Dossier Bac

www.education.gouv.fr, 2020

LES MATHS, UN ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ EN 1^{RE} ET EN T^{LE}

LES ENSEIGNEMENTS DE TRONC COMMUN	LES ENSEIGNEMENTS DE SPÉCIALITÉ (4 h en 1^{re}, 6 h en T^{le}) 3 à choisir en 1^{re}, 2 sont conservés en T^{le}
• Éducation physique et sportive • Enseignement moral et civique • Enseignement scientifique • Histoire-Géographie - 3 h par semaine • Langue vivante A et Langue vivante B • Français en 1^{re} • Philosophie en T^{le}	• Arts • Histoire-géographie, géopolitique et sciences politiques • Humanités, littérature et philosophie • Langues, littératures et cultures étrangères • Littérature et langues et cultures de l'Antiquité • Mathématiques • Numérique et sciences informatiques • Physique-Chimie • Sciences de la vie et de la Terre • Sciences de l'ingénieur • Sciences économiques et sociales

Les épreuves communes de contrôle contenu (E3C)

- Elles concernent les disciplines non évaluées lors des épreuves finales et la discipline de spécialité non poursuivie en T^{le}.
- Pour garantir l'égalité entre tous, les copies sont anonymes et corrigées par d'autres professeurs que ceux des élèves.
- Les sujets sont issus d'une banque nationale numérique.

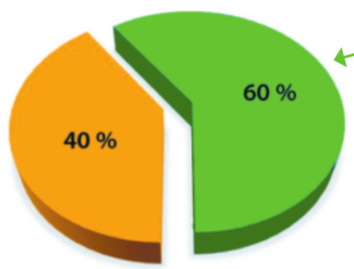
L'évaluation de la spécialité Mathématiques au Bac

Les maths seront évaluées :

- dans le cadre du contrôle continu en 1^{re} si l'enseignement n'est pas poursuivi en T^{le} ;
- en épreuve terminale si elle fait partie des deux spécialités conservées.

Le contrôle continu

- **10 % de la note finale**
  Bulletins scolaires de 1^{re} et T^{le}
- **30 % de la note finale des épreuves communes**
  • 2 sessions d'E3C en 1^{re}
  • 1 session d'E3C en T^{le}



Les **épreuves terminales**

- **1 épreuve anticipée en 1^{re}**
  Français (écrit et oral)
  (coefficient 5 et 5)
- **4 épreuves terminales**
  • 2 sur les 2 enseignements de spécialité choisis (écrit) (coefficient 16 chacun)
  • Philosophie (écrit) (coefficient 8)
  • Grand Oral (coefficient 10)

Le Grand Oral

D'après le BO du 12 février 2020

PRÉSENTATION DE L'ÉPREUVE

Une des 5 épreuves terminales

Coefficient 10 • 20 pts • 20 min (+ 20 min de préparation)

Les objectifs de l'épreuve

✓ Prendre **la parole en public sans note.**

✓ **Argumenter** en utilisant les savoirs acquis dans les enseignements de spécialité.

✓ Montrer comment vos savoirs éclairent votre **projet de poursuite d'études**, et éventuellement votre projet professionnel.

Le déroulement en 3 temps

1 **Présentation d'une question** (debout, sans notes, 5 mn)

→ Vous présentez au jury les 2 questions préparées à l'avance, éventuellement avec d'autres élèves. Ces questions portant sur l'un de vos enseignements de spécialité ou les deux même temps.

→ Le jury choisit une des 2 questions.

20 minutes pour vous préparer !	Mettez en ordres vos idées. Réalisez, si vous le souhaitez, un support à donner au jury : plan, schémas, données importantes… *La feuille est fournie. Le support ne fait pas l'objet d'une évaluation.*

→ Vous expliquez au jury pourquoi vous avez choisi cette question.

→ Vous présentez votre réponse à la question.

2 **Questions du jury** (debout ou assis selon votre choix, 10 mn)

→ Vous répondez aux questions du jury.

→ Le jury vous amène à préciser ou approfondir votre pensée. Il peut vous interroger sur le programme des enseignements de spécialité.

3 **Échange sur le projet d'orientation** (debout ou assis selon votre choix, 5 mn)

→ Vous expliquez en quoi la question traitée est utile pour votre projet de poursuite d'études, et même pour votre projet professionnel.

