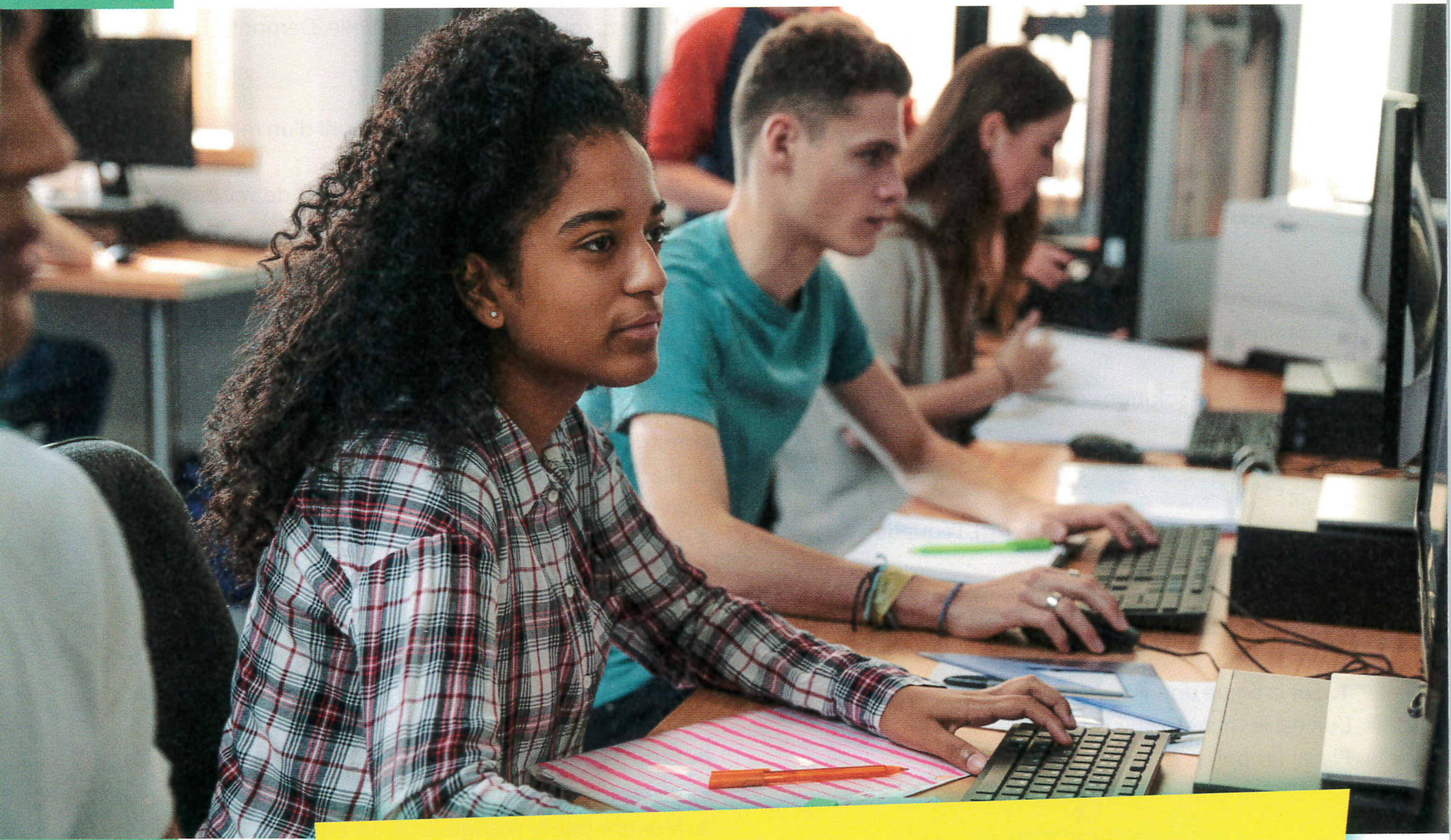
# Les outils pour réussir





Les outils numériques occupent une place centrale dans les nouveaux programmes des classes de Terminale des séries technologiques.
Les pages suivantes regroupent les utilisations essentielles de ces outils en divers modules.
Chaque élève pourra y trouver les instructions nécessaires aux tâches spécifiques à réaliser à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur équipé des logiciels adaptés.

# Les outils pour réussir

# 1 Avec une calculatrice Casio graph 35+E

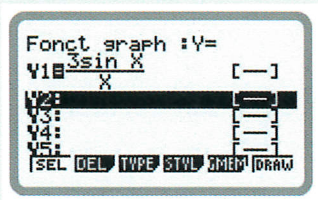
## Le mode examen

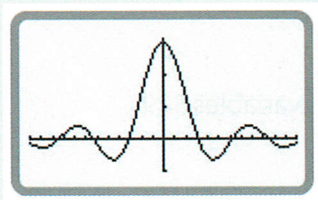
**Pour entrer en mode examen :** la calculatrice étant éteinte, presser simultanément les touches cos, 7 et AC/ON. Ensuite, valider avec la touche F1.

**Pour sortir du mode examen :** connecter la calculatrice à une autre qui n'est pas en mode examen avec un câble trois broches. Sur les deux calculatrices, dans le menu LINK, presser F4 (CABL) puis F2 (câble 3 broches). Sur la calculatrice n'étant pas en mode examen, dans le menu LINK, presser F3 (EXAM) puis F1 (Déverrouiller Mode Examen), et à nouveau F1 (Oui) pour valider.

## Afficher la courbe représentative d'une fonction

Dans le menu GRAPH, enregistrer l'expression de la fonction, en utilisant la touche XθT pour la variable *x*. Presser ensuite F6 (DRAW) pour afficher la courbe dans un repère.

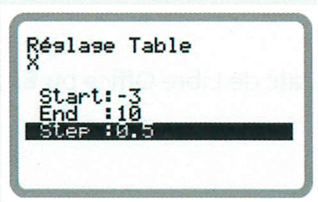


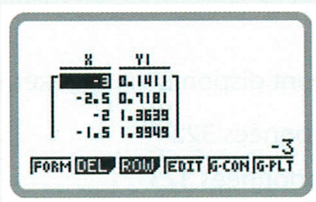



Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut presser les touches SHIFT et F3 ( V-Window) et modifier les valeurs Xmin (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses), Xmax (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses), Ymin et Ymax (pour l'axe des ordonnées).

## Afficher un tableau de valeurs d'une fonction

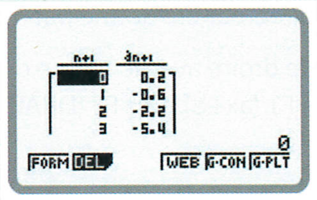
Dans le menu TABLE, après avoir enregistré l'expression de la fonction, presser la touche F5 (SET). Modifier les valeurs Start et End pour indiquer les valeurs minimale et maximale de *x* dans le tableau, et celle de Step pour indiquer le pas. Ensuite, presser la touche F6 (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.



## Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence

Dans le menu RECUR, après avoir enregistré l'expression de la suite, en utilisant la touche F2 pour la variable $u(n)$, presser la touche F5 (SET). Modifier les valeurs `Start` et `End` pour indiquer les valeurs minimale et maximale de $x$ dans le tableau, et celle de $a_0$ pour indiquer le premier terme de la suite. Ensuite, presser la touche F6 (TABL) pour afficher le tableau de valeurs.

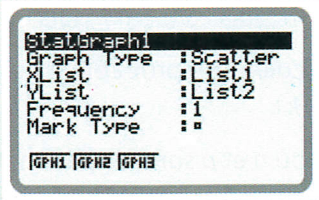




## Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables

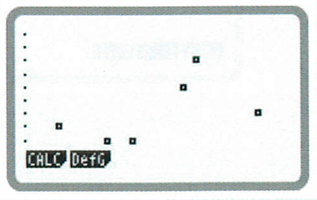
Dans le menu STAT, entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne `List1` et les valeurs de $y_i$ dans la colonne `List2`. Pour afficher le nuage de points correspondant, presser F1 (GRPH) puis F6 (SET).

Vérifier alors que les paramètres suivants sont enregistrés :

| | |
|---|---|
| Graph type: | Scatter |
| XList: | List1 |
| YList: | List2 |
| Frequency: | 1 |




Valider et presser F1 (GPH1). Il peut être nécessaire de changer les paramètres de la fenêtre dans `V-Window` pour obtenir un affichage optimal.



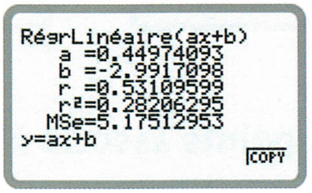
## Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

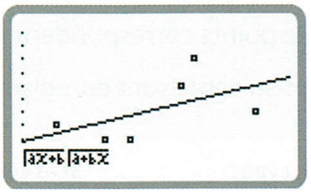
Dans le menu STAT, entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne `List1` et les valeurs de $y_i$ dans la colonne `List2`.

Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine avec la méthode des moindres carrés, presser F2 (CALC), puis F3 (REG), puis F1 (X), puis à nouveau F1 (ax+b).

Le coefficient directeur est donné par $a$ et l'ordonnée à l'origine par $b$.

Pour tracer cette droite avec le nuage de points, presser F1 trois fois (GRPH puis GPH1 puis CALC) puis F2(X), puis F1 (ax+b) puis F6 (DRAW).



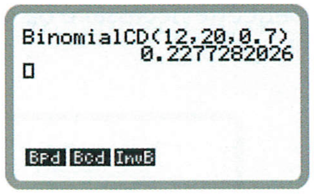




## Calcul de probabilités suivant une loi binomiale

Dans le menu RUN·MAT, presser OPTN, puis F5 (STAT), puis F3 (DIST), puis F5 (BINM).

Sélectionner F1 (Bpd) pour calculer une probabilité du type $P(X = k)$, ou F2 (Bcd) pour calculer une probabilité du type $P(X \leqslant k)$.

Rentrer les valeurs de $k$, $n$ et $p$ (où $n$ et $p$ sont les paramètres de la loi binomiale étudiée) dans cet ordre et séparés par des virgules, puis fermer la parenthèse et valider pour obtenir le résultat.



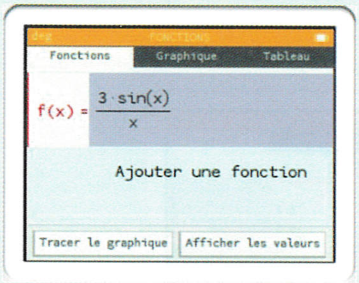
# 2 Avec une calculatrice NumWorks

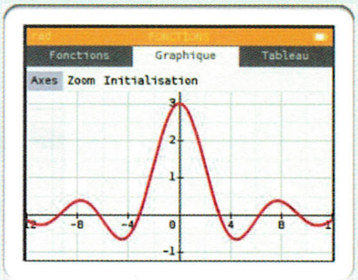
## Le mode examen

- **Pour entrer en mode examen :** dans le menu Paramètres, sélectionner `Mode examen`, puis valider.
- **Pour sortir du mode examen :** brancher la calculatrice à un ordinateur à l'aide d'un câble usb. Un message apparaît alors pour demander si vous souhaitez sortir du mode examen. Choisir `Valider`.

## Afficher la courbe représentative d'une fonction

Dans le menu Fonctions, aller dans `Ajouter une fonction` pour enregistrer l'expression de la fonction, en utilisant la touche `x,n,t` pour la variable *x*. Aller ensuite dans `Tracer le graphique` (ou dans l'onglet **`Graphique`**) pour afficher la courbe dans un repère.



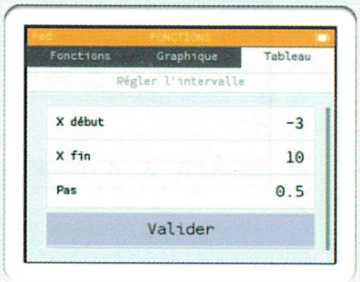



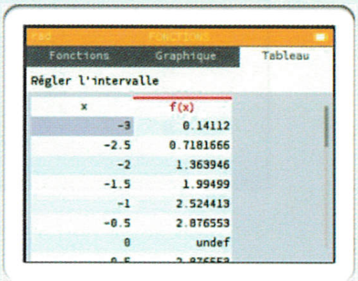

Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut aller dans le menu `Axes` de l'onglet **`Graphique`** et modifier les valeurs `Xmin` (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses) et `Xmax` (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses).

Les valeurs de l'axe des ordonnées seront modifiées automatiquement.

## Afficher un tableau de valeurs d'une fonction

Dans le menu Fonctions, après avoir enregistré l'expression d'une fonction, aller dans l'onglet **`Tableau`**. Pour choisir les valeurs de début et de fin de tableau, ainsi que le pas, aller dans `Régler l'intervalle`.

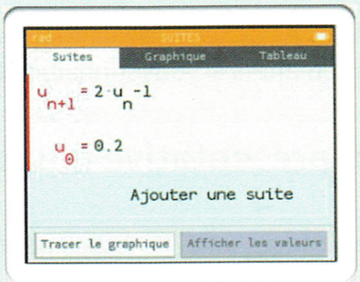


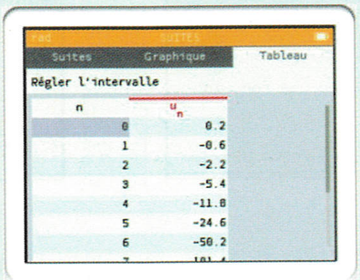
# NUMWORKS

## Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence

Dans le menu Suites, après avoir enregistré l'expression d'une suite dans l'onglet **Suites**, aller dans l'onglet **Tableau**.

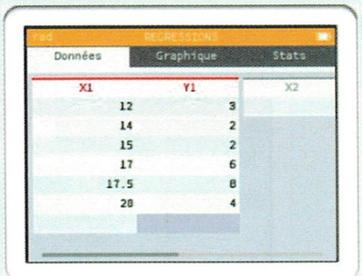


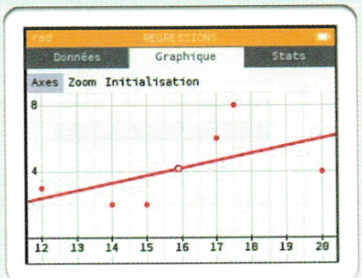

Pour choisir les valeurs de début et de fin de tableau, ainsi que le pas, aller dans `Régler l'intervalle`.




## Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables

Dans le menu Régressions, entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne X1 et les valeurs de $y_i$ dans la colonne Y1 de l'onglet **Données**. Le graphique est alors visible dans l'onglet **Graphique**.



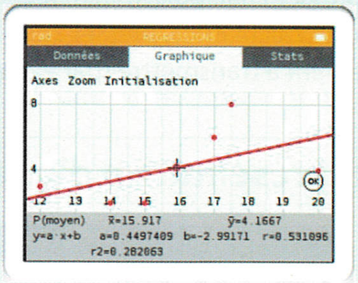



## Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

Dans le menu Régressions, entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne X1 et les valeurs de $y_i$ dans la colonne Y1 de l'onglet **Données**.

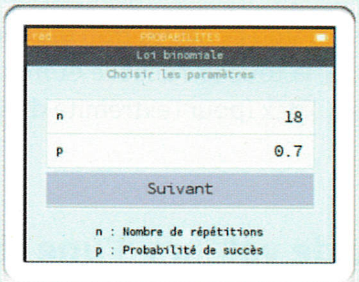
La droite d'ajustement affine obtenue avec la méthode des moindres carrés est alors visible dans l'onglet **Graphique**.

Son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine sont donnés par $a$ et $b$ en bas de l'écran.

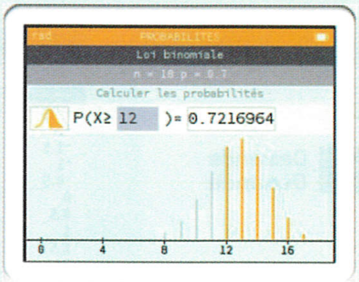



## Calcul de probabilités suivant une loi binomiale

Dans le menu Probabilités, choisir la rubrique `Binomiale`. Rentrer les valeurs des paramètres $n$ et $p$ de la loi binomiale étudiée.




Après validation, l'icône permet de choisir un calcul du type $P(X \leqslant k)$ ou $P(k \leqslant X \leqslant l)$ ou $P(k \leqslant X)$ ou $P(X = k)$. Indiquer ensuite la valeur de $k$ et valider.



# 3 Avec une calculatrice TI-83 Premium CE

## Le mode examen

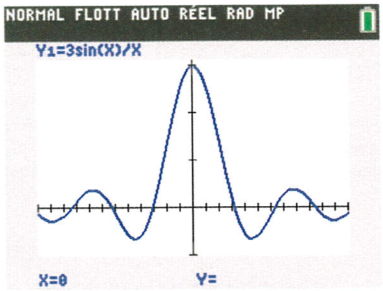
**Pour entrer en mode examen :** la calculatrice étant éteinte, presser simultanément les touches `annul` (sélectionner `Mode examen`), `entrer` et `on` pendant quelques secondes. Ensuite, valider avec la touche `zoom` (OK).

**Pour sortir du mode examen :** connecter la calculatrice à une autre avec un câble usb. Sur la calculatrice à déverrouiller, presser `2nde` puis `X,T,θ,n` (échanger) et dans l'onglet `RECEVOIR` sélectionner `1:Réception`. Sur l'autre calculatrice, presser `2nde` puis `X,T,θ,n` (échanger) et dans l'onglet `ENVOYER`, sélectionner un élément à transmettre (par exemple, une liste vide) et valider.

## Afficher la courbe représentative d'une fonction

Appuyer sur `f(x)` (ou `Y=` selon la version de la calculatrice). Enregistrer l'expression de la fonction à étudier, en utilisant la touche `X,T,θ,n` pour la variable *x*. Presser ensuite `graphe` pour afficher la courbe dans un repère.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
 Graph1  Graph2  Graph3
■\Y1=3sin(X)/X
■\Y2=
■\Y3=
■\Y4=
■\Y5=
■\Y6=
■\Y7=
■\Y8=
■\Y9=
```




Parfois, la fenêtre d'affichage est trop petite ou trop grande pour afficher correctement la courbe. Pour y remédier, il faut presser la touche `fenêtre` et modifier les valeurs `Xmin` (pour l'extrémité gauche de l'axe des abscisses), `Xmax` (pour l'extrémité droite de l'axe des abscisses), `Ymin` et `Ymax` (pour l'axe des ordonnées).

## Afficher un tableau de valeurs d'une fonction

Après avoir enregistré l'expression de la fonction à étudier, presser les touches `2nde` puis `fenêtre` (déf table). Modifier les valeurs `DébutTbl` et `Tbl` pour indiquer la valeur minimale de *x* dans le tableau, et celle du pas. Ensuite, presser les touches `2nde` puis `graphe` (table) pour afficher le tableau de valeurs.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
CONFIG TABLE
 DébutTbl=-3
 ΔTbl=0.5
Indpnt :  Auto  Demande
Dépndte :  Auto  Demande
```

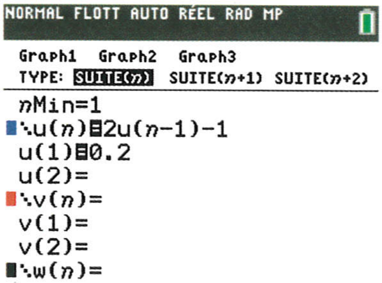
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR ΔTbl

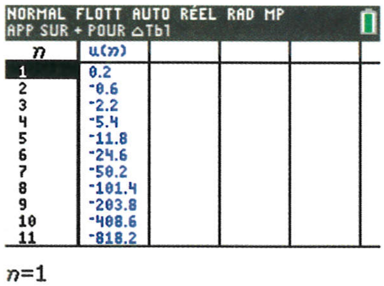
| X | Y1 |
|---|---|
| -3 | 0.1411 |
| -2.5 | 0.7182 |
| -2 | 1.3639 |
| -1.5 | 1.995 |
| -1 | 2.5244 |
| -0.5 | 2.8766 |
| 0 | ERREUR |
| 0.5 | 2.8766 |
| 1 | 2.5244 |
| 1.5 | 1.995 |
| 2 | 1.3639 |

X= -3

## Afficher un tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence

Appuyer sur la touche `mode` et, sur la troisième ligne, sélectionner `SUITE` (ou `SEQ` selon les modèles). Ensuite, presser la touche `f(x)` (ou `Y=` selon la version de la calculatrice). Modifier les valeurs de `nMin` pour déterminer le rang du premier terme (en général 0), de `u(n)` pour déterminer l'expression de $u(n)$ en fonction de $u(n-1)$, en utilisant les touches `2nde` et `7` pour taper $u$ et la touche `X,T,θ,n` pour $n$), et de `u(nMin)` pour indiquer la valeur du premier terme. Ensuite, presser les touches `2nde` et `graphe` (*table*) pour afficher le tableau de valeurs. Presser les touches `2nde` puis `fenêtre` (déf table). Modifier les valeurs `DébutTbl` et `Tbl` pour indiquer la valeur minimale de $n$ dans le tableau, et celle du pas. Ensuite, presser les touches `2nde` et `graphe` (table) pour afficher le tableau de valeurs.



