termes

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est égale à :

$$\frac{n(1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$$

2 Suites géométriques

Moyenne géométrique

Soit deux nombres a et b de même signe ; la moyenne géométrique de a et b est $\sqrt{a \times b}$.

Exemple • La moyenne géométrique des deux nombres 5 et 6 est $\sqrt{5 \times 6} = \sqrt{30}$.

Expression en fonction de n du terme de rang n

(u_n) est la suite géométique de raison q telle que $u_{n+1} = u_n \times q$

- Le premier terme de cette suite est u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$
- Le premier terme de cette suite est u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Somme des n premiers termes

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à :

$$1^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

Remarque • Si $q = 1$ alors cette somme est égale à n.