→ Vous présentez ce qui vous a permis d'avancer dans votre projet (rencontres, engagements, stages, mobilité internationale, intérêt pour les enseignements communs, choix des spécialités, etc.) et ce que vous en ferez après le bac.

Un jury de 2 professeurs

✓ 1 professeur de l'un des deux enseignements de spécialité.

✓ 1 professeur de l'autre enseignement de spécialité OU de l'un des enseignements du tronc commun OU le professeur-documentaliste.

L'évaluation

✓ Solidité des connaissances.

✓ Capacité à argumenter, à faire preuve d'esprit critique.

✓ Précision et clarté de l'expression.

✓ Force de conviction et engagement.

BIEN RESPIRER, MAÎTRISER SA VOIX ET GÉRER SON STRESS

Tutoriels

VIDÉO
1. Maîtriser sa voix
lienmini.fr/maths-s00-01

VIDÉO
2. La respiration costale
lienmini.fr/maths-s00-02

VIDÉO
3. La résonance
lienmini.fr/maths-s00-03

VIDÉO
4. La lecture à voix haute
lienmini.fr/maths-s00-04

VIDÉO
5. La respiration complète
lienmini.fr/maths-s00-05

VIDÉO
6. L'élocution et l'articulation
lienmini.fr/maths-s00-06

VIDÉO
7. La relaxation
lienmini.fr/maths-s00-07

Exercices

VIDÉO
8. La lecture
lienmini.fr/maths-s00-08

VIDÉO
9. Le journal télévisé
lienmini.fr/maths-s00-09

VIDÉO
10. L'interview
lienmini.fr/maths-s00-10

Conclusion

VIDÉO
11. Résumé des 10 tutoriels
lienmini.fr/maths-s00-11

Présentation de l'épreuve écrite de Terminale

L'épreuve de l'enseignement de spécialité de Mathématiques de la classe de terminale comporte de trois à cinq exercices indépendants les uns des autres, qui permettent d'évaluer les connaissances et compétences des candidat(e)s.

Le sujet précise si l'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve de 4 heures est notée sur 20 points. Chaque exercice est noté sur 4 à 8 points.

La note finale est composée de la somme des points obtenus à chaque exercice.

Exercice commenté

60 min — 5 POINTS

Énoncé

A ▶ On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(e^x + x) - x.$$

1. a) Montrer que $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter cette limite en termes d'asymptote.

2. a) Montrer que $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation complet de f.

B ▶ On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

1. Justifier que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) Que peut-on en déduire pour les variations de la suite (u_n) ?

b) Justifier que (u_n) est convergente.

3. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $-e^{2x} + e^x + x = 0$.

b) Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0\,;0{,}5]$. *Dans cette question, le ou la candidate est invitée à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il ou elle aura développée.*

c) À quoi correspond α pour la suite (u_n) ?

Solution

A ▶ **1. a)** Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = \ln(e^x + x) - x$

$= \ln(e^x + x) - \ln(e^x)$. **1**

$= \ln\left(\dfrac{e^x + x}{e^x}\right)$ **2**

$= \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x} + \dfrac{x}{e^x}\right)$

$= \ln\left(1 + \dfrac{x}{e^x}\right)$

b) **3** $\dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}$ **4** et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ d'après le cours (croissance comparée) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par quotient puis $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{x}{e^x} = 1$ **5**

Conseils pour répondre aux questions

1 On observe que l'expression à obtenir est de la forme $\ln(X)$ donc on essaie de faire apparaître ln.

2 On applique les propriétés algébriques de ln.

3 C'est la question **1. b** donc on peut penser que l'on va utiliser la forme de $f(x)$ obtenue à la question **1. a**.

4 La limite de $\dfrac{x}{e^x}$ en $+\infty$ ne relève pas du cours mais la limite de son inverse $\dfrac{e^x}{x}$ en $+\infty$ si donc on fait apparaître $\dfrac{e^x}{x}$.

5 On a une expression de la forme $\ln(X)$ avec $X = 1 + \dfrac{x}{e^x}$ donc on commence à regarder la limite de $1 + \dfrac{x}{e^x}$ en $+\infty$.