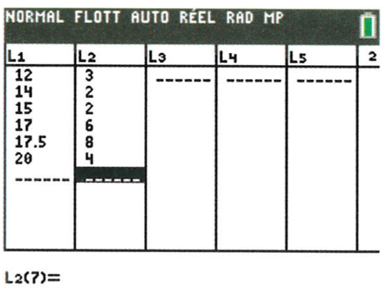

## Afficher le nuage de points associé à une série statistique à deux variables

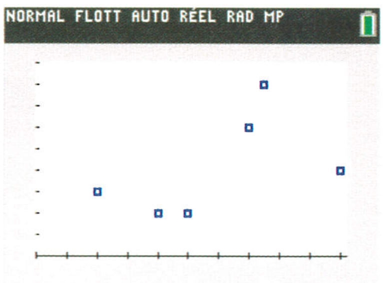
Appuyer sur `stats`, et sélectionner `1:Modifier...`. Entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne L1 et les valeurs de $y_i$ dans la colonne L2. Pour afficher le nuage de points correspondant, presser `2nde` et `f(x)` (graph stats).

Vérifier alors que les paramètres de Graph1 ci-contre sont enregistrés :

```
Aff
Type :      Nuage de points
XList:      L1
YList:      L2
```

Appuyer alors sur `graphe`. Il peut être nécessaire de changer les paramètres de la fenêtre dans `fenêtre` pour obtenir un affichage optimal.



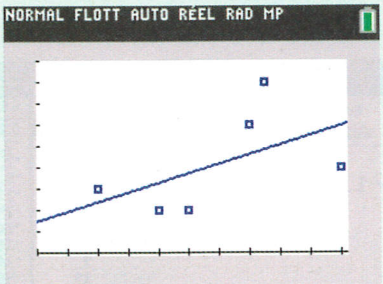



# TI-83 PREMIUM CE

## Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

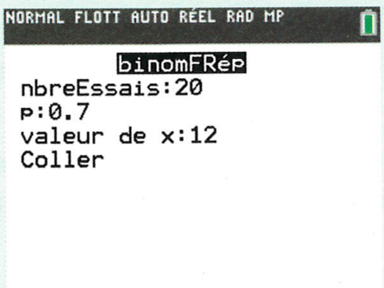
Appuyer sur `stats`, et sélectionner `1:Modifier...` . Entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne L1 et les valeurs de $y_i$ dans la colonne L2. Pour obtenir l'équation de la droite d'ajustement affine avec la méthode des moindres carrés, presser `stats` et aller dans l'onglet `CALC` puis sélectionner `4:RégLin(ax+b)`. Choisir L1 dans `Xliste`, L2 dans `Yliste`, et Y1 dans `Enr régéQ` (à l'aide de la touche `var` puis l'onglet `VAR Y` et le menu `1:Fonctions...`). Laisser `ListFréq` vide, et valider.

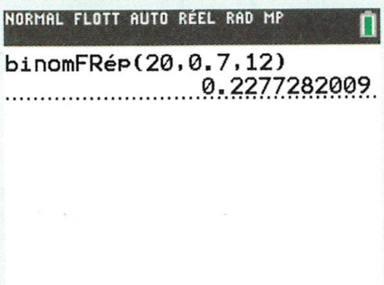
Le coefficient directeur est donné par *a* et l'ordonnée à l'origine par *b*. Pour tracer cette droite avec le nuage de points, appuyer sur `graphe`.




## Calcul de probabilités suivant une loi binomiale

Appuyer sur `2nde` et `var` (distrib). Sélectionner `binomFdp` pour calculer une probabilité du type $P(X=k)$ ou `binomFRép` pour calculer une probabilité du type $P(X \leqslant k)$. Rentrer les valeurs de *n* dans `nbreEssais:` et de *p* dans `p:` (où *n* et *p* sont les paramètres de la loi binomiale étudiée) et de *k* dans `valeur de x:`, puis valider pour obtenir le résultat.

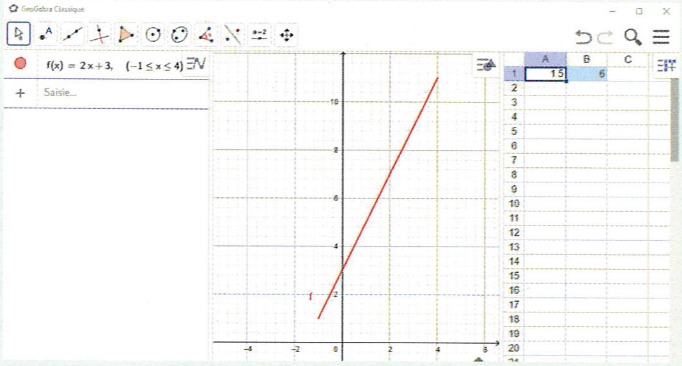


# GEOGEBRA

## Étude d'une fonction

- **Pour afficher la représentation graphique** d'une fonction *f*, il suffit de taper f(x)= suivi de l'expression de la fonction, dans la barre de saisie. Pour limiter l'ensemble de définition de *f* à un intervalle [*a* ; *b*], il faut taper dans la barre de saisie : f(x)=Fonction[expression,a,b] où « expression » est l'expression de la fonction.
- **Pour obtenir un tableau de valeurs**, il faut ouvrir l'onglet du tableur (à l'aide du menu `Affichage`). Rentrer les valeurs de *x* désirées dans la colonne A à partir de la cellule A1, puis taper =f(A1) dans la cellule B1. Étirer cette cellule au reste de la colonne B.




## Étude d'une suite

- **Cas d'une suite définie explicitement :** dans l'onglet du tableur créer un tableau de valeurs de la suite à étudier de façon similaire à celui d'une fonction, comme expliqué ci-dessus. Pour afficher les points correspondants dans un repère, se placer dans la cellule C1 et y taper =(A1,B1). Sélectionner et étirer cette cellule au reste de la colonne C. Sélectionner la totalité de la colonne C, faire un clic droit dessus, et sélectionner `Propriétés…` Dans le menu qui s'ouvre, aller dans l'onglet `Basique` et cocher la case `Afficher l'objet`.
- **Cas d'une suite définie par récurrence :** ouvrir l'onglet du tableur (à l'aide du menu `Affichage`), et entrer la valeur du premier terme de la suite dans la cellule A1. Se placer dans la cellule A2 et y taper l'expression de u(n+1) précédée du signe = et en remplaçant u(n) par A1. Sélectionner et étirer cette cellule au reste de la colonne A. Pour afficher les points correspondants dans un repère, la procédure est identique au cas précédent.

## Calcul formel

L'onglet `Calcul formel` (disponible dans le menu `Affichage`) permet de réaliser des tâches (comme résoudre des équations par exemple) à l'aide des lignes de commande suivantes :

- `NRésoudre(f(x)=k)` permet de **résoudre** une équation du type $f(x) = k$.
- `Factoriser(f(x))` permet de **factoriser** une expression $f(x)$.
- `Dérivée(f(x))` permet de déterminer la **dérivée** d'une fonction *f*.
- `Intégrale(f(x))` permet de déterminer une **primitive** d'une fonction *f*.

## Statistiques à deux variables

Ouvrir l'onglet du tableur, et entrer les valeurs de $x_i$ dans la colonne A, celles de $y_i$ dans la colonne B. Sélectionner les données avec la souris et dans le menu sélectionner (Statistiques à deux variables). Valider pour faire apparaître le nuage de points correspondant. Sous le nuage de points, dans le menu `Modèle d'ajustement`, sélectionner `Linéaire` pour faire apparaître la droite d'ajustement affine obtenue par la méthode des moindres carrés. Son équation est donnée sous le nuage de points.

# PYTHON

**Python** est un langage de programmation qui permet d'écrire des algorithmes et de les faire fonctionner, par exemple avec les logiciels Edupython ou Spyder, ou sur les calculatrices Casio Graph 35+EII, NumWorks, et Texas Instrument TI-83 Premium CE Edition Python.

## Manipuler une variable

En Python, les variables peuvent être de plusieurs types. Les plus courants sont les suivants :

- Les nombres **réels**, appelés *flottants* ou *float*.
- Les nombres **entiers**, appelés *integer* ou *int*.
- Les **listes de variables**, appelées *list*, sont délimitées par des crochets et leurs éléments sont ordonnés et séparés par des virgules.
- Les **chaînes de caractères**, appelées *string* ou *str*, qui sont simplement des mots ou des phrases, et sont délimitées par des guillemets ou des apostrophes.

Pour **affecter une valeur à une variable**, ou modifier cette valeur, il suffit de taper le nom de la variable, suivi du symbole = puis de la valeur que l'on veut attribuer à cette variable.

Pour **afficher la valeur d'une variable**, on utilise la commande `print`.

Pour que l'algorithme demande à l'utilisateur **d'entrer manuellement la valeur d'une variable**, on utilise la commande `input()`.

Par défaut, la variable est alors une chaîne de caractères. Pour que l**a variable devienne un nombre flottant**, on utilise la commande `float(input())`.

## Manipuler des listes

Pour manipuler des listes, il existe quelques commandes spécifiques :

- La commande `[]` génère une liste vide (c'est-à-dire ne contenant aucun élément).
- La commande `l[k]` renvoie l'élément de rang *k* de la liste L. Attention ! En Python, le rang est compté à partir de 0 : ainsi le premier élément d'une liste est l'élément de rang 0, le second est l'élément de rang 1, etc.
- La commande `len(l)` permet d'obtenir le nombre d'éléments d'une liste.
- La commande `sorted(l)` permet d'ordonner les éléments d'une liste dans l'ordre croissant.
- La commande `l+m` permet de fusionner deux listes l et m (dans cet ordre).
- La commande `del(l[k])` permet de supprimer l'élément de rang *k* de la liste l. De même, la commande `del(l[-1])` permet de supprimer le dernier élément d'une liste l.

## Instructions conditionnelles

Pour **réaliser une instruction conditionnelle**, aussi appelée **boucle « si … alors »**, on utilise la commande `if` suivi de la (ou les) condition(s) et de deux points `:` puis sur les lignes suivantes, on indiquera avec une indentation les instructions à réaliser dans la boucle.

Si **plusieurs conditions** sont nécessaires, elles doivent être séparées par le mot `and`. La boucle s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation. Il est alors possible d'utiliser un « sinon » avec la commande `else` également suivie de deux points et dont les instructions sont également indiquées avec une indentation. Le « sinon » s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation.

## Boucle « tant que »

La réalisation d'une boucle « while », aussi appelée **boucle « tant que »** est similaire : on utilise cette fois la commande `while` suivi de la (ou les) condition(s) et de deux points `:`. Les instructions à réaliser dans la boucle sont indiquées sur les lignes suivantes avec une indentation.

Les différents types de conditions les plus utilisés sont :

- `x==y` est vrai quand *x* est égal à *y*.
- `x!=y` est vrai quand *x* est différent de *y*.
- `x>y` est vrai quand *x* est strictement supérieur à *y*.
- `x>=y` est vrai quand *x* est supérieur ou égal à *y*.

## Boucle « pour »

Pour réaliser une **boucle « for »**, aussi appelée **boucle « pour »**, on utilise la commande `for` suivi de la condition et de deux points `:` puis, sur les lignes suivantes, on indiquera avec une indentation les instructions à réaliser dans la boucle. Il y a deux possibilités pour le nombre de répétitions : on peut simplement utiliser `for i in range(n):` pour répéter 1 fois les instructions (*i* prenant successivement chaque valeur entière de 0 à $n - 1$), ou alors `for i in range(a,b)` pour répéter les instructions pour chaque valeur entière de *i* entre *a* et $b - 1$. La boucle s'arrêtera dès qu'une ligne est écrite sans indentation.

## Fonctions de programmation

Pour définir une fonction, on utilise la commande `def`, suivie du nom de la fonction et des arguments (s'il y en a) entre parenthèses, puis enfin suivi de deux points `:` les lignes suivantes, avec indentation, indiquent les instructions de la fonction. En particulier, pour retourner un élément, il faut utiliser l'instruction `return` suivi de l'élément à retourner. La définition de la fonction s'arrête dès qu'une ligne est écrite sans indentation. Pour utiliser une fonction définie, il suffit de taper le nom de la fonction suivi des valeurs des arguments entre parenthèses (s'il y en a).

## Les modules

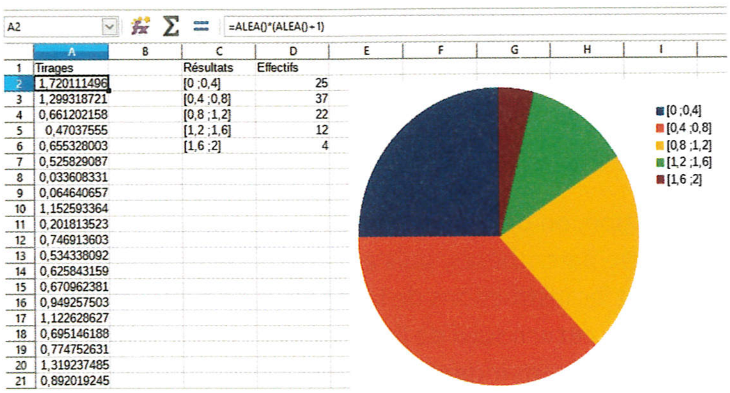
Python permet d'importer des modules contenant des commandes pré-existantes (valeurs de référence, fonctions, etc). Pour importer un module, par exemple le module `math` il faut utiliser la commande `from math import*`. Les deux modules les plus utilisés en classe sont :

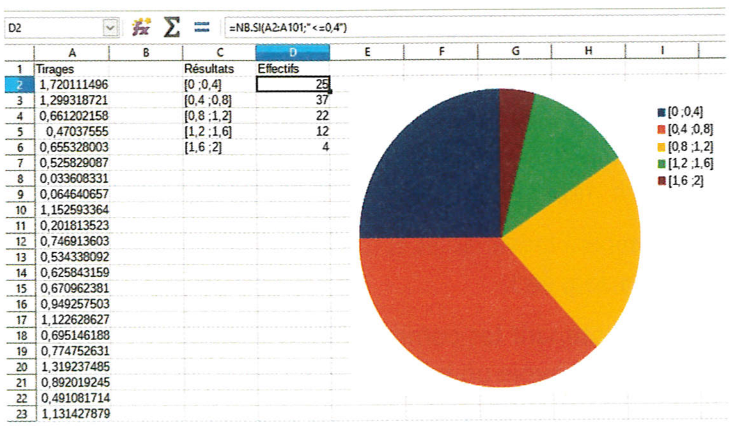
- le module `math`, contenant les variables et fonctions mathématiques usuelles (comme par exemple pi, ou les fonctions sin, log, etc).
- le module `random`, contenant les commandes permettant de générer des nombres aléatoires (par exemple, `random()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1).

## Manipulation de données

Le tableur permet de manipuler efficacement des données. Outre les opérations classiques, il existe des commandes préexistantes dont voici les plus courantes :

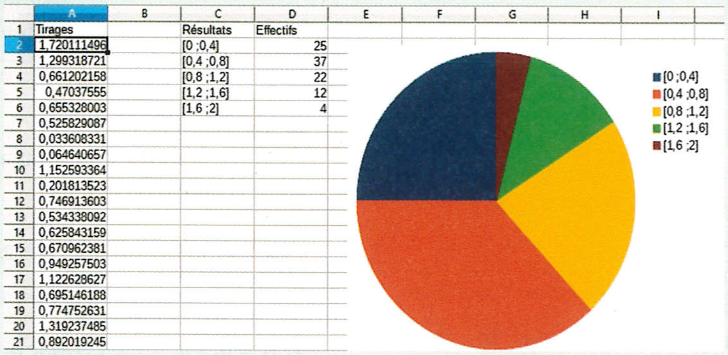
- `=SOMME(A2:A12)` permet de calculer la somme de toutes les valeurs comprises dans la plage s'étendant de la cellule A2 à la cellule A12.
- `=NB.SI(A3:A39;11)` renvoie le nombre de fois que le nombre 11 apparaît dans la plage s'étendant de la cellule A3 à la cellule A39.
- `=RACINE(B3)` renvoie la racine carrée de la valeur située dans la cellule B3.
- `=PUISSANCE(a;b)` renvoie la valeur de $a^b$.
- `=MOYENNE(C4:C14)` permet de calculer la moyenne des valeurs comprise dans la plage s'étendant de la cellule C4 à la cellule C14.
- `=MEDIANE(B4:B28)` permet de calculer la médiane des valeurs comprise dans la plage s'étendant de la cellule B4 à la cellule B28.
- `=MIN(A2:C19)` et `=MAX(A2:C19)` renvoient la valeur minimale et la valeur maximale présente dans la plage s'étendant de la cellule A2 à la cellule C19.
- `=ALEA()` renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
- `=ALEA.ENTRE.BORNES(3;37)` renvoie un nombre entier aléatoire compris entre 3 et 37 (inclus).
- `=SI(C2=3;1;0)` renvoie 1 si la valeur dans la cellule C2 est 3, et 0 sinon.



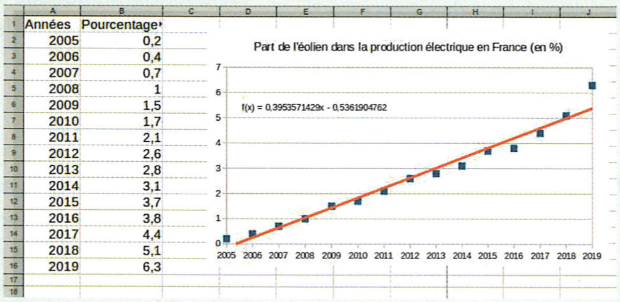
## Représentation de données

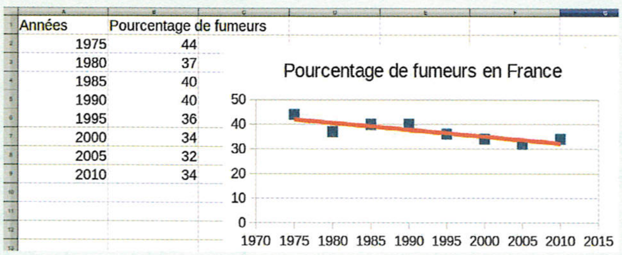
Pour représenter des données sous forme de graphique, il suffit de les sélectionner, puis, dans le menu `Insertion`, sélectionner `Graphique`. Dans la boîte de dialogue qui s'ouvre, il convient de choisir le type de graphique souhaité (diagramme circulaire, nuage de points, etc.) en veillant éventuellement à indiquer quelle plage de donnée doit être utilisée en abscisse et en ordonnée. Enfin, valider pour afficher le graphique.




## Obtenir un ajustement affine d'une série statistique à deux variables

Après avoir créé un nuage de points (comme indiqué ci-dessus), pour afficher une droite d'ajustement affine il faut sélectionner le graphique, et dans le menu `Insertion` sélectionner `Courbe de tendance` et choisir le type `Linéaire`. La droite d'ajustement affine s'affiche alors automatiquement sur la graphique existant.



# Corrigés

## 1 Suites numériques

### *Vérifier les acquis de Première*

**QCM**

**1.** d
**2.** a
**3.** c
**4.** c
**5.** c
**6.** d

## Exercices

### Pour commencer

**29** **1.** $u_{n+1} = u_n + r = u_n + 10$.
**2.** $u_2 = u_1 + 10 = -80 + 10 = -70$.
$u_3 = u_2 + 10 = -70 + 10 = -60$.
$u_4 = u_3 + 10 = -60 + 10 = -50$.
**3.** $u_n = u_1 + (n-1)\,r = -80 + 10(n-1) = -80 + 10n - 10 = 10n - 90$.
**4.** $u_7 = 10 \times 7 - 90 = -20$.
$u_{10} = 10 \times 10 - 90 = 10$.
$u_{14} = 10 \times 14 - 90 = 50$.
**5.** On résout $u_n = 80$, soit $10n - 90 = 80$. On obtient $10n = 170$, ce qui donne $n = 17$.

**33** **1.** $u_0 = 7 - 3 \times 0 = 7$.
$u_1 = 7 - 3 \times 1 = 4$.
$u_2 = 7 - 3 \times 2 = 1$.
**2.** $u_1 - u_0 = 4 - 7 = -3$.
$u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.
$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$ donc la suite $(u_n)$ est arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 7$.
**3.** La suite ayant comme premier terme $u_0$, le 51ᵉ terme est donc $u_{50}$.
$u_{50} = 7 - 3 \times 50 = -143$.
**4.** on cherche : $\sum_{k=0}^{50} u_k = \frac{51}{2}(u_0 + u_{50}) = 25 \times (7 - 143) = -3\,400$.

**35** **1.** $(u_n)$ est de raison $r = 150$ et de premier terme $u_0 = 6\,500$.
Donc $u_n = u_0 + nr = 6\,500 + 150n$.
**2.** $2025 = 2018 + 7$. On recherche donc $u_7$.
$u_7 = 6\,500 + 150 \times 7 = 7\,550$.
En 2025, le loyer à l'année coûtera 7 550 €.
**3.** On cherche : $S = \sum_{k=0}^{10} u_k = \frac{11}{2}(u_0 + u_{10})$
avec $u_{10} = 6\,500 + 150 \times 10 = 8\,000$.
Donc $S = \frac{11}{2}(6\,500 + 8\,000) = 79\,750$.
**4.** À la calculatrice, on obtient $n = 24$.
Vérification : $S' = \sum_{k=0}^{23} u_k = \frac{24}{2}(u_0 + u_{23})$
avec $u_{23} = 6\,500 + 150 \times 23 = 9\,950$.
Donc $S' = 12 \times (6\,500 + 9\,950) = 197\,400$.
Et $S'' = \sum_{k=0}^{24} u_k = \frac{25}{2}(u_0 + u_{24})$
avec $u_{24} = 6\,500 + 150 \times 24 = 10\,100$.
Donc $S'' = 12{,}5 \times (6\,500 + 10\,100) = 207\,500$.

**38** **1.** $u_1 = q \times u_0 = 1{,}054 \times 300 = 316{,}2$.
$u_2 = q \times u_1 = 1{,}054 \times 316{,}2 = 333{,}2748$.
**2.** $u_n = u_0 \times q^n = 300 \times 1{,}054^n$.
**3. a.** Une augmentation de 50 % revient à une multiplication par $1 + \frac{50}{100}$, soit : 1,5 et $1{,}5 \times 300 = 450$.

Tantque $u < 450$
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow 1{,}054 \times u$

**b.** $u = 456{,}93$ et $n = 2025$.
En 2025, la masse totale aura augmenté de 50 %. Elle sera de 456,93 millions de tonnes.

**45** **1.** $u_1 = q \times u_0 = 3 \times 7 = 21$.
$u_2 = q \times u_1 = 3 \times 21 = 63$.
$u_3 = q \times u_2 = 3 \times 63 = 189$.
**2.** $u_n = u_0 \times q^n = 7 \times 3^n$. Donc $u_9 = 7 \times 3^9 = 137\,781$.
**3.** $S = \sum_{k=0}^{9} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 7 \times \frac{1-3^{10}}{1-3} = 206\,668$.
**4.** $S = \sum_{k=1}^{7} u_k = \sum_{k=0}^{7} u_k - u_0 = u_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} - u_0$
$= 7 \times \frac{1-3^8}{1-3} - 7 = 22\,953$.

### Pour s'entraîner

**48** **1.** On lit $u = 5$ et $u = u + 4$ dans la boucle « for ». Donc $(u_n)$ est la suite arithmétique de raison $r = 4$ et de premier terme $u_0 = 5$.
**2.** On obtient la valeur des 10 termes après $u_0$ de la suite $(u_n)$.
**3.** $u_n = u_0 + n\,r = 5 + 4n$.
**4.** $u_{15} = 5 + 4 \times 15 = 65$.
**5.** for $n$ in range(15).

**52** **1.** La consommation est de 140 cigarettes par jour. En diminuant la consommation de 4 cigarettes par semaine, la consommation de la semaine suivante est $140 - 4 = 136$ cigarettes puis $136 - 4 = 132$ cigarettes la semaine d'après.
140, 136 et 132 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $-4$.
**2.** $u_0 = 140$ et $r = -4$.
**3.** $u_5 = u_0 + 5r = 140 - 4 \times 5 = 120$.
Au bout de 5 semaines d'efforts, Rémy fume 120 cigarettes.
**4.** $u_n = 0$ si et seulement si $140 - 4n = 0$.
On a alors : $140 = 4n$ ce qui donne $n = 35$.
Au bout de 35 semaines, Rémy aura arrêté de fumer.
**5.** On recherche la somme $u_0 + u_1 + \ldots + u_{35}$.
$\sum_{k=0}^{35} u_k = \frac{36}{2}(u_0 + u_{35}) = \frac{36}{2}(140 + 0) = 2\,520$.
Entre le moment où Rémy a décidé d'arrêter de fumer et le moment où il a réussi, il aura consommé 2 520 cigarettes.

**55** **1.** La masse d'EMPCS recyclés est passée de 229 à 282 entre 2011 et 2016 soit une évolution de :
$\frac{282-229}{229}\times 100=\frac{5\,300}{229}\approx 23\,\%$.
**2.** Le coefficient multiplicateur global associé à la hausse de 23 % entre 2011 et 2016 est $C=1{,}23$.
Soit $c$ le coefficient multiplicateur moyen durant ces 5 années alors on a $c^5=C$.
Donc $c=C^{\frac{1}{5}}\approx 1{,}0\,423$.
Le taux d'évolution annuel moyen sur cette période est donc une hausse d'environ 4,23 %.
**3.** $243-229=14$ et $250-243=7$.
Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique.
$\frac{243}{229}\neq\frac{250}{243}$. Ces trois nombres ne sont pas les premiers termes consécutifs d'une suite géométrique.
**4.** La masse d'EMPCS augmente de 4,2 % par an, elle est donc multipliée par le coefficient multiplicateur associé à cette hausse soit 1,042.
On en déduit que $(u_n)$ est géométrique de raison $q=1{,}042$ et de 1^er terme $u_0=282$.
**5.** $u_n=u_0\times q^n=282\times 1{,}042^n$.
**5.** $2019=2016+3$ donc l'année 2019 est de rang $n=3$.
On a : $u_3=282\times 1{,}042^3\approx 319$ et on peut donc en déduire une masse d'EMPCS recyclés d'environ 319 000 de tonnes en 2019.

**57** **1.** Pour augmenter un nombre de 6 %, on le multiplie par $1+\frac{6}{100}=1{,}06$ donc $d_1=1{,}06\times d_0=10{,}6$.
**2.** Pour la même raison qu'à la question précédente, on montre que pour tout entier naturel $n$,
$d_{n+1}=\left(1+\frac{6}{100}\right)d_n=1{,}06\,d_n$ donc la suite $(d_n)$ est géométrique de raison $q=1{,}06$ et de premier terme $d_0=10$.
**3.** Pour tout entier naturel $n$, $d_n=d_0\times q^n=10\times 1{,}06^n$.
**4.** La distance qu'Alice pourra parcourir en septembre 2019 est $d_8=10\times 1{,}06^8=15{,}9$ km arrondi à 0,1 km.
**5.** On cherche $n$ tel que $d_n>25$, soit $10\times 1{,}06^n>25$.
On obtient alors $1{,}06^n>2{,}5$. En utilisant la fonction logarithme népérien, $n\times\ln 1{,}06>\ln 2{,}5$.
On a alors : $n>\frac{\ln 2{,}5}{\ln 1{,}06}$, soit $n>16$
Alice sera capable de courir en une fois 25 km au bout de 16 mois.

**59** **1.** $u_1=u_0\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=20\,000\times 0{,}85=17\,000$.
Le nombre de mégots dans la rue principale en 2020 sera 17 000.
**2. a.** $u_{n+1}=u_n\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=0{,}85\times u_n$. $(u_n)$ est la suite géométrique de raison $q=0{,}85$ et de premier terme $u_0=20\,000$.
**b.** $u_n=20\,000\times 0{,}85^n$ pour tout entier naturel $n$.
**c.** On cherche $n$ tel que $2028=2019+n$ soit $n=9$.
$u_9=20\,000\times 0{,}85^9$. 4 633 mégots seront jetés en 2028.
**3. a.** Le maire doit calculer : $S=\sum_{k=0}^{9}u_k$.
**b.** $S=u_0\times\frac{1-q^{10}}{1-q}=20\,000\times\frac{1-0{,}85^{10}}{1-0{,}85}\approx 107\,084$.
En 10 ans, 107 084 mégots auront été ramassés.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**61** FAUX
$u_4=81$ ; $u_3=u_4-3=81-3=78$ ; $u_2=u_3-3=78-3=75$ ; $u_1=u_2-3=75-3=72$.
Donc $u_0=u_1-3=72-3=69$.

**62** VRAI
$u_n=u_0+nr=69+3n$.

**63** FAUX
$u_{10}=69+3\times 10=99$.

**64** FAUX
$\sum_{k=0}^{20}u_k=\frac{21}{2}(u_0+u_{20})$.
$u_{20}=69+3\times 20=129$.
Donc $\sum_{k=0}^{20}u_k=\frac{21}{2}(69+129)=2079$.

**65** VRAI
$v_1=6$ ; $v_2=6\times 1{,}2=7{,}2$ ; $v_3=7{,}2\times 1{,}2=8{,}64$ ;
$v_4=8{,}64\times 1{,}2=10{,}368$ ; $v_5=10{,}368\times 1{,}2=12{,}4416$.
Donc $v_6=12{,}4416\times 1{,}2=14{,}92992$.
Au dixième, $v_6=14{,}9$.

**66** FAUX
$v_n=v_1\times q^{n-1}=6\times 1{,}2^{n-1}$.

**67** FAUX
$v_8=6\times 1{,}2^7=21{,}4990848$. Au dixième, $v_8=21{,}5$.

**68** VRAI
$\sum_{k=1}^{10}v_k=v_1\times\frac{1-q^{10}}{1-q}=6\times\frac{1-1{,}2^{10}}{1-1{,}2}$.
Au centième, $\sum_{k=1}^{10}v_k=155{,}75$.

### QCM

**69** Réponse **a.**
On cherche $u_1$ car $2018=2017+1$.
$u_1=u_0\times\left(1-\frac{3}{100}\right)=u_0\times 0{,}97=300\times 0{,}97=291$.

**70** Réponse **c.**
$u_{n+1}=u_n\times\left(1-\frac{3}{100}\right)=u_n\times 0{,}97$.
$(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q=0{,}97$.

**71** Réponse **b.**
$u_n=u_0\times q^n=300\times 0{,}97^n$.

**72** Réponse **b.**
$2\,017+10=2\,027$.

**73** Réponse **b.**
$u_{10} = 300 \times 0{,}97^{10}$. À l'unité près, $u_{10} = 221$.

**74** Réponse **c.**
En étirant vers le bas, on saisira =B2*0,97.

## 2 Fonction inverse

### *Vérifier les acquis de Seconde et de Première*

QCM

**1.** c
L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

**2.** b
$147 > 14{,}8 > 1{,}49$. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\frac{1}{147} < \frac{1}{14{,}8} < \frac{1}{1{,}49}$.

**3.** b
La fonction $f$ est une fonction affine.
$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0{,}5$. La fonction $f$ s'annule donc en 0,5.
$a = 2$ et 2 est strictement positif donc $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$.
Le tableau de signe de la fonction $f$ est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | 0,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**4.** c
La fonction $f$ est une fonction affine.
$-0{,}1x + 4 = 0 \Leftrightarrow -0{,}1x = -4 \Leftrightarrow x = 40$. La fonction $f$ s'annule donc en 40.
$a = -0{,}1$ et $-0{,}1$ est strictement négatif
donc $f(x) < 0 \Leftrightarrow x > 40$.
Le tableau de signe de la fonction $f$ est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | 40 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

**5.** b
La fonction $f$ est une fonction polynôme de degré 2.
$f(x) = 0{,}5(x - (-2))(x - (-6))$ donc ses racines sont $-2$ et $-6$.
La fonction $f$ s'annule donc en $-2$ et en $-6$.
$a = 0{,}5$ et 0,5 est strictement positif donc la fonction $f$ est strictement positive sauf sur l'intervalle $]-6\,;-2[$.
Le tableau de signes de la fonction $f$ est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

**6.** a
La fonction $f$ est une fonction polynôme de degré 2.
$f(x) = -2(x - 3)(x - (-1))$ donc ses racines sont 3 et $-1$. La fonction $f$ s'annule donc en 3 et en $-1$.
$a = -2$ et $-2$ est strictement négatif donc la fonction $f$ est strictement négative sauf sur l'intervalle $]-1\,;3[$.

Le tableau de signes de la fonction $f$ est donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

## Exercices

### Pour commencer

**18** **1.** $f(x) = 4 + (-39) \times \frac{1}{x}$.

**2.** D'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} -39 \times \frac{1}{x} = -39 \times 0 = 0$

et donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} 4 + (-39) \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4 + 0 = 4$.

D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -39 \times \frac{1}{x} = +\infty$.

et donc que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 4 + (-39) \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

**20** **1.** Graphiquement, on lit :
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**2.** $f(x) = -\frac{8}{x} = -8 \times \frac{1}{x}$.

* D'après le cours, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -8 \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -8 \times 0 = 0$.

* D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -8 \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$.

* D'après le cours, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -8 \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

* D'après le cours, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -8 \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -8 \times 0 = 0$.

**30** **a.** $f(x) = x - 100 + \frac{6\,400}{x} = x - 100 + 6\,400 \times \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 1 + 6\,400 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{6\,400}{x^2} = \frac{x^2 - 6\,400}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 80^2}{x^2} = \frac{(x - 80)(x + 80)}{x^2} = (x - 80)\frac{x + 80}{x^2}$.

**b.** $f(x) = 2x - 3 + \frac{50}{x} = 2x - 3 + 50 \times \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = 2 + 50 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2x^2 - 50}{x^2} = \frac{2(x^2 - 25)}{x^2}$

$= \frac{2(x^2 - 5^2)}{x^2} = \frac{2(x - 5)(x + 5)}{x^2} = 2(x - 5)\frac{x + 5}{x^2}$.

**35** **1.** $f(x)=\frac{4}{x}+2x^2=4\times\frac{1}{x}+2x^2$.

Donc $f'(x)=4\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)+2\times 2x=-\frac{4}{x^2}+4x=\frac{-4+4x^3}{x^2}$.

Or, $\frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}=\frac{(4x-4)(x^2+x+1)}{x^2}$

$=\frac{4x^3+4x^2+4x-4x^2-4x-4}{x^2}=\frac{-4+4x^3}{x^2}$.

Donc on a bien $f'(x)=\frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

**2.** Sur $]0\,;+\infty[$, $4>0$, $x^2+x+1>0$ et $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x-1$.

Et, $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 1$.

**3.** On en déduit que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

**36** **1.** $f(x)=x^3+11x-7-\frac{9}{x}=x^3+11x-7-9\times\frac{1}{x}$.

Donc $f'(x)=3x^2+11\times 1-9\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2+11+\frac{9}{x^2}$

$=\frac{3x^4+11x^2+9}{x^2}$.

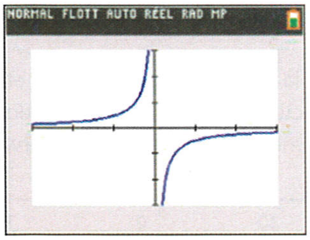
**2.** Sur $]-\infty\,;0[$, $3x^4>0$, $11x^2>0$ et $9>0$ donc $3x^4+11x^2+9>0$.

De plus, sur $]-\infty\,;0[$, $x^2>0$.

Par conséquent, $f'(x)>0$ sur $]-\infty\,;0[$ et la fonction $f$ est donc bien strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

## Pour s'entraîner

**38** **1. a.**




D'après la calculatrice, on conjecture :

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ; $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty$ ; $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**b.** La droite d'équation $y=0$ (autrement dit l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

La droite d'équation $x=0$ (autrement dit l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction $f$.

**2.** $f(x)=-\frac{12}{x}=-12\times\frac{1}{x}$.

* D'après le cours, $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

donc $\lim_{x\to-\infty}-12\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}f(x)=-12\times 0=0$.

* D'après le cours, $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}=-\infty$

donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-12\times\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)=+\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$

donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}-12\times\frac{1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=-\infty$.

* D'après le cours, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

donc $\lim_{x\to+\infty}-12\times\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=-12\times 0=0$.

**45** **1.** $f(x)=2-0{,}1x-\frac{0{,}025}{x}=2-0{,}1x-0{,}025\times\frac{1}{x}$

Donc $f'(x)=0-0{,}1\times 1-0{,}025\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-0{,}1+\frac{0{,}025}{x^2}$

$=\frac{-0{,}1x^2+0{,}025}{x^2}$

$=\frac{-0{,}1(x^2-0{,}25)}{x^2}$

$=\frac{-0{,}1(x^2-0{,}5^2)}{x^2}$

$=\frac{-0{,}1(x-0{,}5)(x+0{,}5)}{x^2}$.