Solution

De plus, $\lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ (par continuité de ln en 1) donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right) = 0$ **6** c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

La courbe de la fonction f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

2. a) **7** $x \mapsto \ln(e^x + x)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = e^x + x$ et $u'(x) = e^x + 1$ donc f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x} - 1 = \frac{e^x+1}{e^x+x} - \frac{e^x+x}{e^x+x} = \frac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x} = \frac{1-x}{e^x+x}.$$

Comme $e^x + x > 0$ sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$. **8**

b) **9** Le tableau de variations complet de f est le suivant.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln(e+1)-1$	$\searrow$	$+\infty$

Avec $f(1) = \ln(e^1 + 1) - 1 = \ln(e + 1) - 1$ et $f(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 = \ln(1) = 0$ **10**

B ▶ 1. **11** • On considère la proposition $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$ » dont on veut montrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = f(u_0) = f(0{,}5) \approx 0{,}26$ d'après la calculatrice donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 0{,}5$.
$P(0)$ est donc vérifiée.

• **Hérédité :** Supposons $P(n)$ vraie à un rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$.
La fonction f étant croissante sur $[0\,;1]$, on a $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(0{,}5)$ **12** avec $f(0) = 0$ et $f(0{,}5) \approx 0{,}26$ donc on a $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}5$ **13** c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vérifiée.

• **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 0{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a) $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est décroissante.

b) (u_n) est décroissante et minorée par 0 d'après **B 1.** donc elle est convergente.

3. a) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) - x = x \Leftrightarrow \ln(e^x + x) = 2x$
$\Leftrightarrow e^x + x = e^{2x} \Leftrightarrow -e^{2x} + e^x + x = 0$.

b) **14** On considère la fonction g définie sur $[0\,;0{,}5]$ par $g(x) = -e^{2x} + e^x + x$.
La fonction g est dérivable et $g'(x) = -2e^{2x} + e^x + 1 = -2(e^x)^2 + e^x + 1$ **15**
On pose $X = e^x$ et on étudie le signe de $-2e^{2x} + e^x + 1 = -2X^2 + X + 1$ de discriminant $\Delta = 9 > 0$ donc de racines réelles $\dfrac{-1-3}{-4} = 1$ et $\dfrac{-1+3}{-4} = -0{,}5$.

On a $g'(x) = -2X^2 + X + 1 > 0 \Leftrightarrow -0{,}5 < X < 1$ car $-2 < 0$ **16**
donc $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}5 < e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. **17**
Ainsi, $g(x) < 0$ sur $[0\,;0{,}5[$ sauf en 0 où elle s'annule donc g est strictement décroissante sur $[0\,;0{,}5]$.
De plus, $g(0) = 0$ et $g(0{,}5) \approx -0{,}57$ donc, sur $[0\,;0{,}5]$:

• g est continue,
• g est strictement décroissante,
• $0 \in [g(0{,}5)\,;g(0)]$.

donc $g(x) = 0$ admet une unique solution qui est 0.
Comme $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, la seule solution de $f(x) = x$ sur $[0\,;0{,}5]$ est $\alpha = 0$. **18**

c) **19** On sait que (u_n) est convergente vers une valeur ℓ de $[0\,;0{,}5]$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est continue en ℓ (car f est continue sur $[0\,;0{,}5]$ et $\ell \in [0\,;0{,}5]$) donc ℓ est solution de $f(x) = x$ dans $[0\,;0{,}5]$ donc $\ell = 0$: $\alpha = 0$ est la limite de la suite (u_n).

Conseils pour répondre aux questions

6 Utiliser la composition de limites.

7 On dispose de deux formes pour $f(x)$: on utilise la plus simple pour dériver et pas forcément la dernière obtenue ! Ici, a priori, c'est celle de départ (la forme $\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$ n'est utile que pour le calcul de limite précédent).

8 Le signe du dénominateur est strictement positif.

9 **Astuce** : même si l'on n'a pas réussi à faire la question précédente, on en utilise le résultat.

10 La fonction est définie en 0 donc on regarde $f(0)$ et non pas la limite de $f(x)$ en 0.

11 Pour montrer des inégalités sur une suite définie par récurrence, on pense à un raisonnement par récurrence.

12 Comme l'étude de la fonction f a été faite et que l'on sait qu'elle est croissante, on peut directement appliquer f aux différents membres des inégalités.