**2.** Sur $[0{,}1\,;10]$, $x+0{,}5>0$ et $x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0{,}1(x-0{,}5)$.

Et $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow -0{,}1(x-0{,}5)\geqslant 0 \Leftrightarrow x-0{,}5\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 0{,}5$.

D'où :

| $x$ | 0,1 | | 0,5 | | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 1,74 | ↗ | 1,9 | ↘ | 1,875 |

**47** $f(x)=5-\frac{10}{x}=5-10\times\frac{1}{x}$

Donc $f'(x)=0-10\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{10}{x^2}$.

Or, sur $[1\,;10]$, $10>0$ et $x^2>0$ donc $f'(x)>0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;10]$.

De plus, $f(1)=5-\frac{10}{1}=5-10=-5$ et $f(10)=5-\frac{10}{10}=5-1=4$.

Le tableau de variation donné par l'énoncé est donc bien validé.

**49** **1.** $c(v)=0{,}06v+\frac{150}{v}=0{,}06v+150\times\frac{1}{v}$.

Donc $c'(v)=0{,}06\times 1+150\times\left(-\frac{1}{v^2}\right)=0{,}06-\frac{150}{v^2}$

$=\frac{0{,}06v^2-150}{v^2}=\frac{0{,}06(v^2-2\,500)}{v^2}=\frac{0{,}06(v^2-50^2)}{v^2}$

$=\frac{0{,}06(v-50)(v+50)}{v^2}$.

**2.** Sur $[10\,;130]$, $0{,}06>0$, $v+50>0$ et $v^2>0$ donc $c'(v)$ est du signe de $v-50$. Et, $c'(v)\geqslant 0 \Leftrightarrow v-50\geqslant 0 \Leftrightarrow v\geqslant 50$.

D'où :

| $v$ | 10 | | 50 | | 130 |
|---|---|---|---|---|---|
| $c'(v)$ | | − | 0 | + | |
| $c(v)$ | 15,6 | ↘ | 6 | ↗ | $\frac{582}{65}$ |

**3. a.** Pour que sa consommation en essence soit minimale, ce véhicule doit rouler à 50 km·h[1].

**b.** Sa consommation minimale est 6 litres.

# Corrigés

**51** **1.** L'extension est un rectangle donc son aire est égale à $xy$.
On sait également que cette aire est égale à 722.
On a donc : $xy = 722$ ; d'où $y = \frac{722}{x}$.

**2. a.** $l(x) = x + 2y = x + 2 \times \frac{722}{x} = x + \frac{1\,444}{x}$.

**b.** $l(x) = x + \frac{1\,444}{x} = x + 1\,444 \times \frac{1}{x}$.

Donc $l'(x) = 1 + 1\,444 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1\,444}{x^2} = \frac{x^2 - 1\,444}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 38^2}{x^2} = \frac{(x-38)(x+38)}{x^2}$.

**c.** Sur $[20 ; 60]$, $x + 38 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 38$.
Et, $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 38 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 38$.
D'où :

| $x$ | 20 | | 38 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $l'(v)$ | | – | 0 | + | |
| $l(x)$ | 92,2 | ↘ | 76 | ↗ | $\frac{1\,261}{15}$ |

**d.** La longueur de la clôture est donc minimale lorsque $x = 38$. On a alors $y = \frac{722}{38} = 19$. Les dimensions de l'extension rendant la longueur de la clôture minimale sont donc 38 mètres et 19 mètres.
La longueur minimale de la clôture est 76 mètres. Le prix, en euros, du grillage de la clôture est donc $76 \times 15 = 1\,140$ et celui du goudron du sol est $722 \times 25 = 18\,050$. Or, $1\,140 + 18\,050 = 19\,190$ donc le prix à payer par le responsable de la jardinerie pour cette extension est 19 190 €.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**53** VRAI
$f(x) = 24 \times \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 24 \times 0 = 0$.

**54** FAUX
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 8 = 8$.

**55** FAUX
$f(x) = -6 \times \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = -6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{6}{x^2}$.

**56** FAUX
$f(x) = 8x - 5 + 2 \times \frac{1}{x}$
donc $f'(x) = 8 \times 1 + 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 8 - \frac{2}{x^2} = \frac{8x^2 - 2}{x^2}$.

**57** VRAI
$f(x) = x^2 + 7x - 4 + 9 \times \frac{1}{x}$
donc $f'(x) = 2x + 7 \times 1 + 0 + 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + 7 - \frac{9}{x^2}$
$= \frac{2x^3 + 7x^2 - 9}{x^2}$.

Or, $\frac{(x+3)(2x^2 + x - 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 6x^2 + 3x - 9}{x^2}$
$= \frac{2x^3 + 7x^2 - 9}{x^2}$.

### QCM

**58** **1.** Réponse **b.**
$f(x) = -11 \times \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -11 \times 0 = 0$.

**2.** Réponse **a.**
$f(x) = -11 \times \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = -11 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{11}{x^2}$.

**3.** Réponse **a.**
Sur $]0 ; +\infty[$, $11 > 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ ; la fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

**59** **1.** Réponse **b.**
$f(x) = 0{,}01x + 1 + 9 \times \frac{1}{x}$
donc $f'(x) = 0{,}01 \times 1 + 0 + 9 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0{,}01 - \frac{9}{x^2} = \frac{0{,}01x^2 - 9}{x^2}$.
Les réponses **a.** et **c.** sont donc impossibles.
Vérification : $\frac{0{,}01(x-30)(x+30)}{x^2} = \frac{0{,}01(x^2 - 900)}{x^2}$
$= \frac{0{,}01x^2 - 9}{x^2}$.

**2.** Réponse **c.**
Sur $\mathbb{R}^*$, le dénominateur $x^2$ est strictement positif donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 0{,}01(x - 30)(x + 30)$.
La fonction $g$ est une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont 30 et $-30$.
La fonction $g$ (et donc la fonction $f'$) s'annule donc en $-30$ et en 30.
$a = 0{,}01$ et 0,01 est strictement positif donc la fonction $g$ (et donc la fonction $f'$) est strictement positive sauf sur l'intervalle $]-30 ; 30[$.
On a donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-30$ | | 0 | | 30 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $f$ | | ↗ | $f(-30)$ | ↘ | ‖ | ↘ | $f(30)$ | ↗ | |

**60** **1.** Réponse **a.**
$f(x) = 0{,}5x^2 - 7{,}5x + 32 \times \frac{1}{x}$
donc $f'(x) = 0{,}5 \times 2x - 7{,}5 \times 1 + 32 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
$= x - 7{,}5 - \frac{32}{x^2} = \frac{x^3 - 7{,}5x^2 - 32}{x^2}$.
Les réponses **b.** et **c.** sont donc impossibles.
Vérification :
$\frac{(x-8)(x^2 + 0{,}5x + 4)}{x^2} = \frac{x^3 + 0{,}5x^2 + 4x - 8x^2 - 4x - 32}{x^2}$
$= \frac{x^3 - 7{,}5x^2 - 32}{x^2}$.

**2.** Réponse **c.**
Sur $[1 ; 10]$, le dénominateur $x^2$ et le facteur $x^2 + 0{,}5x + 4$ sont strictement positifs donc $f'(x)$ est du signe de $g(x) = x - 8$.
La fonction $g$ est une fonction affine.

$x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8$. La fonction $g$ (et donc la fonction $f'$) s'annule donc en 8.
$a = 1$ et 1 est strictement positif donc $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 8$ (et donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 8$).
On a donc :

| **$x$** | 1 | | 8 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| **$f'(x)$** | | $-$ | 0 | $+$ | |
| **$f(x)$** | $f(1)$ | $\searrow$ | $f(8)$ | $\nearrow$ | $f(10)$ |

**3.** Réponse **b.**
D'après le tableau de variation précédent, la fonction $f$ admet un minimum en 8.

## 3 Fonctions exponentielles de base *a*

### *Vérifier les acquis de Première*

**QCM**

**1.** c
**2.** b
**3.** d
**4.** c
**5.** d

## Exercices

**Pour commencer**

**28** $u_n$ est une suite géométrique de raison $0{,}75 < 1$ et de premier terme 1 donc $u_n$ est une suite décroissante.

**35** $f(x) = ka^x$ et $f(0) = 1$ donc $k = 1$.
La base $a = 0{,}1$ donc $f(x) = (0{,}1)^x$.

**38** $f(-1{,}5) = 2 \times (0{,}75)^{-1{,}5} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ et $f(2{,}5) = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}$.
$g(-1{,}5) = -3(1{,}2)^{1{,}5} = \dfrac{-18\sqrt{3}}{25}$ et $g(2{,}5) = -3(1{,}2)^{-2{,}5} = -1{,}9018$.

**53** $f(1) \times f(-2{,}5) \times f(3) = 2{,}1 \times f2{,}1^{-2{,}5} \times 2{,}1^3$
$= 2{,}1^{1-2{,}5+3} = 2{,}1^{1{,}5}$.

**64** **a.** $a = \dfrac{1}{0{,}25} > 1$ et $k > 0$ donc $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
**b.** $a = \dfrac{1}{0{,}87} > 1$ donc $h$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**71** **1.** $f(-1) = 5$ et $f(0) = 1{,}5$.
$f(-1) = \dfrac{k}{a} = 5$ et $f(0) = k = 1{,}5$ donc $a = \dfrac{k}{5} = 0{,}3$.
Donc $k = 1{,}5$ et $a = 0{,}3$.

**2.** On a : $f(x) = 1{,}5(0{,}3)^x$.
Soit $f(1) = 0{,}45$ et $f(3{,}5) = 0{,}0\ 221$.

**84** $(1 + x) = 5{,}5^{1/5}$ donc $x = 5{,}5^{0{,}2} - 1$.

**Pour s'entraîner**

**90** **1.** $f$ est croissante ($a = 1{,}05 > 1$) et $g$ est décroissante ($a = \dfrac{1}{1{,}05} < 1$) sur $[10 ; 30]$.
**2.** Le prix d'équilibre est solution de l'équation $f(x) = g(x)$
soit $1{,}05^x = 7(1{,}05)^{-x}$
d'où $((1{,}05)^2)^x = 7$
soit $(1{,}025)^x = 7$.
**3.** À la calculatrice, on obtient $x = 19{,}94$ € et la quantité d'équilibre est : $f(19{,}94) = g(19{,}94) = 2{,}645$.

**92** **1.** $f(2) = 25\ 000 \times (1{,}1)^2 = 30\ 250$ et $f(4{,}5) = 38\ 389$.
**2.** Sur $[0 ; 8]$, $f$ est croissante car $25\ 000 > 0$ et $1{,}1 > 1$.
**3.** Il faut résoudre $f(x) = 50\ 000$ soit $(1{,}1)^x = 2$ et $x = 7{,}27$ h soit 7 h 16 min.

**93** **1.** $f(0) = -0{,}01$
$f(1) = -0{,}003$
$f(-2) = -0{,}11$
**2.** $f(x) = (0{,}3)^x(0{,}3^2 + 3 \times 0{,}3 - 1) = (0{,}3)^x(-0{,}01)$.
**3.** On peut en déduire que $f$ est négative car $-0{,}01 < 0$ et que $f$ est croissante car $0{,}3 < 1$.

**101** **1.** $f(0) = 21\ 345(1{,}2)^0 = 21\ 345$ ; correspond à la cote de la voiture le 1er avril 2015.
$f(1) = 21\ 345(1{,}2)^{-1} = 17\ 787{,}5$ ; correspond à la cote de la voiture le 1er avril 2016.
**2.** Taux de diminution annuel de la valeur de la voiture $= \dfrac{17\ 787{,}7 - 21345}{21345} \times 100 = -16{,}66$ %.
**3. a.** $21\ 345 \times (1{,}2)^{-4{,}5} = 9\ 396{,}81$ euros.
Taux de diminution depuis achat $= \dfrac{9\ 396{,}81}{21345} \times 100 = 44$ %.
**b.** $T = 100((0{,}44)^{1/54} - 1) = -1{,}5$ %.

**Pour faire le point**

**Vrai ou Faux**

**107** VRAI

**108** VRAI

**109** VRAI

**110** VRAI

**111** VRAI

**112** VRAI

**113** FAUX

**114** FAUX

**115** FAUX

**116** VRAI

QCM

**117** Réponse **b.**

**118** Réponse **a.**

**119** Réponse **b.**

**120** Réponse **b.**

**121** Réponse **c.**

**122** Réponse **c.**

**123** Réponse **b.**

## 4 Fonction logarithme décimal

### *Vérifier les acquis de Seconde et de Première*

QCM

**1.** a
**2.** b
**3.** b
**4.** a
**5.** c
**6.** a
**7.** b

## Exercices

### Pour commencer

**28** **a.** $\log(0{,}000\ 1) = \log(10^{-4}) = -4$.
**b.** $\log(0{,}000\ 01) = \log(10^{-5}) = -5$.
**c.** $\log(0{,}000\ 000\ 01) = \log(10^{-8}) = -8$.
**d.** $\log(10^{-9}) = -9$.

**30** Comme $0,\ 001 < 0,\ 01 < 1{,}001 < 1{,}1$ et que la fonction logarithme décimale est croissante sur $]0\ ; +\infty[$, alors on a : $\log(0,\ 001) < \log(0,\ 01) < \log(1{,}001) < \log(1{,}1)$.

**39** **a.** $\log(0{,}5) = \log(5 \times 10^{-1}) = \log(5) + \log(10^{-1})$
$= \log(5) + (-1) \approx 0{,}7 - 1 \approx -0,\ 3$.
**b.** $\log(0,\ 05) = \log(5 \times 10^{-2}) = \log(5) + \log(10^{-2})$
$= \log(5) + (-2) \approx 0{,}7 - 2 \approx -1{,}3$.
**c.** $\log(25) = \log(5^2) = 2\log(5) \approx 2 \times 0{,}7 \approx 1{,}4$.
**d.** $\log(500) = \log(5 \times 100) = \log(5 \times 10^2) = \log(5) + \log(10^2)$
$= \log(5) + 2 \approx 0{,}7 + 2 \approx 2{,}7$.

**41** **a.** $\log(a^3) = 3 \times \log(a)$.
**b.** $\log(a^5) - \log(a^2) = 5\log(a) - 2\log(a)$
$= 3\log(a)$.
**c.** $\log(a^{-3}) + \log(a^2) = \log\left(\dfrac{1}{a^3}\right) + \log(a^2) = -\log(a^3) + \log(a^2)$
$= -\log(a)$.
**d.** $\log(10a^5) = \log(10) + \log(a^5)$
$= 1 + 5\log(a)$.

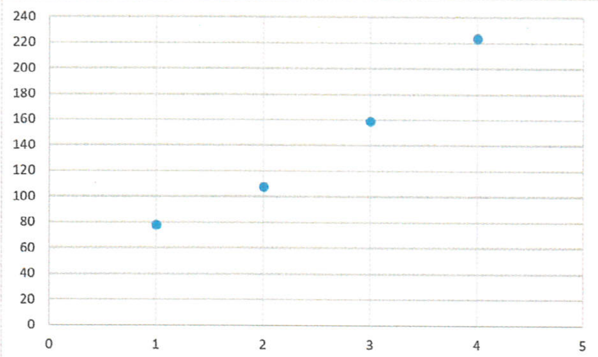
**48** **a.** $3^x = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $x$ réel, $3^x > 0$. $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
**b.** $2 \times 3^x = 20 \Leftrightarrow 3^x = 10$
$\Leftrightarrow \log(3^x) = \log(10)$
$\Leftrightarrow \log(3^x) = 1$
$\Leftrightarrow x\log(3) = 1$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\log(3)}$ soit $S_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{1}{\log(3)}\right\}$.

### Pour s'entraîner

**60** **a.** $0{,}001\ 47 = 147 \times 10^{-5} = 3 \times 7^2 \times 10^{-5}$.
On a donc $\log(0{,}001\ 47) = \log(3 \times 7^2 \times 10^{-5})$
$= \log(3) + \log(7^2) + \log(10^{-5})$
$= \log(3) + 2\log(7) - 5$.
**b.** $11\ 907 = 81 \times 147 = 3^5 \times 7^2$.
On a donc : $\log(11\ 907) = \log(3^5 \times 7^2) = \log(3^5) + \log(7^2)$.
D'où $\log(11\ 907) = 5\log(3) + 2\log(7)$.
**c.** $2\ 700 \times 490 = 3^3 \times 10^2 \times 7^2 \times 10 = 3^3 \times 7^2 \times 10^3$.
On a donc : $\log(2\ 700 \times 490) = \log(3^3 \times 7^2 \times 10^3)$
$= \log(3^3) + \log(7^2) + \log(10^3)$
$= 3\log(3) + 2\log(7) + 3$.

**61** **1.** $M = 0$ donc $k = 2{,}5\log(E_0)$.
**2.** $M = -2{,}5\log(E) + 2{,}5\log(E_0) = -2{,}5(\log(E) - \log(E_0))$
$= -2{,}5\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$.
**3. a.** Si l'étoile est perçue comme plus brillante que l'étoile Véga, son éclat est donc plus grand que celui de Véga. On a donc : $E > E_0$.
$\dfrac{E}{E_0} > 1$ donc $\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right) > 0$, d'où $M < 0$.
La magnitude apparente est donc négative.
**b.** La magnitude de Véga est nulle donc la magnitude de cette étoile est inférieure à celle de Véga.
**4.** Magnitude Vénus : $-4{,}6$ à 0,1 près.
Magnitude de Mars : $-2{,}3$ à 0, 1 près.
Magnitude de Neptune : 7,9 à 0,1 près.
**5.** Éclat du soleil : environ $10^{10{,}72} \times E_0 \approx 5{,}25 \times 10^{10} E_0$.
Éclat de la pleine lune : environ $10^{5{,}04} \times E_0 \approx 1{,}1 \times 10^5 E_0$
Éclat d'Uranus : environ $10^{-2{,}28} \times E_0 \approx 5{,}25 \times 10^{-3} E_0$

**67** **1.**




**2. a.**

| Rang de la semaine $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ arrondi à l'unité près | 77 | 110 | 158 | 226 | 323 |

**b.** D'après le tableau, on peut prévoir 323 couverts la cinquième semaine.

**3. a.** $54 \times (1{,}43)^x > 810 \Leftrightarrow (1{,}43)^x > \dfrac{810}{54}$

$$\Leftrightarrow x\log(1{,}43) > \log\left(\frac{810}{54}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\log\left(\frac{810}{54}\right)}{\log(1{,}43)}$$

soit $x > 7{,}57$ environ (à 0,01 près).

**b.** D'après la question précédente, le gérant commencera à refuser des clients à partir de la 8ᵉ semaine.

**4.**

```
from math import*
def f(x):
    return  54*1.43**x
x=1
while f(x)<=810:
    x=x+1
print('Le gérant commencera à refuser des clients au bout de',x,'semaines.')
```

**70** **1.** Si le pH augmente, alors la concentration en ions oxonium diminue.

**2.**

| Solution | pH | Solution acide, basique, neutre | $[H_3O^+]$ |
|---|---|---|---|
| Soude | 14 | Basique | $10^{-14}$ |
| Acide chlorhydrique | 0 (très proche de) | Acide | 1 |
| Eau de javel | 11,5 | Basique | $10^{-11{,}5}$ |
| Eau distillée | 7 | Neutre | $10^{-7}$ |
| Café | 5 | Acide | $10^{-5}$ |
| Acide gastrique | 2 | Acide | $10^{-2}$ |
| Salive humaine | 6,5 | Acide | $10^{-6{,}5}$ |

**3.** $\text{pH} = 2{,}7$ donc $[H_3O^+] = 10^{-2{,}7} \approx 2 \times 10^{-3}$ mol·L⁻¹.

**4.** pH = 5.

**5. a.** Ce programme permet de calculer le pH d'une solution dont la concentration en ions oxonium est donnée.

**b.** L'instruction « round » permet de donner l'arrondi d'un résultat, ici à l'unité près.

**72** **1.** $N + 1 = 2^{43112609}$ donc $\log(N+1) = 43\,112\,609 \times \log(2)$.

**2.** La calculatrice donne $43\,112\,609 \times \log(2) \approx 12\,978\,188{,}5$.
La partie entière de $\log(N+1)$ est donc égale à 12 978 188.