13 $f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout n donc $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

14 L'énoncé laisse entendre que la question est ouverte, il va donc y avoir du travail non guidé. Ici, le fait qu'il n'y ait qu'une seule solution laisse penser que l'on va utiliser le théorème de bijection sur la fonction $x \mapsto -e^{2x} + e^x + x$ d'après la question **3. a**.

15 En posant, $X = e^x$, on fera apparaître une expression du second degré.

16 Signe de a sauf entre les racines.

17 $-0{,}5 < e^x$ est toujours vraie donc on ne s'intéresse qu'à $e^x < 1$

18 Ici, on aurait aussi pu dire que $g(0) = 0$ et que g est strictement décroissante donc $g(x) < g(0) = 0$ pour $x \in]0\,;0{,}5]$ puis conclure.

19 On fait le lien entre les questions : on a parlé de la convergence de la suite et de l'équation $f(x) = x$. Le lien entre les deux est que la limite ℓ est une solution de $f(x) = x$.

Sujet type A

Exercice 1 Suite arithmético-géométrique et limite

Algo — 60 min — 5 POINTS

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1er juillet de l'année (2020+n).

Au 1er juillet 2020, le loueur possédait 150 vélos, ainsi $u_0 = 150$.

1. **a)** Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1er juillet 2021.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$.

2. On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	rang n	Terme u_n
2	0	150
3	1	155
4	2	159
5	3	162,2

a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour obtenir, par copie vers le bas, les termes successifs de la suite (u_n) ?

b) Pour les termes de rang 36, 37, 38, 39 et 40, on obtient les résultats suivants (arrondis au millième).

38	36	174,992
39	*37*	174,994
40	38	174,995
41	39	174,996
42	40	174,997

Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente. Pour cela, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 175$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -25 \times 0,8^n + 175$.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que la suite (u_n) est croissante.

5. On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 170$.

a) Compléter le programme en **Python** ci-dessous pour qu'il affiche la valeur n cherchée.

```
n=...
u=...
while...:
    n=...
    u=...
print(...)
```

b) Déterminer la valeur de cet entier et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5 POINTS

Exercice 2 Variable aléatoire

60 min

Rayane et Gabriel ont commandé chacun sur Internet un lot de bonbons surprises sur deux sites différents.

Sur le site A, quand on choisit un bonbon surprise, il peut être indépendamment bleu ou rouge et la probabilité qu'il soit rouge est 0,2 (d'après les informations du site). Rayane a commandé 200 bonbons surprises sur le site A.

Sur le site B, quand on choisit un bonbon surprise, il peut être indépendamment vert ou rouge et la probabilité qu'il soit vert est 0,75 (d'après les informations du site). Gabriel a commandé 300 bonbons surprises sur le site B.

R est la variable aléatoire donnant le nombre de bonbons rouges obtenus par Rayane et G est la variable aléatoire donnant le nombre de bonbons rouges obtenus par Gabriel.

1. a) Donner en justifiant la loi suivie par R.

b) Calculer $p(R = 35)$ à 0,001 près.

c) Calculer la probabilité que Rayane obtienne entre 40 et 50 bonbons rouges (inclus) lors de la réception de sa commande.

d) Calculer $E(R)$.

2. a) Donner la loi de G sans justifier.

b) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à G dans l'hypothèse où les probabilités données par le site B sont correctes.

c) Lors de la réception de sa commande, Gabriel a trouvé 63 bonbons rouges. Cela remet-il en cause l'affirmation du site B ?

3. On considère la variable aléatoire S définie par $S = R + G$.

a) Que représente concrètement S ?

b) Calculer $E(S)$.

c) On suppose que les commandes sont indépendantes. Calculer $V(S)$ puis $\sigma(S)$.

5 POINTS

Exercice 3 Géométrie dans l'espace

60 min

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.

On considère les points B(10 ; –8 ; 2), C(–1 ; –8 ; 5) et D(14 ; 4 ; 8).