**3.** $p = \text{ENT}(\log(N+1)) + 1 = 12\,978\,189$. L'écriture décimale de $N+1$ comporte 12 978 189 chiffres.

**4.** $N$ a le même nombre de chiffres que $N+1$ donc l'écriture décimale de $N$ comporte aussi 12 978 189 chiffres.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**75** FAUX
Elle est définie sur $]0\,;+\infty[$.

**76** VRAI
La fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0\,;+\infty[$.

**77** FAUX
$10\log(2) = \log(2^{10}) = \log(1\,024)$ qui est supérieur à $\log(20)$, car la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0\,;+\infty[$.

**78** VRAI
$\log(1\,000)=\log(10^3)$.

**79** VRAI
$\log(2^{2020}) = \log(2^{2\times1010}) = \log((2^2)^{1010}) = 1\,010\log(4)$.

**80** VRAI
$0{,}5 < 1$ d'où $\log(0{,}5) < \log(1)$ soit $\log(0{,}5) < 0$.

**81** VRAI
$\sqrt{3} < 3$ et la fonction logarithme décimal est croissante sur son ensemble de définition $]0\,;+\infty[$.

**82** VRAI
$5^{3\times1-1} = 5^2 = 25$.

**83** VRAI
$3^x > 0$ sur $\mathbb{R}$.

**84** VRAI
$\log(0{,}0002) = \log(2 \times 10^{-4}) = \log(2) + \log(10^{-4})$
$= \log(2) - 4 > 0{,}3 - 4 > -3{,}7$.

**85** FAUX
$\log(200) = \log(20 \times 10) = \log(20) + \log(10) = \log(20) + 1$.

**86** FAUX
$\log(300) = \log(3 \times 100) = \log(3) + \log(100) = \log(3) + 2 \approx 2{,}5$.

### QCM

**87** Réponse **b.**

**88** Réponse **d.**

**89** Réponse **a.**

**90** Réponse **a.**

**91** Réponse **b.**

# Corrigés

## 5 Statistiques à deux variables quantitatives

### Vérifier les acquis de Première

**QCM**

**1.** c

$a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-3}{0+1} = -5$ donc l'équation réduite de (AB) s'écrit $y = -5x + b$. $B(0\,;-2) \in (AB)$ ssi $-2 = -5 \times 0 + b$ ssi $b = -2$.

Donc l'équation réduite de la droite (AB) est $y = -5x - 2$.

**2.** d

Dans l'équation $y = 1{,}5x - 2$, l'ordonnée à l'origine est $b = -2$ donc la droite cherchée coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $-2$ ; ce qui élimine les droites $D_2$ et $D_3$. Il reste donc les droites $D_1$ et $D_4$. De plus, le coefficient directeur est $a = 1{,}5$ qui est strictement positif ; ce qui élimine la droite $D_1$.

La droite ayant pour équation réduite $y = 1{,}5x - 2$ est donc la droite $D_4$.

**3.** b

Si $x = 3$ alors $y = -2{,}4 \times 3 + 5{,}1 = -2{,}1$.

**4.** b

$0{,}2x - 6{,}2 = 4{,}3 \Leftrightarrow 0{,}2x = 10{,}5 \Leftrightarrow x = 52{,}5$.

**5.** d

$\overline{x} = \dfrac{23+26+20+45+51+39}{6} = 34$.

## Exercices

### Pour commencer

**21** **1.**

| Heure | 10 h 19 | 10 h 20 | 10 h 21 | 10 h 22 | 10 h 23 |
|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de minutes $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Nombre de « Like » $y_i$ | 13 | 16 | 20 | 25 | 28 |

**2.** On peut rajouter le point de coordonnées (7 ; 38).

**30** $\overline{x} = \dfrac{0+6+12+18+24+30+36+42+48}{9} = 24$

et

$\overline{y} = \dfrac{26+31+33+36+38+41+46+49+56}{9} \approx 39{,}56$.

Donc G(24 ; 39,56).

**36** **1.** Vrai.

Un ajustement affine est envisageable car les points du nuage sont proches de l'alignement.

**2.** Faux.

En traçant la droite d'équation $y = 0{,}5x + 2$, on constate qu'elle ne permet pas de réaliser un bon ajustement affine du nuage de points.

**3.** Faux.

La droite représentée ne passe pas par le point G.

**45** **1.** 1 jour représente 24 heures.

Pour $t = 24$, on a $N = 9{,}26 \times 24 + 1{,}5 = 223{,}74$.

Au bout de 1 jour, il y aura donc 223 740 000 bactéries.

**2.** On résout l'inéquation $9{,}26t + 1{,}5 > 100$.

$9{,}26t + 1{,}5 > 100 \Leftrightarrow 9{,}26t > 98{,}5 \Leftrightarrow t > \dfrac{98{,}5}{9{,}26}$

Or $\dfrac{98{,}5}{9{,}26} \approx 10{,}6$.

C'est donc au bout de 11 heures que le nombre de bactéries dépassera 100 000 000.

**46** **1.** Réponse **c.**

$\overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ et

$\overline{y} = \dfrac{7{,}9+8{,}3+8{,}7+9{,}4+9{,}8}{5} = 8{,}82$.

Donc G(3 ; 8,82).

**2.** Réponse **b.** La calculatrice donne pour équation : $y = 0{,}49x + 7{,}35$.

**3.** Réponse **c.** L'année 2024 correspond à $x = 10$.

On a alors : $y = 0{,}49 \times 10 + 7{,}35 = 12{,}25$.

**4.** Réponse **b.** On résout l'inéquation $0{,}49x + 7{,}35 > 15$.

$0{,}49x + 7{,}35 > 15 \Leftrightarrow 0{,}49x > 7{,}65 \Leftrightarrow x > \dfrac{7{,}65}{0{,}49}$.

Or, $\dfrac{7{,}65}{0{,}49} \approx 15{,}6$. C'est donc au bout de 16 ans, c'est-à-dire en 2030, que le prix de cet article dépassera 15 €.

### Pour s'entraîner

**48** $\begin{cases} \dfrac{35{,}2+a+26{,}7+21+18{,}4+15{,}2+11{,}3+9{,}8}{8} = 21{,}3 \\ \dfrac{11{,}4+9{,}5+7{,}6+5{,}2+4+3{,}1+2{,}8+b}{8} = 5{,}6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{137{,}6+a}{8} = 21{,}3 \\ \dfrac{43{,}6+b}{8} = 5{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 137{,}6+a = 21{,}3\times 8 \\ 43{,}6+b = 5{,}6\times 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 137{,}6+a = 170{,}4 \\ 43{,}6+b = 44{,}8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 170{,}4-137{,}6 \\ b = 44{,}8-43{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 32{,}8 \\ b = 1{,}2 \end{cases}$.

**51** **1. a.** Le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est environ 51 %.

**b.** Le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 000 €.

**2.** • L'équation réduite de $\Delta$ est de la forme $y = 1{,}04x + b$.

$A(11\,;12) \in \Delta$ ssi $12 = 1{,}04 \times 11 + b$
ssi $11{,}44 + b = 12$
ssi $b = 12 - 11{,}44$
ssi $b = 0{,}56$

L'équation réduite de $\Delta$ est donc $y = 1{,}04x + 0{,}56$.

• Pour $x = 48$, on a $y = 1{,}04 \times 48 + 0{,}56 = 50{,}48$.

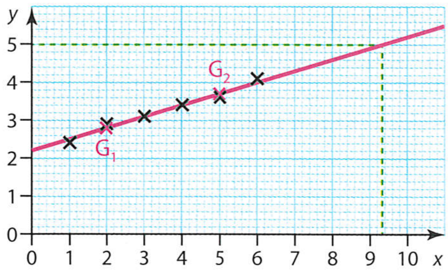
Donc le taux d'occupation espéré pour un budget publicitaire de 48 000 € est 50,48 %.

• On résout l'équation $1{,}04x + 0{,}56 = 80$.

$1{,}04x + 0{,}56 = 80 \Leftrightarrow 1{,}04x = 80 - 0{,}56 \Leftrightarrow 1{,}04x = 79{,}44 \Leftrightarrow x = \dfrac{79{,}44}{1{,}04}$

Or, $\dfrac{79{,}44}{1{,}04} \approx 76{,}385$. Donc le montant des frais publicitaires laissant espérer un taux d'occupation de 80 % est environ 76 385 €.

**53** **1.**



**2.** $\overline{x_1} = \dfrac{1+2+3}{3} = 2$ et $\overline{y_1} = \dfrac{2,4+2,9+3,1}{3} = 2,8$ donc $G_1(2\,;2,8)$.

$\overline{x_1} = \dfrac{4+5+6}{3} = 5$ et $\overline{y_2} = \dfrac{3,4+3,6+4,1}{3} = 3,7$ donc $G_2(5\,;3,7)$.

**3.** Voir **1.**

**4.** Graphiquement, on estime que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 € à partir de $x = 10$, c'est-à-dire à partir de 2023.

**5.** • Le coefficient directeur de la droite $(G_1G_2)$ est :

$a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{3,7-2,8}{5-2} = 0,3.$

Donc l'équation réduite de la droite $(G_1G_2)$ est de la forme $y = 0,3x + b$.

$G_1(2\,;2,8) \in (G_1G_2)$ ssi $2,8 = 0,3 \times 2 + b$

ssi $2,8 = 0,6 + b$

ssi $b = 2,8 - 0,6$

ssi $b = 2,2$

Donc l'équation réduite de la droite $(G_1G_2)$ est de la forme $y = 0,3x + 2,2$.

• On résout l'inéquation $0,3x + 2,2 > 5$.

$0,3x + 2,2 > 5 \Leftrightarrow 0,3x > 2,8 \Leftrightarrow x > \dfrac{2,8}{0,3}$.

Or, $\dfrac{2,8}{0,3} \approx 9,3$. C'est donc au bout de 10 ans, c'est-à-dire en 2023, que le budget publicitaire de cette entreprise dépassera 50 000 €.

**54** **1.**

| **Année** | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rang de l'année $x_i$** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **Prix $y_i$** | 1 050 | 850 | 740 | 650 | 580 | 510 | 480 |
| $z_i$ | 0,001 | 0,001 2 | 0,001 4 | 0,001 5 | 0,001 7 | 0,002 | 0,002 1 |

**2.** D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de $z$ en $x$ par la méthode des moindres carrés est : $z = 0,000\,19x + 0,001$.

**3.** $z = \dfrac{1}{y}$ et $z = 0,000\,19x + 0,001$ donc $\dfrac{1}{y} = 0,000\,19x + 0,001$.

D'où : $y = \dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001}$.

**4. a.** L'année 2022 correspond à $x = 9$.

On a alors : $y = \dfrac{1}{0,000\,19 \times 9 + 0,001}$. Soit $y \approx 369$.

En 2022, le prix de cet appareil est estimé à 369 €.

**b.** On résout l'inéquation :

$\dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001} < \left(1 - \dfrac{70}{100}\right) \times 1\,050.$

$\dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001} < \left(1 - \dfrac{70}{100}\right) \times 1\,050$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{0,000\,19x + 0,001} < 315$

$\Leftrightarrow 0,000\,19x + 0,001 > \dfrac{1}{315}$

$\Leftrightarrow 0,000\,19x > \dfrac{1}{315} - 0,001$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\frac{1}{315} - 0,001}{0,000\,19}$.

Or, $\dfrac{\frac{1}{315} - 0,001}{0,000\,19} \approx 11,4$.

C'est donc au bout de 12 ans, c'est-à-dire en 2025, que cet appareil aura perdu 70 % de sa valeur initiale.

**58** **1.**

| **Année** | 2011 | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Rang de l'année : $x_i$** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $P_i$ | 12,1 | 14,9 | 15,9 | 17,1 | 21,2 | 21,4 | 24,7 | 27,8 |
| $y_i$ | 1,08 | 1,17 | 1,20 | 1,23 | 1,33 | 1,33 | 1,39 | 1,44 |

**2.**

**3.** D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de $y$ en $x$ par la méthode des moindres carrés est $y = 0,05x + 1,05$.

Pour la représenter, on détermine les coordonnées de 2 points A et B lui appartenant :

Si $x_A = 0$, alors $y_A = 0,05 \times 0 + 1,05 = 1,05$ donc $A(0\,;1,05)$.

Si $x_B = 9$, alors $y_B = 0,05 \times 9 + 1,05 = 1$, donc $B(9\,;1,5)$.

**4.** $y = \log P$ et $y = 0,05x + 1,05$ donc $\log P = 0,05x + 1,05$.

D'où $P = 10^{0,05x+1,05}$.

**5. a.** L'année 2021 correspond à $x = 11$.

Sur le graphique, on lit $y = 1,6$. Or, $y = \log P$ donc $\log P = 1,6$. On a alors $P = 10^{1,6}$ TWh, soit environ 39,8 TWh.

**b.** On résout l'inéquation $10^{0,05x+1,05} > 52$.

$10^{0,05x+1,05} > 52 \Leftrightarrow \log(10^{0,05x+1,05}) > \log 52$

$\Leftrightarrow 0,05x + 1,05 > \log 52$

$\Leftrightarrow 0,05x > \log 52 - 1,05$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{\log 52 - 1,05}{0,05}$

Or, $\dfrac{\log 52 - 1,05}{0,05} \approx 13,3$.

C'est donc au bout de 14 ans, c'est-à-dire en 2024 que la capacité de production dépassera 52 TWh.

# Corrigés

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**59** VRAI

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | 0,05 | 0,07 | 0,11 | 0,12 | 0,14 | 0,15 | 0,17 |

En représentant sur la calculatrice le nuage des points de coordonnées $(x_i\,;z_i)$, on observe qu'un ajustement affine est justifié car les points sont proches de l'alignement.

**60** FAUX
D'après la calculatrice, l'équation réduite de la droite d'ajustement de $z$ eu $x$ a pour équation $z = 0{,}02x + 0{,}03$.

**61** VRAI
$z = \dfrac{1}{y}$ et $z = 0{,}02x + 0{,}03$. On en déduit que $\dfrac{1}{y} = 0{,}02x + 0{,}03$ et donc que $y = \dfrac{1}{0{,}02x + 0{,}03}$.

**62** VRAI
Lorsque $x = 9$ on a $y = \dfrac{1}{0{,}02 \times 9 + 0{,}03} \approx 4{,}762$.

**63** FAUX
On résout l'équation $\dfrac{1}{0{,}02x + 0{,}03} = 3{,}7$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{0{,}02x + 0{,}03} = 3{,}7 &\Leftrightarrow 0{,}02x + 0{,}03 = \frac{1}{3{,}7}\\ &\Leftrightarrow 0{,}02x = \frac{1}{3{,}7} - 0{,}03\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\frac{1}{3{,}7} - 0{,}03}{0{,}02}\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\frac{1}{3{,}7} - 0{,}03}{0{,}02} \approx 12$. Le nombre d'années de mise en circulation d'un véhicule ayant une cote argus de 3 700 € est donc estimé à 12 ans.

### QCM

**64** Réponse **a.**
Le nombre de postes de personnel non médical dans la clinique possédant 100 lits est 133.

**65** Réponse **c.**
Le nombre de lits dans la clinique possédant 175 postes de personnel non médical est 135.

**66** Réponse **c.**
Le point moyen G a pour coordonnées (123,1 ; 160,8) car c'est celui qui est situé le plus « au milieu » du nuage de points.

**67** Réponse **a.**
La droite représentée sur le graphique a pour équation $y = 1{,}26x + 5{,}77$.

En effet, la droite d'équation $y = -10{,}48x + 4{,}21$ est à éliminer car son coefficient directeur est négatif alors que la droite cherchée doit avoir un coefficient directeur positif.
La droite d'équation $y = 1{,}46x + 69{,}9$ est à éliminer car son ordonnée à l'origine est 69,9 ce qui est impossible vu l'origine donnée sur le graphique.

**68** Réponse **a.**
Pour $x = 82$, on a $y = 1{,}26 \times 82 + 5{,}77$. Soit $y \approx 109$.

**69** Réponse **b.**
On résout l'équation $1{,}26x + 5{,}77 = 152$.

$$\begin{aligned}1{,}26x + 5{,}77 = 152 &\Leftrightarrow 1{,}26\,x = 146{,}23\\ &\Leftrightarrow x = \frac{146{,}23}{1{,}26}\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{146{,}23}{1{,}26} \approx 116$.

# 6 Probabilités conditionnelles

## *Vérifier les acquis de Première*

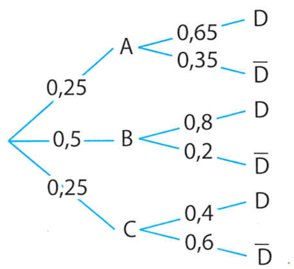
### QCM

**1.** d
**2.** c
**3.** d
**4.** c
**5.** a

## Exercices

### Pour commencer

**17** **1.** Voir l'arbre ci-dessous :




**2.** $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}162\,5$.

**3.** D'après la formule des probabilités totales et l'arbre précédent,

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)\\ &= 0{,}162\,5 + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)\\ &= 0{,}162\,5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}662\,5\end{aligned}$$

**4.** D'après la formule des probabilités conditionnelles, et en utilisant les résultats des questions **2.** et **3.**, on a :
$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{13}{53}$.

**22** L'énoncé donne $P(\mathrm{L})=0{,}7$ ; $P(\mathrm{F})=0{,}3$ ; $P_{\mathrm{L}}(\mathrm{A})=0{,}9$ ; $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})=0{,}1$.

**1.** L'événement $\mathrm{F}\cap\mathrm{A}$ signifie « l'article est un fruit et pousse à l'air libre », et $\mathrm{L}\cap\mathrm{A}$ signifie « l'article est un légume et pousse à l'air libre ».

**2.** Les événements $\mathrm{F}\cap\mathrm{A}$ et $\mathrm{L}\cap\mathrm{A}$ forment une partition de l'événement A, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A})&=P(\mathrm{F}\cap\mathrm{A})+P(\mathrm{L}\cap\mathrm{A})\\&=P(\mathrm{F})\times P_{\mathrm{F}}(\mathrm{A})+P(\mathrm{L})\times P_{\mathrm{L}}(\mathrm{A})\\&=0{,}3\times0{,}1+0{,}7\times0{,}9=0{,}66.\end{aligned}$$

**28** **1.** $P(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $P(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{6}$ donc les événements A et B sont indépendants.

**2.** $P(\mathrm{A})=\frac{6}{13}$, $P(\mathrm{B})=\frac{4}{13}$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2}{13}$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

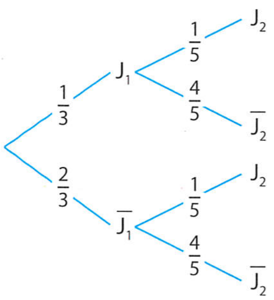
**29** **1.** On note S l'événement « l'élève est sportif » et E l'événement « l'élève est externe ».

$P(\mathrm{S})\times P(\mathrm{E})=\frac{40}{100}\times\frac{52}{100}\neq\frac{11}{50}=P(\mathrm{S}\cap\mathrm{E})$, donc les événements S et E ne sont pas indépendants.

**2.** On note $\overline{\mathrm{S}}$ l'événement « l'élève est non sportif » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

$P(\overline{\mathrm{S}})\times P(\mathrm{D})=\frac{60}{100}\times\frac{30}{100}=\frac{18}{50}=P(\overline{\mathrm{S}}\cap\mathrm{D})$, donc les événements $\overline{\mathrm{S}}$ et D sont indépendants.

**30** **1.** Voir l'arbre ci-dessous :




**2.** Puisque chaque joueur lance à son panier indépendamment de l'autre joueur, les événements $\mathrm{J}_1$ et $\mathrm{J}_2$ sont indépendants.

Ainsi, on a : $P(\mathrm{J}_1\cap\mathrm{J}_2)=P(\mathrm{J}_1)\times P(\mathrm{J}_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

**3. Solution 1 (avec arbre) :** en utilisant l'arbre de probabilités de la question **1.**, on en déduit que :

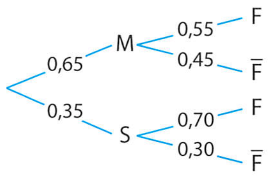
$P(\overline{\mathrm{J}_1}\cap\overline{\mathrm{J}_2})=P(\overline{\mathrm{J}_1})\times P_{\overline{\mathrm{J}_1}}(\overline{\mathrm{J}_2})=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$.

**Solution 2 (sans arbre) :** l'événement « aucun des joueurs ne réussit son panier à trois points » est $\overline{\mathrm{J}_1}\cap\overline{\mathrm{J}_2}$. Or, puisque $\mathrm{J}_1$ et $\mathrm{J}_2$ sont indépendants, $\overline{\mathrm{J}_1}$ et $\overline{\mathrm{J}_2}$ sont également indépendants. On en déduit que :

$P(\overline{\mathrm{J}_1}\cap\overline{\mathrm{J}_2})=P(\overline{\mathrm{J}_1})\times P(\overline{\mathrm{J}_2})=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{15}$.

## Pour s'entraîner

**36** **1.** Voir l'arbre ci-dessous :




**2.** $\mathrm{M}\cap\mathrm{F}$ est l'événement « le client vient manger le midi et commande une formule entrée-plat-dessert ».

Grâce à l'arbre précédent, on trouve $P(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})=0{,}375\,5$.

**3.** D'après l'arbre de la question **1.** et le résultat de la question **2.**, la formule des probabilités totales donne :

$P(\mathrm{F})=P(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})+P(\overline{\mathrm{M}}\cap\mathrm{F})=0{,}462\,5$.

**4.** En utilisant les questions **2.** et **3.**, et la formule des probabilités conditionnelles, on a $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{M})=\frac{P(\mathrm{M}\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})}\approx0{,}773$.

**39** **1.** Si un employé est en retard au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{\mathrm{R}_2}(\mathrm{R}_3)=\frac{1}{20}$.

De même, si un employé est à l'heure au jour 2, la probabilité qu'il soit en retard au jour 3 est $P_{\overline{\mathrm{R}_2}}(\mathrm{R}_3)=\frac{1}{5}$.

**2.** Par hypothèse, $P(\mathrm{R}_1)=0$, ce qui signifie que l'employé était à l'heure au jour 1.

Alors, la probabilité qu'il soit en retard au jour 2 est $P(\mathrm{R}_2)=\frac{1}{5}$.

Ainsi, on a :

$P(\mathrm{R}_2\cap\mathrm{R}_3)=P(\mathrm{R}_2)\times P_{\mathrm{R}_2}(\mathrm{R}_3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{100}$.

De même, $P(\mathrm{R}_1)=0$, on en déduit que $P(\overline{\mathrm{R}_2})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Ainsi, on a :

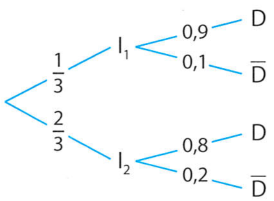
$P(\overline{\mathrm{R}_2}\cap\mathrm{R}_3)=P(\overline{\mathrm{R}_2})\times P_{\overline{\mathrm{R}_2}}(\mathrm{R}_3)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$.

**3.** Puisque $\mathrm{R}_2\cap\mathrm{R}_3$ et $\overline{\mathrm{R}_2}\cap\mathrm{R}_3$ forment une partition de $\mathrm{R}_3$, par la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$P(\mathrm{R}_3)=P(\mathrm{R}_2\cap\mathrm{R}_3)+P(\overline{\mathrm{R}_2}\cap\mathrm{R}_3)=\frac{1}{100}+\frac{4}{25}=\frac{17}{100}$.

D'après l'énoncé, on a $P_{\overline{\mathrm{R}_3}}(\mathrm{R}_4)=\frac{1}{5}$.

**40** **1.** En notant $\mathrm{I}_1$ (respectivement $\mathrm{I}_2$) l'événement « l'interrupteur $\mathrm{I}_1$ (respectivement $\mathrm{I}_2$) laisse passer le courant » et D l'événement « la diode émet de la lumière », on peut modéliser la situation par l'arbre de probabilité suivant :




D'après la formule des probabilités totales, on a donc :

$P(\mathrm{D})=P(\mathrm{I}_1)\times P_{\mathrm{I}_1}(\mathrm{D})+P(\mathrm{I}_2)\times P_{\mathrm{I}_2}(\mathrm{D})=\frac{1}{3}\times0{,}9+\frac{2}{3}\times0{,}8=\frac{5}{6}$.

**2.** Sachant que la diode n'éclaire pas, on cherche lequel des deux interrupteurs a la plus grande probabilité de laisser passer le courant. Il suffit de calculer $P_{\overline{D}}(I_1)$ et $P_{\overline{D}}(I_2)$ et de comparer les probabilités obtenues.
Grâce à la formule des probabilités conditionnelles et aux résultats de la question précédente, on a :

$$P_{\overline{D}}(I_1)=\frac{P(I_1\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{1}{3}\times 0{,}1}{1-\frac{5}{6}}=0{,}2$$

$$\text{et } P_{\overline{D}}((I_2))=\frac{P(I_2\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{2}{3}\times 0{,}2}{1-\frac{5}{6}}=0{,}8.$$

Ainsi, puisque $P_{\overline{D}}(I_1)<P_{\overline{D}}(I_2)$, il est plus probable que ce soit l'interrupteur $I_2$ qui ait laissé passer le courant.

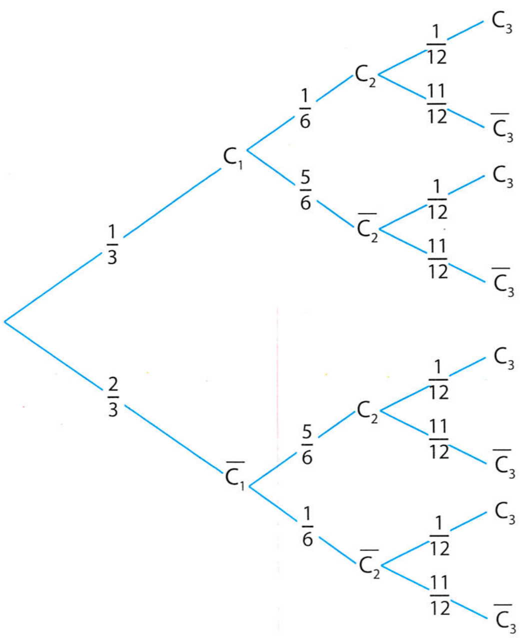
**44** **1.** A et B sont indépendants donc
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}35\times 0{,}48=0{,}168.$

**2.** Grâce à la formule du premier point du **Coup de pouce**, on a :
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=0{,}35+0{,}48-0{,}168=0{,}662.$

**3.** Le deuxième point du **Coup de pouce** nous dit que puisque A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. Ainsi, on a :
$P(A\cap\overline{B})=P(A)\times P(\overline{B})=0{,}35\times(1-0{,}48)=0{,}182.$

**4.** $P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})$
$=0{,}35+0{,}52-0{,}182=0{,}688.$

**48** **1. Solution 1 :** utiliser l'arbre de probabilités ci-dessous :



$$P(C_1\cap C_2\cap_3)=P(C_1)\times P_{C_1}(C_2)\times P_{C_1\cap C_2}(C_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{216}.$$

**Solution 2 :** utiliser l'indépendance des événements (caractérisation identique pour plus de 2 événements) :

$$P(C_1\cap C_2\cap C_3)=P(C_1)\times P(C_2)\times P(C_3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{216}.$$

**2.** Par indépendance des événements $C_1$ et $C_2$, on a :
$P(C_1\cap C_2)=P(C_1)\times P(C_2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}.$

**3.** On cherche la probabilité de l'événement $C_3$, qui est un événement situé en fin de chemin. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(C_3)=P(C_1\cap C_2\cap_3)+P(C_1\cap\overline{C_2}\cap C_3)+P(\overline{C_1}\cap_2\cap C_3)+P(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap C_3)$$
$$=\frac{1}{216}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**51** FAUX

**52** FAUX

**53** **1.** FAUX **2.** VRAI **3.** FAUX **4.** VRAI

**54** VRAI

### QCM

**55** Réponse **b.**

**56** Réponse **b.**

**57** Réponse **c.**

**58** Réponse **a.**

**59** Réponse **c.**

# 7 Variables aléatoires discrètes

*Vérifier les acquis de Première et du chapitre 6*

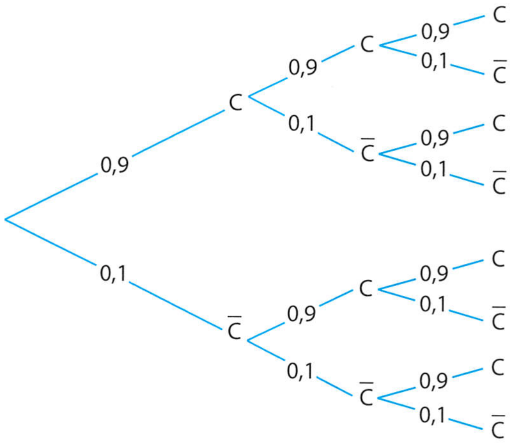
### QCM

**1.** a
**2.** d
**3.** b
**4.** a
**5.** b
**6.** a

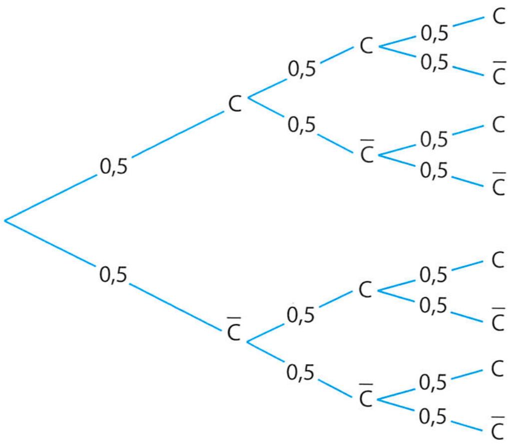
## Exercices

### Pour commencer

**23** **1.** Dans chaque arbre on notera C une réponse correcte, et $\overline{C}$ une réponse incorrecte.
Pour Mehdi :




Pour Yvan :




**2.** Les valeurs de $M$ et $Y$ dépendent du nombre de bonnes réponses. On a donc le tableau suivant :

| Nbre de bonnes réponses | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $M$ ou $Y$ correspondante | $-3$ | 0 | 3 | 6 |

**3.** Cette expérience est la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de bonnes réponses est donc une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(3\,;0{,}9)$ pour Yvan et la loi $\mathscr{B}(3\,;0{,}5)$ pour Yvan.
On a alors les tableaux suivants :
pour Mehdi :

| Nbre de bonnes réponses | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $M$ correspondante | $-3$ | 0 | 3 | 6 |
| Probabilité correspondante | 0,001 | 0,027 | 0,243 | 0,729 |

pour Yvan :

| Nbre de bonnes réponses | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Valeur de $Y$ correspondante | $-3$ | 0 | 3 | 6 |
| Probabilité correspondante | 0,125 | 0,375 | 0,375 | 0,125 |

**4.** D'après ce qui précède, l'espérance de $M$ est :
$E(M) = -3\times 0{,}001 + 0\times 0{,}027 + 3\times 0{,}243 + 6\times 0{,}729 = 5{,}1.$
De même, l'espérance de $Y$ est : $E(Y) = 1{,}5$.
Si on réalisait un grand nombre d'exercices similaires, en moyenne Mehdi gagnerait 5,1 points à chaque fois, et Yvan gagnerait 1,5 point.

**30** Dans le triangle de Pascal, le premier et le dernier coefficient de chaque ligne est égal à 1.
De plus, chacun des autres coefficients est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui.
Ainsi la ligne $n = 9$ du triangle de Pascal est :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |

**35** **1.** $P(X=2) = \binom{9}{2} 0{,}3^2 \times (1-0{,}3)^{9-2}$
$= 36 \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^7 \approx 0{,}267.$

**2.** $P(X=4) = \binom{9}{4} 0{,}3^4 \times (1-0{,}3)^{9-4}$
$= 126 \times 0{,}3^4 \times 0{,}7^5 \approx 0{,}172.$

**39** La variable aléatoire $X$ ne suit pas une loi binomiale.
En effet, choisir une paire de chaussettes au hasard est une épreuve de Bernoulli, mais ces épreuves ne sont pas indépendantes : si Sofia choisi une des deux paires avec un trou le premier jour, alors la probabilité de choisir une paire avec un trou est plus faible les jours suivants.

**44** **1.** Puisque ce tirage est considéré comme un tirage avec remise, vérifier les piles des 35 calculatrices de la classe est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 35$ et $p = 0{,}1$.
**2.** D'après la calculatrice : $P(X=0) \approx 0{,}025$.
La probabilité que toutes les calculatrices de la classe aient des piles chargées est de 0,025.
**3.** D'après la calculatrice, la probabilité que 5 élèves ou moins aient une calculatrice dont les piles sont déchargées est $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}868$.
**4.** L'espérance de $X$ est : $E(X) = 35 \times 0{,}1 = 3{,}5$.
Si on vérifiait les piles des calculatrices dans un grand nombre de classes à 35 élèves, en moyenne 3,5 calculatrices par classe auraient des piles déchargées.

### Pour s'entraîner

**49** **1.** Les valeurs possibles prises par $X$ sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.
**2.** Le tableau suivant donne l'écart entre le résultat du premier dé (dans la colonne 1) et du deuxième dé (dans la ligne 1) :

# Corrigés

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **2** | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **3** | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| **4** | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| **5** | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| **6** | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Il y a donc 36 tirages possibles, tous avec la même probabilité qui est donc égale à $\frac{1}{36}$.
6 de ces tirages donnent le résultat 0.
10 de ces tirages donnent le résultat 1.
8 de ces tirages donnent le résultat 2.
6 de ces tirages donnent le résultat 3.
4 de ces tirages donnent le résultat 4.
2 de ces tirages donnent le résultat 5.
La loi de probabilité de $X$ est donc :

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ | $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$ | $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$ | $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$ |

**3.** L'espérance de $X$ est :

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{9}+5\times\frac{1}{18}$$
$$=\frac{35}{18}.$$

**53** **1. a.** Les premières et dernières valeurs de $L2$ sont 1.
**b.** Puisque $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ la i-ème valeur de $L2$ est la somme de la (i – 1)-ème valeur et i-ème valeur de $L1$, pour i allant de 1 à $n-1$.
**c.** L'algorithme suivant convient :

```
def suivante(L1):
    L2=[]
    l=len(L1)– 1
    for i in range(l):
        L2=L2+[L1[i]+L1[i+1]]
    L2=[1]+L2+[1]
    return(L2)
```

**2. a.** La première ligne du triangle de Pascal est l'unique valeur : 1.
**b.** L'algorithme suivant convient :

```
def triangle(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        L=suivante(L)
    return(L)
```

**3.** La commande suivante renvoie le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n=10$ :

```
for n in range(11) :
    L=triangle(n)
    print(L)
```

Le résultat est :
[1]
[1, 1]
[1, 2, 1]
[1, 3, 3, 1]
[1, 4, 6, 4, 1]
[1, 5, 10, 10, 5, 1]
[1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]
[1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1]
[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]
[1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1]
[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]

**54** **1.** La variable aléatoire $X$ suit la loi $\mathcal{B}(4\,;0{,}95)$.
**2.** D'après la calculatrice, la probabilité que seulement 3 vols soient réussis est environ : $P(X=3)\approx 0{,}171$.
**3.** D'après la calculatrice, la probabilité que tous les vols soient réussis est environ : $P(X=4)\approx 0{,}815$.
**4.** L'espérance de $X$ est : $E(X)=4\times 0{,}95=3{,}8$.
Si on effectuait un grand nombre de séries de quatre vols, il y aurait en moyenne 3,8 vols réussis par série.

**56** **1.** La variable aléatoire $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n=6$ et $p=\frac{1}{3}$.
**2.** La probabilité que tous les feux soient rouges est $P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^6\approx 0{,}001$.
**3.** Pour arriver à l'heure, il lui faut arriver avec moins d'une minute de retard, il faut donc que seulement trois feux ou moins soient rouges. La probabilité de cet événement est : $P(X\leqslant 3)\approx 0{,}900$.
**4.** L'espérance de $X$ est : $E(X)=6\times\frac{1}{3}=2$. Donc si elle effectue un grand nombre de trajets, en moyenne elle rencontrera deux feux rouges par trajet.

**59** Soit $X$ le nombre de cibles (parmi 5) que Martin Fourcade atteint lors d'une séance de tir.
La réussite d'un tir étant indépendante des autres, une séance de tirs est assimilée à un schéma de Bernoulli.
$X$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}9$. La probabilité qu'il atteigne les cinq cibles est donc :
$P(X=5)=0{,}9^5\approx 0{,}59$.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**63** FAUX
La somme des probabilités est : $2p+4p+3p+2p+p=12p=1$.
Ainsi $p=\frac{1}{12}$.

**64** FAUX
La valeur de $\binom{17}{16}$ est 17.

**65** FAUX
Le coefficient binomial $\binom{8}{5}$ est aussi égal à 56.

**66** FAUX
Le coefficient binomial $\binom{252}{1}$ est aussi égal à 252.

**67** FAUX
Le coefficient binomial $\binom{314}{1}$ est égal à 314.

**68** VRAI
$P(X=2)=\binom{8}{2}0,3^2\times(1-0,3)^{8-2}=28\times0,3^2\times0,7^6\approx0,30.$

**69** FAUX
D'après la calculatrice $P(Y\geqslant4)\approx0,63$.

**70** VRAI
D'après la calculatrice $P(Z>8)\approx0,35$.

**71** VRAI
L'espérance d'une variable aléatoire $X$ suivant la loi binomiale $B(100;0,225)$ est $E(X)=100\times0,225=22,5$.