1. a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

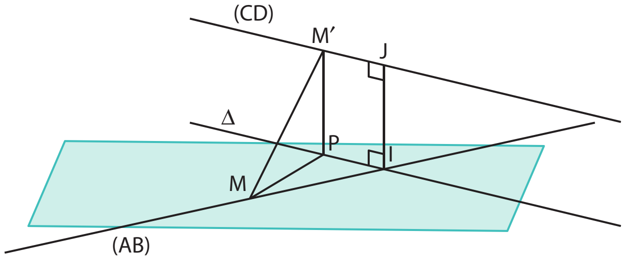
b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD). La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

3. Cette question a pour but de vérifier que la distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD). Sur le schéma ci-dessous on a représenté les droites (AB) et (CD), les points I et J, et la droite Δ parallèle à la droite (CD) passant par I. On considère un point M de la droite (AB) distinct du point I. On considère un point M′ de la droite (CD) distinct du point J.



a) Justifier que la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M′ coupe Δ en un point P.

b) Démontrer que le triangle MPM′ est rectangle en P.

c) Justifier que MM′ > IJ et conclure.

5 POINTS

60 min

Exercice 4 Équation différentielle en sciences physiques

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.

La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation.

On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre.

Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E et P_S et L est donnée par :

$$P_S = P_E \times e^{-aL}$$

Où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.

Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents.

Dans tout l'exercice :
- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

A ▶ Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atténuation linéaire $a = 0{,}046$. Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

B ▶ La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x est la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

2. a) Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 7e^{-0{,}035x}.$$

b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.

3. a) Étudier le sens de variation de la fonction g.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

b) Déterminer la longueur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

D'après Bac STI2D/STL Métropole – Juin 2015

80 min — 7 POINTS

Exercice 1 Équation différentielle et économie

A ▶ Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}5x + \mathrm{e}^{-0{,}5x+0{,}4}.$$

1. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et vérifier que f admet un minimum en 0,8.

B ▶ Application économique

Une entreprise fabrique des objets.

On note $g(x)$ le coût total de fabrication, en milliers d'euros, de x centaines d'objets. On suppose que cette fonction g est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 0{,}5 + 0{,}25x - 0{,}5y$.

1. Montrer que la fonction linéaire $h(x) = 0{,}5x$ est solution particulière de (E).

2. a) Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de l'équation (E') :

$$y' = -0{,}5y.$$

b) En déduire les solutions de (E).

c) Montrer que la fonction f de la partie **A** est une de ces solutions. Préciser quelle est la condition initiale (pour $x = 0$) qui la caractérise.

C ▶ Dans cette partie on reprend la fonction $f(x) = 0{,}5x + \mathrm{e}^{-0{,}5x+0{,}4}$ comme coût de fabrication, en milliers d'euros, de x centaines d'objets. Chaque objet fabriqué est vendu 6 euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût total de fabrication soit minimum ?

2. Justifier que le résultat (recette moins coûts), en milliers d'euros, obtenu par la vente de x centaines d'objet est :

$$R(x) = 0{,}1x - \mathrm{e}^{-0{,}5x+0{,}4}.$$

a) Étudier les variations de R sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $R(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

c) En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise un bénéfice sur la vente des objets.

D'après Bac ES Nouvelle – Calédonie-mars 2009

4 POINTS — 50 min

Exercice 2 Suites et probabilités

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

• si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;

• si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;

• la probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et non nul, on note G_n l'événement « la n-ième partie est gagnée », et p_n la probabilité de G_n. Donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n.

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

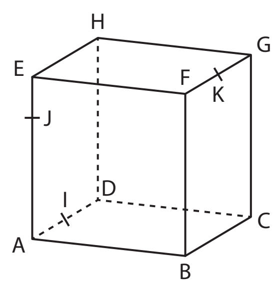
b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c) La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

5 POINTS — 60 min

Exercice 3 Problème de géometrie repérée

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH. Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes : • I est le milieu du segment [AD] ; • J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$; • K est le milieu du segment [FG].



A ▶ 1. Reproduire la figure et construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

B ▶ On se place désormais dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\vec{n}$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$, avec $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\a\\b\end{pmatrix}$.

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

2. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

3. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

C ▶ On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que : la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$.

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

50 min — **4 POINTS**

Exercice 4 Probabilités

QCM Pour chacune des questions suivantes, choisir la (les) bonnes(s) réponse(s).

On appelle *X* la variable aléatoire donnant le nombre de boules roses obtenues lorsque l'on tire 200 fois au hasard et avec remise dans une urne contenant 10 boules roses, 5 boules noires, 20 cubes roses et 15 cubes noirs.