QCM

**72** **1.** Réponse **d.** **2.** Réponse **a.**

**73** Réponse **d.**

**74** **1.** Réponse **a.** **2.** Réponse **c.** **3.** Réponse **c.**

## 8 Fonction exponentielle de base e

### *Vérifier les acquis de Première et du chapitre 3*

QCM

**1.** c
**2.** c
**3.** c
**4.** b
**5.** d
**6.** d

## Exercices

### Pour commencer

**37** **1.** $f(0)=-0,5e^0=-0,5$.
$f(-1)=-0,5e^{-1}$.
**2.** Sur la calculatrice, pour trouver l'antécédent de $-3$, menu **table** ou sur Casio solvN($f(x)$=–3x).
On obtient la solution de l'équation $-0,5e^x=-3$ soit $e^x=6$ d'où $x=\ln6=1,791$.
**3.** $f'(x)=-0,5e^x=f(x)<0$ donc $f$ est strictement décroissante car $-0,5<0$ et $e^x>0$.

**53** $f(1)\times f(-2,5)\times f(3)=2e\times2e^{-2,5}\times2e^3=2e^{1,5}$.

**60** **a.** $f(x)=uv(x)$ avec $u(x)=2x$ et $v(x)=e^x$.
$u'(x)=2$ et $v'(x)=e^x$ d'où $f'(x)=2e^x+e^x(2x)=2e^x(1+x)$.
**b.** $g(x)=uv(x)$ avec $u(x)=e^x$ et $v(x)=3-x$.
$u'(x)=e^x$ et $v'(x)=-1$
d'où $g'(x)=e^x(3-x)+e^x(-1)=e^x(3-x-1)=e^x(2-x)$.
**c.** $h(x)=uv(x)$ avec $u(x)=e^x+1$ et $v(x)=e^x-1$.
$u'(x)=e^x$ et $v'(x)=e^x$
d'où $h'(x)=e^x(e^x-1)+e^x(e^x+1)=e^x(e^x-1+e^x+1)=e^x(2e^x)=2e^{2x}$.

**63** **a.** $f'(x)=2e^x+3>0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
**b.** $g'(x)=-2e^x<0$ donc $g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**73** **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=-2$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-2=-2$.
**b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.
**c.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{e^{-x}}+\dfrac{e^{-x}}{3}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

### Pour s'entraîner

**96** **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-2)e^x=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-2e^x=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.
**2.** $f(x)=uv(x)$ avec $u(x)=3x-2$ et $v(x)=e^x$.
$u'(x)=3$ et $v'(x)=e^x$ d'où :
$f'(x)=3e^x+e^x(3x-2)=e^x(3+3x-2)=e^x(3x+1)$.
**3.** $e^x>0$ et $3x+1>0$ pour $x>\dfrac{-1}{3}$ donc $f'(x)>0$ sur $\left]\dfrac{-1}{3};+\infty\right[$.
$f$ est croissante sur $\left]\dfrac{-1}{3};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;\dfrac{-1}{3}\right[$.
**4.** Point P : intersection avec axe des abscisses : $f(x)=0$ pour $x=\dfrac{2}{3}$.
On a : $P\left(\dfrac{2}{3};0\right)$.
Point N : intersection avec axe des ordonnées : $f(0)=-2$.
On a : $N(0;-2)$.
**5.** $y=f'(0)(x-0)+f(0)=x-2$.

**98** **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+2=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.
**2.** $f'(x)=2+e^x>0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
**3.** $y=f'(0)(x-0)+f(0)=3x+3$.

**102** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
**2. a.** $f'(x)=4e^{2x}-5e^x=e^x(4e^x-5)$.

**b.** $e^x > 0$ et $(4e^x - 5) > 0$ pour $e^x > \frac{5}{4}$ donc pour $x > \ln\frac{5}{4}$.

On a donc : $f'(x) > 0$ sur pour $x > \ln\frac{5}{4}$

**3.** $f$ est strictement croissante sur $\left]\ln\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;\ln\frac{5}{4}\right[$.

**104** **1.** $R'(t) = 150 - 750 \times 0{,}1e^{0{,}1t} = 150 - 75e^{0{,}1t}$.
$150 - 75e^{0{,}1t} > 0$
$\Leftrightarrow 150 > 75\,e^{0{,}1t}$
$\Leftrightarrow 2 > e^{0{,}1t}$
$\Leftrightarrow \ln 2 > \ln e^{0{,}1t}$
$\Leftrightarrow \ln 2 > 0{,}1t$
$\Leftrightarrow t < \frac{\ln 2}{0{,}1}$
$\Leftrightarrow t < 10\ln 2$.
**2.** $R'(t) > 0$ pour $t < 10\ln 2$ soit sur $[0\,;10\ln 2[$ et $R(t)$ est strictement croissante sur cet intervalle.
$R'(t) < 0$ pour $t > 10\ln 2$ soit sur $]10\ln 2\,;10[$ et $R(t)$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

**105** **1.** $f(0) = \frac{20}{1+2e^0} = \frac{20}{3}$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 20$ car $\lim_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$.
**2.** $f'(x) = \frac{20 \times -2 \times -0{,}3e^{-x}}{(1+2e^{-0{,}3x})^2} = \frac{1{,}2e^{-0{,}3x}}{(1+2e^{-0{,}3x})^2}$
**3.** $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

**Pour faire le point**

**Vrai ou Faux**

**110** FAUX
$f$ est croissante et négative sur $\mathbb{R}$.

**111** FAUX
$f'(x) = e^x(4e^x + 1)$ et $f'(0) = 5$.

**112** VRAI

**113** FAUX
$f'(x) = 2e^x + 2e^{-x}$.

**114** VRAI
$f'(x) = 6e^{-3x}$

**115** FAUX
$f'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$.

**116** VRAI

**117** FAUX

**118** FAUX
sauf pour $k = 0$ $f$ fonction constante.

**119** VRAI

**QCM**

**120** Réponse **a.**

**121** Réponse **b.**

**122** Réponse **b.**

**123** Réponse **a.**

**124** Réponse **a.**

**125** Réponse **a.**

**126** Réponse **b.**

## 9 Fonction logarithme népérien

### *Vérifier les acquis de Seconde ou de Première*

**QCM**

**1.** b
**2.** c
**3.** b
**4.** a
**5.** c
**6.** c
**7.** b
**8.** c

## Exercices

**Pour commencer**

**30** **a.** $2e^{-x+1} > 2 \Leftrightarrow e^{-x+1} > 1$
$\Leftrightarrow -x + 1 > 0$
$\Leftrightarrow x < 1$
$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty\,;1[$.
**b.** $-3e^{2x} + 6 < 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 2$
$\Leftrightarrow 2x > \ln 2$
$\Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2}$
$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{\ln 2}{2}\,;+\infty\right[$.
**c.** $e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$
$S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$.

**34** **1.** $e^{2X} - 2e^X - 3 = 0 \Leftrightarrow (e^X)^2 - 2e^X - 3 = 0$
$\Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X > 0$.

**2.** $(X+1)(X-3)=X^2-3X+X-3=X^2-2X-3.$

$X^2-2X-3=0 \Leftrightarrow (X+1)(X-3)=0$

$\Leftrightarrow X=-1$ ou $X=3.$

**3.** On résout $e^x=-1$ et $e^x=3$.

$e^x=-1$ n'admet pas de solution réelle.

$e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3.$

Conclusion $S_{\mathbb{R}}=\{\ln 3\}$.

**40** **a.** $f(x)=(2x-1)\ln(x)$

$f'(x)=2\ln(x)+(2x-1)\times\frac{1}{x}$

$=2\ln(x)+2-\frac{1}{x}.$

**b.** $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}=-\frac{1}{x(\ln(x))^2}.$

**c.** $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$

**50** **1.** $f'(x)=-3\times\frac{1}{x}$ ; $\frac{1}{x}>0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Donc $f'(x)<0$ sur $]0;+\infty[$.

$f$ est donc décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

**2.** $2\sqrt{2}<3$ ; comme $f$ est décroissante sur $]0;+\infty[$, alors $f(2\sqrt{2})>f(3)$.

**56** $A=\ln 3-\ln\left(\frac{1}{9}\right)=\ln 3+\ln(3^2)$

$=\ln 3+2\ln 3$

$=3\ln 3.$

$B=2\ln\left(\sqrt{2}\right)-\frac{1}{3}\ln(8)=2\times\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{3}\ln(2^3)$

$=\ln 2-\frac{1}{3}\times 3\ln(2)$

$=0.$

$C=\ln(\sqrt{27})+2\ln 4-\frac{1}{2}\ln 9-\ln 8$

$=\frac{1}{2}\ln(3^3)+2\ln(2^2)-\frac{1}{2}\ln(3^2)-\ln(2^3)$

$=\frac{1}{2}\times 3\ln(3)+2\times 2\ln(2)-\frac{1}{2}\times 2\ln(3)-3\ln(2)$

$=\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2.$

$D=\frac{e^{\ln 3}}{e^{2\ln 3}}=\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}.$

**64** $f(x)=x^2-14x+15+20\ln x.$

**1.** On a : $f'(x)=2x-14+20\times\frac{1}{x}$

$=\frac{2x^2-14x+20}{x}.$

Or, $2(x-2)(x-5)=2x^2-14x+20$

d'où le résultat :

$f'(x)=\frac{2(x-2)(x-5)}{x}.$

**2.** Comme $x\in[1\,;10]$, $x>0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc du même signe que le numérateur $2(x-2)(x-5)$.

On a le tableau de signes suivants pour $2(x-2)(x-5)$ :

| $x$ | 1 | | 2 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2(x-2)(x-5)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

D'où le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;10]$ :

| $x$ | 1 | | 2 | | 5 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f$ | $f(1)$ | ↗ | $f(2)$ | ↘ | $f(5)$ | ↗ | $f(10)$ |

**Pour s'entraîner**

**69** **1.** $f(x)=\frac{x^2}{4}-1-2\ln x$

donc $f'(x)=\frac{2x}{4}-2\times\frac{1}{x}$

$=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$

$=\frac{x^2-4}{2x}.$

**2.** Pour tout $x>0$, $2x>0$.

On étudie le signe de $x^2-4=(x+2)(x-2)$ sur $]-\infty\,;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | 2 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)(x+2)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

D'où le tableau de variation de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ :

| $x$ | 0 | | 2 | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | − | 0 | + | |
| $f$ | ‖ | ↘ | $f(2)$ | ↗ | |

**3.** L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$y=f'(1)(x-1)+f(1).$

$f'(1)=\frac{1^2-4}{2\times 1}$

$=\frac{-3}{2}$

et $f(1)=\frac{1^2}{4}-1-2\ln 1$

$=\frac{-3}{4}.$

On a donc :

$y=\frac{-3}{2}(x-1)-\frac{3}{4}$

$=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}.$

L'équation est donc $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}.$

**4. a.** $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

**b.** Une primitive $F$ de $f$ est :

$\dfrac{x^3}{12} - x - 2g(x) + C$, où $C$ est une constante réelle.

$F(x) = \dfrac{x^3}{12} - x - 2g(x) + C$, avec $F(1) = 0$.

On a donc :

$\dfrac{1}{12} - 1 - 2(1 \times \ln 1 - 1) + C = 0$.

Soit $\dfrac{13}{12} + C = 0$ d'où :

$C = -\dfrac{13}{12}$.

$F(x) = \dfrac{x^3}{12} - x - 2(x\ln(x) - x) - \dfrac{13}{12} = \dfrac{x^3}{12} + x - 2x\ln(x) - \dfrac{13}{12}$.

**70** **1.** b.
**2.** b.
**3.** b.
**4.** b.

**71** **1.**

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | −1,5 | −0,4 | −0,7 | −0,9 | −0,6 | 0,3 | 2 |

**2. a.** $f'(x) = x - 6 + 8 \times \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x}$

$= \dfrac{(x-2)(x-4)}{x}$

car $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$.

**b.** Sur I, $x > 0$ ; le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur $(x-2)(x-4)$.

On a le tableau de signes suivant :

| $x$ | 1 | | 2 | | 4 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)(x-4)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

$f$ est donc croissante sur les intervalles [1 ; 2] et [4 ; 7] et décroissante sur [2 ; 4].

D'où le tableau de variation :

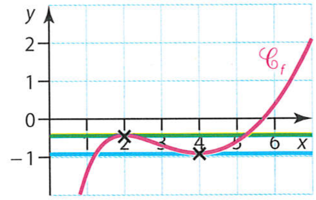
| $x$ | 1 | | 2 | | 4 | | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f$ | $f(1)$ | ↗ | $f(2)$ | ↘ | $f(4)$ | ↗ | $f(7)$ |

**3.** D'après l'étude des variations de $f$, $f'(x)$ s'annule en $x = 2$ et en $x = 4$.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de $f$ est donc nul en $x = 2$ et en $x = 4$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, aux points d'abscisses 2 et 4.

**4. a.**




**b.** D'après la figure ci-dessus, on lit que l'équation $f(x) = 0$ ne semble admettre qu'une seule solution dans l'intervalle I. On lit $x \approx 5{,}7$.

**72** **Partie A**

**1.** $f(1) = 2$ et $f'(4) = 0$.

**2.** $f'(x) = a + b \times \dfrac{1}{x} = a + \dfrac{b}{x}$

soit $f'(4) = a + \dfrac{b}{4}$.

**3.** On a $f(1) = 2$ donc $a + 1 = 2$

d'où $a = 1$.

$f'(4) = 0$ d'où $a + \dfrac{b}{4} = 0$ soit $1 + \dfrac{b}{4} = 0$ et $\dfrac{b}{4} = -1$

d'où $b = -4$.

**Partie B**

**1.** $f'(x) = a + \dfrac{b}{x}$ d'après la **Partie A** donc $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x}$.

**2.** On a $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x} = \dfrac{x-4}{x}$.

$x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $x - 4$.

$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

On a le tableau de variation suivant :

| $x$ | 0 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | − | 0 | + | |
| $f$ | ‖ | ↘ | $f(4)$ | ↗ | |

**74** **1.** $N(2T) = N_0 \times e^{-l2T} = N_0 \times e^{-\frac{\ln 2}{T} \times 2T}$

$= N_0 \times e^{-2\ln 2}$

$= N_0 \times e^{-\ln 2^2}$

$= N_0 \times e^{-\ln 4}$

$= \dfrac{N_0}{e^{\ln 4}}$

$= \dfrac{N_0}{4}$.

**2.** Le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 devient égal au quart de la valeur initiale au bout de $2T$ soit $2 \times 5\,730 = 11\,460$ ans.

**3.** Pour le carbone 14 :

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{5{,}73} \approx 0{,}120\,97$ à $10^{-5}$ près.

Pour le plutonium 239 :

$\lambda = \dfrac{\ln 2}{24} \approx 0{,}028\,88$ à $10^{-5}$ près.

**4.** Pour le carbone 14, la loi exponentielle est :

$N(t) = N_0 \times e^{-0{,}12097t}$.

Pour le plutonium 239, la loi exponentielle est :

$N(t) = N_0 \times e^{-0{,}02888t}$.

**5.** On résout $N(t) < 0{,}1N_0 \Leftrightarrow N_0 \times e^{-0{,}02888t} < 0{,}1N_0$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}02888t} < 0{,}1$$
$$\Leftrightarrow -0{,}028\,88t < \ln(0{,}1)$$
$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}028\,88} \Leftrightarrow t > 79{,}72.$$

Le nombre de noyaux radioactifs de plutonium 239 sera inférieur à 10 % de sa valeur initiale au bout d'environ 80 000 ans.

**6.** On résout $N(t) = 0{,}1N_0$.

Cela équivaut à $N_0 \times e^{-0{,}12097t} = 0{,}1N_0 \Leftrightarrow e^{-0{,}12097t} = 0{,}1$

$$\Leftrightarrow -0{,}120\,97t = \ln(0{,}1)$$

d'où $t = \dfrac{\ln(0{,}1)}{-0{,}120\,907} \approx 19{,}034.$

Le fragment humain a un âge d'environ 19 000 ans à 100 ans près.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**79** FAUX

La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

**80** VRAI

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, et pour tout $x > 0$, $\ln'(x)$.

**81** FAUX

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

**82** VRAI

$$\ln(2e) - 2\ln(8) - \ln\left(\frac{1}{16}\right) = \ln(2) + \ln(e) - 2\ln(2^3) + \ln(16)$$
$$= \ln(2) + \ln(e) - 2 \times 3\ln(2) + \ln(2^4)$$
$$= \ln(2) + \ln(e) - 2 \times 3\ln(2) + 4\ln(2)$$
$$= -\ln 2 + 1.$$

**83** VRAI

$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

**84** FAUX

$f'(x) = (2x+1)\ln(x) + (x^2+x) \times \dfrac{1}{x} = (2x+1)\ln(x) + x + 1.$

**85** VRAI

$\ln(2x) > -1$ équivaut à $2x > e^{-1}$ soit $x > \dfrac{1}{2e}$.

**86** FAUX

$e^{0^2+1} = e^1 = e$

**87** VRAI

$f'(x) = \dfrac{3}{x}$ donc $f'(1) = \dfrac{3}{1} = 3.$

### QCM

**88** Réponse **a.**

**89** Réponse **d.**

**90** Réponse **c.**

**91** Réponse **b.**

**92** Réponse **d.**

# 10 Composition de fonctions

## *Vérifier les acquis de Première ou du tronc commun*

### QCM

**1.** c
**2.** b
**3.** c
**4.** a
**5.** c
**6.** a
**7.** c

## Exercices

### Pour commencer

**31** $f(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 3x + 8$ et $v(x) = x^3$.

$g(x) = v \circ u(x)$ avec $u(x) = 5x^2 - 2x + 3$ et $v(x) = x^4$.

**37** **1.** $v \circ u(x) = 2(2x-5)^2$ donc :

$v \circ u(0) = 50$ ;

$v \circ u(5) = 50$ ;

$v \circ u(-2) = 162$.

**2.** $u \circ v(x) = 2 \times 2x^2 - 5 = 4x^2 - 5$ donc :

$u \circ v(0) = -5$ ;

$u \circ v(5) = 95$ ;

$u \circ v(-2) = 11$.

**3.** On constate que $v \circ u \neq u \circ v$.

**47** **a.** $v \circ u(x) = \sin(2x + \pi)$ ;

$u \circ v(x) = 2\sin x + \pi$.

**b.** $v \circ u(x) = \cos\left(4x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ ;

$u \circ v(x) = 4\cos x - \dfrac{\pi}{3}$.

**67** On cherche une primitive de $u'u^n$.

**a.** $F(x)=\frac{1}{3}(x^2+x+1)^3$

**b.** $F(x)=\frac{1}{2}(x^3-1)^2$.

**c.** $F(x)=\frac{1}{3}(x^3+3x)^3$.

**70** On cherche une primitive de $\frac{u'}{u}$.

**a.** $F(x)=\ln(x^2+3)$

**b.** $F(x)=\ln(3-4x)$

**c.** $F(x)=\ln(x^2+x+1)$.

## Pour s'entraîner

**74** **a.** $f=v\circ u$ avec :

$u(x)=3x^2-5x+9$ et $v(x)=x^4$.

**b.** $g=v\circ u$ avec :

$u(x)=\frac{5x^2+3}{x^2+1}$ et $v(x)=x^3$.

**80** **1.** $f=v\circ u$ avec :

$u(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\sin x$.

**2.** $u$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

**3.** $u'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $v'(x)=\cos x$

donc $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

**82** **1.** $f(x)=\ln(\sin x)$ est définie et dérivable dès que $\sin x$ est strictement positif, ce qui vrai sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

**2.** $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$.

**3.** $\cos x$ est positif sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et négatif sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

Puisque $\sin x$ est strictement positif sur l'intervalle $]0\,;\pi[$, $f'(x)$ est du signe de $\cos x$.