1. X suit une loi :

- a binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}25$.
- b binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}2$.
- c binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}2$.
- d binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}25$.

2. $p(X = 36)$ est égal à :

- a 0,272 à 10^{-3} près
- b 0,057 à 10^{-3} près
- c 0,728 à 10^{-3} près
- d $p(X \leqslant 36) - p(X \leqslant 35)$

3. $p(X < 40)$ est égal à :

- a 0,542 à 10^{-3} près
- b 0,472 à 10^{-3} près
- c 0,07 à 10^{-3} près
- d 0,528 à 10^{-3} près

4. On considère une fonction **Python** telle que `parmi(k,n)` renvoie $\binom{n}{k}$ pour tout entier naturel n et tout entier naturel k entre 0 et n. On obtient $p(X = 50)$ avec :

- a `parmi(50,200)*(0.2**50)*(0.8**150)`
- b `parmi(200,50)*(0.2**50)*(0.8**150)`
- c `parmi(50,200)*(0.8**50)*(0.2**150)`
- d `parmi(200,50)*(0.8**50)*(0.2**150)`

On tire successivement quatre fois avec remise dans cette urne et, à chaque tirage, on note la couleur de l'objet obtenu.

5. L'univers associé à cette expérience aléatoire est :

- a {rose ; noir}.
- b {rose ; noir } × {rose ; noir} × {rose ; noir} × {rose ; noir}.
- c $\{\text{rose ; noir}\}^4$.
- b $\{\text{cube rose ; cube noir ; boule rose ; boule noire}\}^4$.

6. La probabilité d'obtenir l'issue (rose ; rose ; noir ; rose) est :

a 0,086 4   b $0{,}6^3 \times 0{,}4$ c 0,062 5   d 0,25

7. Alexis lance 40 dés équilibrés à 8 faces numérotées de 1 à 8. Il fait la somme des résultats des dés. Quel résultat moyen peut-il envisager sur un grand nombre de lancers de ces 40 dés ?

a 180   b 4,5

c 0,2   d 320

8. On considère un échantillon de 400 variables aléatoires $(X_1 ; X_2 ; ... ; X_{400})$ d'espérance égale à 5 et d'écart-type 0,2. Alors on peut dire que la variable aléatoire moyenne M_{400} de ces 400 variables aléatoires a :

- a pour espérance 2 000.
- b pour espérance 0,012 5.
- c pour variance 1×10^{-4}.
- d pour variance 0,04.

Sujet type C

60 min — 6 POINTS

Exercice 1 Équations différentielles

QCM Pour chacune des questions suivantes, choisir la (les) bonnes(s) réponse(s).

1. On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a $f(x) = 2e^{-3x}$

b $f(x) = e^{3x} + \frac{2}{3}$

c $f(x) = e^{\frac{2}{3}x}$

d $f(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(\frac{4}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$. La fonction f est une solution de l'équation différentielle :

a $y'' + y = 0$

b $16y'' - 9y = 0$

c $9y'' + 16y = 0$

d $9y'' - 16y = 0$

3. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$. Sa courbe représentative admet pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation :

a $y = -4x + 1$

b $y = -x + 1$

c $y = 4x + 1$

d $y = 4x - 3$

D'après Bac STI2D Polynésie juin 2014- Antilles-Guyane 2014

50 min — 4 POINTS

Exercice 2 Problème ouvert en probabilités

Un casino vient de recevoir une nouvelle roulette constituée de 18 cases rouges, 18 cases noires et 1 case verte. Afin de la tester, la responsable du casino lance 100 fois de suite une bille dans cette roulette et tombe 55 fois sur une case noire.

Que peut-on penser de la fiabilité de cette roulette ? Plusieurs réponses sont possibles mais dans tous les cas, elles doivent être justifiées par un raisonnement mathématique structuré.

Exercice 3 Géométrie et modélisation

80 min — 6 POINTS

Deux espèces de tortues endémiques d'une petite île de l'océan pacifique, les tortues vertes et les tortues imbriquées, se retrouvent lors de différents épisodes reproducteurs sur deux des plages de l'île pour pondre.

Cette île est le point de convergence de nombreuses tortues. Des spécialistes ont décidé d'en profiter pour recueillir différentes données sur celles-ci.