Par conséquent, $f'(x)$ est positif sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et négatif sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$.

**4.**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f$ | ‖ | ↗ | $0$ | ↘ | ‖ |

**85** On cherche une primitive de $u'u^n$.

**a.** $F(x)=\frac{1}{4}(x^2+2x+1)^4$.

**b.** $F(x)=\frac{1}{2}(x^3+3)^2$

**c.** $F(x)=\frac{1}{3}(x^3+x+2)^3$

**89** On cherche une primitive de $\frac{u'}{u}$.

**a.** $F(x)=\ln(e^x+3)$.

**b.** $F(x)=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3)$

**c.** $F(x)=-\ln(\cos x)$

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**99** VRAI

**100** VRAI

$g(x)=2\ln(x^2-4)=\ln\left[(x^2-4)^2\right]$.

**101** VRAI

**102** VRAI

**103** FAUX

**104** VRAI

**105** VRAI

$f(x)$ est du signe de $x$.

### QCM

**106** Réponse **c.**

**107** Réponse **b.**

**108** Réponse **c.**

**109** Réponse **c.**

**110** Réponse **b.**

**111** Réponse **b.**

# 11 Intégration

## Vérifier les acquis de Première et des chapitres précédents

### QCM

**1.** c

**2.** c

**3.** b

**4.** b

**5.** a

**6.** b

**7.** c

# Exercices

## Pour commencer

**21** L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie colorée est égale à : $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$.

**41** **1.** $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)} - \dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$= \dfrac{(3x+3)-(2x-4)}{(x-2)(x+1)}$

$= \dfrac{x+7}{x^2-x-2}$.

**2.** $I = \displaystyle\int_3^5 \frac{3}{x-2} dx = [3\ln(x-2)]_3^5 = 3\ln 3 - 3\ln 1 = 3\ln 3$.

$J = \displaystyle\int_3^5 \frac{2}{x+1} dx = [2\ln(x+1)]_3^5$

$= 2\ln 6 - 2\ln 4$.

**3.** $K = I - J = 3\ln 3 - 2\ln 6 + 2\ln 4$

$= 3\ln 3 - 2\ln 3 - 2\ln 2 + 4\ln 2$

$= \ln 3 + 2\ln 2 = \ln 12$.

**47** $m = \dfrac{1}{3-(-3)} \displaystyle\int_{-3}^{3} (2x - x^3) dx = \frac{1}{6}\left[x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-3}^{3} = 0$.

**51** **1.** $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1$.

**2.** La fonction cosinus est négative sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ donc :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 1 - (-2) = 3$.

**54** **1.** $f(1) = g(1) = 0$ donc A(1 ; 0).

$f(x) = g(x)$, $x^2 - 5x + 4 = x - 1$, soit $x^2 - 6x + 5 = 0$

d'où $(x-1)(x-5) = 0$

On retrouve que le point A a pour abscisse 1 et on en déduit que B a pour abscisse 5.

$f(5) = g(5) = 4$ donc B(5 ; 4).

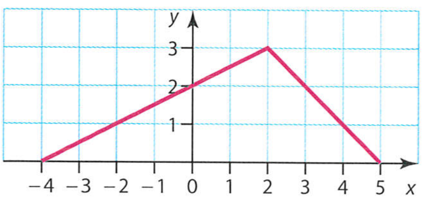
**2.** $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^5 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx$

$= \left[-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5$

$= \dfrac{25}{3} - \left(-\dfrac{7}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$.

## Pour s'entraîner

**57** **1.**




**2. a.** On calcule l'aire d'un triangle.

$\displaystyle\int_{-4}^{-2} h(x) dx = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

**b.** On calcule l'aire d'un triangle.

$\displaystyle\int_{-4}^{2} h(x) dx = \frac{6 \times 3}{2} = 9$.

**c.** On calcule l'aire d'un triangle.

$\displaystyle\int_{2}^{5} h(x) dx = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$.

**d.** On calcule l'aire d'un triangle.

$\displaystyle\int_{-4}^{5} h(x) dx = \frac{9 \times 3}{2} = \frac{27}{2}$.

*Remarque :* $\displaystyle\int_{-4}^{5} h(x) dx = \int_{-4}^{2} h(x) dx + \int_{2}^{5} h(x) dx$.

**61** **1.** $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

**2.** $f(x) = \ln x + 1 + 2x$ donc $F(x) = x\ln x + x^2$.

**3.** $I = \displaystyle\int_1^e (\ln x + 2x + 1) dx = [x\ln x + x^2]_1^e$

$= (e\ln e + e^2) - (1 \times \ln 1 + 1)$

$= e^2 + e - 1$.

**65** **1.** $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$.

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x \, dx = [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1 - (-1) = 2$.

**2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = 2 + 2 = 4$.

**69** **1.** On calcule l'aire d'un triangle.

$\displaystyle\int_{-3}^{4} f(x) dx = \frac{(4-(-3)) \times 5}{2} = \frac{35}{2}$.

**2.** $m = \dfrac{1}{4-(-3)} \displaystyle\int_{-3}^{4} f(x) dx = \frac{5}{2}$

**70** **1.** $I = \displaystyle\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$

$= \left[\dfrac{x^2}{4} - x\right]_0^2$

$= -1$.

$J = \displaystyle\int_2^6 f(x) dx = \int_2^6 \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx$

$= \left[\dfrac{x^2}{4} - x\right]_2^6$

$= 4$.

**2.** Puisque $f$ est négative sur l'intervalle [0 ; 2], l'aire colorée est égale à :

$-I + J = -(-1) + 4 = 5$.

## Pour faire le point

### Vrai ou Faux

**75** VRAI

**76** FAUX

**77** FAUX

**78** FAUX

**79** VRAI

**80** VRAI
$e^x$ est positif.

**81** FAUX

QCM

**82** Réponse **b.**

**83** Réponse **d.**

**84** Réponse **a.**

**85** Réponse **a.**

**86** Réponse **d.**

**87** Réponse **b.**

## 12 Équations différentielles

### *Vérifier les acquis de Première et du chapitre 8*

QCM

**1.** c
**2.** c
**3.** b
**4.** b
**5.** d
**6.** b
**7.** c
**8.** b

### Exercices

**Pour commencer**

**44** $f'(x) = -20e^{-10x} = -10f(x)$
donc $f$ solution de l'équation différentielle $y' = -10y$.

**52** $f(x) = ke^{7x}$.

**64** L'équation devient $y' - 0{,}5y = 0$ et $f(x) = ke^{0{,}5x}$ est une solution de cette équation.
De plus $f(2\ln 2) = ke^{\ln 2} = 1$ d'où $2k = 1$ donc $k = 0{,}5$.
La solution de l'équation est $f(x) = 0{,}5e^{0{,}5x}$.

**74** $f'(x) = e^{-x}$ donc $f'(x) + f(x) = 5$
d'où l'équation dont $f$ est solution est : $y' + y = 5$.

**80** L'équation devient $y' - \frac{2}{3}y = \frac{4}{3}$ et une solution est $f(x) = ke^{\frac{2x}{3}} - 2$.

**Pour s'entraîner**

**101** **1.** L'équation devient $y' - 2{,}5y = 0$
d'où la solution $h(x) = ke^{2{,}5x}$.
**2.** $f(2) = ke^5 = 1$ d'où $k = e^{-5}$ donc $f(x) = e^{-5} \times e^{2{,}5x} = e^{2{,}5x-5}$.
**3.** $g(0) = 1$ donc $k = 1$ d'où $g(x) = e^{2{,}5x}$.
**4.** $f'(x) = e^{2{,}5x-5} > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $[-4\,;2]$.
$g'(x) = 2{,}5e^{2{,}5x} > 0$ donc $g$ est strictement croissante sur $[-4\,;2]$.

**107** **1.** Les solutions de (E) sont $f(x) = ke^{1{,}5x}$.
**2.** Courbe bleue : $f(0) = 4$ donc $k = 4$ et $f(x) = 4e^{1{,}5x}$.
Courbe orange : $g(0) = -2$ donc $k = -2$ et $g(x) = -2e^{1{,}5x}$.

**112** **1.** $y' - 4y = 4f(x) = ke^{4x} - 1$ et $f(0) = 1 = k - 1$ donc $k = 2$ soit $f(x) = 2e^{4x} - 1$.
**2.** $y' - 5{,}5y = -2f(x) = ke^{5{,}5x} + \frac{4}{11}$ et $f(-2) = -3 = ke^{-11} + \frac{4}{11}$
donc $k = \left(-3 - \frac{4}{11}\right)e^{11} = \frac{-37}{11}e^{11}$
d'où $f(x) = \frac{-37}{11}e^{11}e^{5{,}5x} + \frac{4}{11}$.

**114** **1.** $f'(1) - 2f(1) = 1$ or $f'(1) = 2$ d'où $f(1) = 0{,}5$.
**2.** $f(x) = ke^{2x}$ et $f(1) = 0{,}5 = ke^2$ donc $k = 0{,}5e^{-2}$ et $f(x) = 0{,}5e^{2x-2}$.

**118** $y' - 2\ln 3y = 0$, $f(x) = ke^{2\ln 3x}$ et $f(0) = k = 5$ donc $f(x) = 5e^{2\ln 3x}$.

**Pour faire le point**

Vrai ou Faux

**143** VRAI

**144** VRAI

**145** VRAI

**146** VRAI

**147** FAUX

**148** FAUX

**149** FAUX

**150** FAUX

**151** FAUX

QCM

**152** Réponse **b.**

**153** Réponse **c.**

**154** Réponse **a.**

**155** Réponse **c.**

**156** Réponse **a.**

**157** Réponse **a.**

**158** Réponse **c.**

## 13 Nombres complexes

*Vérifier les acquis de Première*

QCM

**1.** c
**2.** d
**3.** b
**4.** b
**5.** a
**6.** c

## Exercices

**Pour commencer**

**34** **a.** $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

**b.** $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

**c.** $z = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$= 5i.$

**d.** $z = 4e^{i\pi}$

$= 4\,(\cos\pi + i\sin\pi)$

$= -4.$

**e.** $z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

**f.** $z = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \left(-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= i\sqrt{3}.$

**38** **a.** $z = 1 + i.$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta.$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4}.$

$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$

**b.** $z = -2i.$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2.$

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = \frac{0}{2} = 0$ et $\sin\theta = -\frac{2}{2} = -1.$

Donc $\theta = -\frac{\pi}{2}.$

$z = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

**c.** $z = -5.$

$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = -\frac{5}{5} = -1$ et $\sin\theta = \frac{0}{5} = 0.$

Donc $\theta = \pi.$

$z = 5e^{i\pi}.$

**d.** $z = -\sqrt{3} - i.$

$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4}$

$= 2.$

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}.$

Donc $\theta = -\frac{5\pi}{6}.$

$z = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$

**e.** $z = -2 + 2i.$

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{4 \times 2}$

$= 2\sqrt{2}$

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Donc $\theta = \frac{3\pi}{4}.$

$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

**f.** $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

**48** **1.** On pose $z = \sqrt{3} + i$.

$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 = A$.

On note $\theta = \arg(z)$.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6} = \varphi$.

De plus $\omega = 1$.

Donc $f(t) = 2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

**2.** $f(t) = 1$ devient $2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$,

soit $\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On sait que $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

L'équation à résoudre s'écrit alors :

$\cos\left(t + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} t + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ t + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

d'où : $$\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

soit $$\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ t = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

En prenant $k = 0$, on obtient alors les deux solutions appartenant à $]-\pi\,;\pi]$ qui sont $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

**65** Une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ est :

$x \mapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x)$.

Donc une primitive de $x \mapsto 2\sin^2 x$ est :

$x \mapsto x - \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

Une primitive de $x \mapsto 4$ est $x \mapsto 4x$.

Les primitives de la fonction $f$ sont les fonctions $F$ telles que :

$F(x) = x - \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 4x + k$

où $k$ est une constante réelle à déterminer.

D'où $f(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(2x) - 3x + k$.

De plus, $F(\pi) = 0$ donne $-\dfrac{1}{2}\sin(2\pi) - 3\pi + k = 0$, soit $k = 3\pi$.

La primitive, sur $\mathbb{R}$, de la fonction $f$ qui s'annule en $\pi$ est la fonction $F$ telle que :

$F(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(2x) - 3x + 3\pi$.

**76** L'écriture complexe de cette translation qui, à tout point M d'affixe $z$, associe le point M′ d'affixe $z'$ est :

$z' = z - 1 - 3i$.

Avec $z = 4 - 3i$, on obtient $z' = 4 - 3i - 1 - 3i = 3 - 6i$.

M′, image de M d'affixe $z = 4 - 3i$ par cette translation, a pour affixe $z' = 3 - 6i$.

## Pour s'entraîner

**93** **1.** $|z_B| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{64} = 8$.

On note $\theta_B = \arg(z_B)$.

$\cos\theta_B = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\theta_B = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

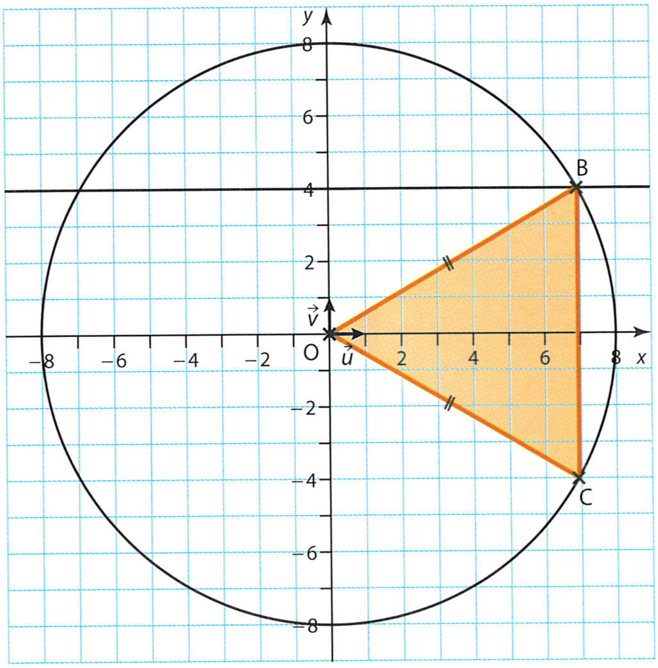
Donc un argument de $z_B$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Une forme exponentielle de $z_B$ est $z_B = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

**2.** $z_C = \overline{z_B}$. Deux nombres complexes conjugués ont même module mais des arguments opposés. Il est donc inutile de calculer le module et un argument de $z_C$.

On obtient : $z_C = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

**3.**




$|z_B| = 8$, donc OB = 8.

Le point B appartient au cercle de centre O et de rayon 8.

La partie imaginaire de $z_B$ est égale à 4, donc le point B appartient à la droite d'équation $y = 4$.

Le cercle de centre O et de rayon 8 et la droite d'équation $y = 8$ ont deux points communs.
Mais la partie réelle de $z_B$ est positive, d'où la position de B sur le graphique.
Enfin, $z_C = \overline{z_B}$. Donc C est le symétrique de B par rapport à l'axe des réels (ou axe des abscisses).
**4.** $OB = |z_B| = 8$ ; $OC = |z_C| = 8$.
$BC = |z_C - z_B| = \left|4\sqrt{3} - 4i - \left(4\sqrt{3} + 4i\right)\right| = |-8i| = 8$.
$OB = OC = BC$, donc le triangle OBC est équilatéral.

**96** **1.** $|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.
On note $\theta_1 = \arg(z_1)$.
$\cos\theta_1 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta_1$.

Donc $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

$z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$.
On note $\theta_2 = \arg(z_2)$.
$\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Donc $\theta_2 = -\dfrac{\pi}{6}$.

$z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

**2.** $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}.$$

**3.** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.

**4.** $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+2i)\left(\sqrt{3}+i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)} = \frac{2\sqrt{3} + 2i + 2i\sqrt{3} + 2i^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{4} + i\frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

**5.** $\dfrac{5\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Donc $$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Et $$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

**100** **1.** $f(0) = \dfrac{1}{2}(\cos 0 + \sin 0) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

$f'(t) = \dfrac{1}{2}(-3\sin(3t) + 3\cos(3t))$

donc $f'(0) = \dfrac{1}{2}(-3\sin 0 + 3\cos 0) = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$.

**2.** $$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(3t)\cos\frac{\pi}{4} + \sin(3t)\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3t)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(3t) + \sin(3t)) = \frac{1}{2}(\cos(3t) + \sin(3t)) = f(t).$$

La vérification est faite.

**3.** $f(t) = 0$ devient $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$, soit $\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

On sait que $0 = \cos\dfrac{\pi}{2}$.
L'équation à résoudre s'écrit alors :
$\cos\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}$.
On obtient alors :
$$\begin{cases} 3t - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 3t - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{Z}$$
d'où : $$\begin{cases} 3t = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ 3t = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{Z}$$
soit $$\begin{cases} t = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ t = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions est :
$S = \left\{\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{11\pi}{12} ; \dfrac{7\pi}{12}\right\}$.

**4.** À partir de $t = 0$, le mobile repasse à sa position d'équilibre lorsque $f(t) = 0$ à nouveau donc pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, c'est-à-dire au bout de 0,785 seconde (arrondi au millième).

**103** **1.** $z_B = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i}$

$= \dfrac{2}{3+3i}$

$= \dfrac{2(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)}$

$= \dfrac{6-6i}{3^2+3^2}$

$= \dfrac{6}{18}-\dfrac{6}{18}i$

$= \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i.$

**2.** $|z_A| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{2\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

Notons $\theta_A$ un argument de $z_A$.

$\cos\theta_A = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\theta_A.$

Donc $\theta_A = \dfrac{\pi}{4}.$

$z_A = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$

$|z_B| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{3}.$

Notons $\theta_B$ un argument de $z_B$.

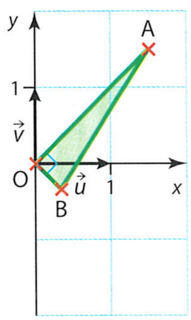
$\cos\theta_B = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta_B = \dfrac{-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\theta_B = -\dfrac{\pi}{4}.$

$z_B = \dfrac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

**3. a.**




**b.** $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) = \left(\overrightarrow{OB},\vec{u}\right)+\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)-\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)$

$= \arg(z_A)-\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

Donc le triangle OAB est rectangle en O.

**4. a.** $z_{C'} = \dfrac{1}{e^{-i\frac{\pi}{8}}} = e^{i\frac{\pi}{8}}.$

**b.** $e^{i\frac{\pi}{4}}\times z_C = e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{8}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{\pi}{8}} = z_{C'}.$

Donc C′ est bien l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

**5.** $t_{\vec{w}} : D \mapsto A$

donc $z_A = z_D + z_{\vec{w}}$.

On a alors : $z_{\vec{w}} = z_A - z_D$

$= \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}i$

$= \dfrac{11}{6}+\dfrac{11}{6}i.$

L'affixe du vecteur de translation est $\dfrac{11}{6}+\dfrac{11}{6}i$.

**104** **1.** $iz+\sqrt{3}-3i = 0$

d'où $iz = -\sqrt{3}+3i$

soit $z = \dfrac{-\sqrt{3}+3i}{i} = \dfrac{\left(-\sqrt{3}+3i\right)(-i)}{i(-i)} = 3+i\sqrt{3}.$

**2. a.** $|a| = \sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\theta$ un argument de $a$.

$\cos\theta = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}.$

Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}.$

$a = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}.$

**b.** $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 1+i\sqrt{3}.$

**c.**