Ils ont dans un premier temps constaté que les couloirs empruntés dans l'océan par chacune des deux espèces pour arriver sur l'île pouvaient être assimilés à des trajectoires rectilignes.

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 100 mètres.

Le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ représente le niveau de l'eau et on admet qu'un point $M(x\,;y\,;z)$ avec $z<0$ se situe dans l'océan. La modélisation des spécialistes établit que :

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues vertes a pour support la droite D_1 dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=3+t \\ y=6t \\ z=-3t \end{cases}$ avec t réel ;

• la trajectoire empruntée dans l'océan par les tortues imbriquées a pour support la droite D_2 dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=10k \\ y=2+6k \\ z=-4k \end{cases}$ avec k réel.

1. Démontrer que les deux espèces ne sont jamais amenées à se croiser avant d'arriver sur l'île.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}$ est normal aux droites D_1 et D_2.

b) On admet que la distance minimale entre les droites D_1 et D_2 est la distance HH′ où $\overrightarrow{HH'}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ avec H appartenant à la droite D_1 et H′ appartenant à la droite D_2.

Déterminer une valeur arrondie en mètre de cette distance minimale.

On pourra utiliser les résultats ci-après fournis par un logiciel de calcul formel.

```
◁ Calcul formel 1
Résoudre ({10*k-3-t = 3*m,2+6*k-6*t = 13*m,-4*k+3*t = 27*m}, {k,m,t})
→ {{k = 675/1814, m = 17/907, t = 603/907}}
```

3. Les scientifiques décident d'installer une balise en mer.

Elle est repérée par le point B de coordonnées (2 ; 4 ; 0).

a) Soit M un point de la droite D_1.
Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

b) En déduire la distance minimale, arrondie au mètre, entre la balise et les tortues vertes.

Exercice 4 Suite et limite

Algo — 50 min — 4 POINTS

A ▶ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;1]$.

4. On considère l'algorithme suivant.

Variables	`N et A des entiers naturels;`
Entrée	`Saisir la valeur de A`

Traitement	`N prend la valeur 0`
	`Tant que` $N - \ln(N^2+1) < A$
	`N prend la valeur N + 1`
	`Fin Tant que`

Sortie	`Afficher N`

a) Que fait cet algorithme ?

b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

B ▶ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;1]$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

D'après Bac Métropole juin 2016

TICE 60 min 5 POINTS

Exercice 1 Suite récurrente d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

Nous voulons étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

A ▶ On souhaite calculer la valeur des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.

On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

1. Quelle formule faut-il saisir dans la cellule B4, pour obtenir par recopie vers le bas, les valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B ?

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On arrondira à 10^{-3} près.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

B ▶ Soit (v_n) et (w_n) les suites définies pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ et $w_n = u_n - 7$.

1. a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après Bac S 2017

30 min 3 POINTS

Exercice 2 Succession d'épreuves, loi binomiale

Alma apprend à lire. Quand elle rencontre un mot, soit elle le lit correctement avec une probabilité 0,8, soit elle ne le lit pas correctement avec une probabilité 0,15, soit elle ne le lit pas du tout avec une probabilité 0,05.

On considère l'expérience aléatoire consistant pour Alma à lire un mot. Les issues sont C pour un mot lu correctement, P pour un mot pas lu correctement et N pour un mot pas lu du tout.

On répète 5 fois indépendamment cette expérience.

1. Donner l'univers associé à cette succession indépendante de 5 épreuves identiques.

2. Déterminer la probabilité qu'Alma ne lise pas correctement le premier mot puis lise correctement les 3 suivants puis ne lise pas du tout le dernier.

Exercice 3 Géométrie

40 min — 3 POINTS

QCM Pour chacune des questions suivantes, choisir la (les) bonnes(s) réponse(s).

A ▶ PQRS est un tétraèdre régulier d'arête a. On appelle I, J, K, L et M les milieux respectifs des arêtes [PQ], [PR], [PS], [QR] et [RS].

1. $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS} =$ **a** $\dfrac{a^2}{2}$ **b** $-\dfrac{a^2}{2}$ **c** 0 **d** a^2

2. $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{LS} =$ **a** $\dfrac{a^2}{2}$ **b** $-\dfrac{a^2}{2}$ **c** 0 **d** a^2

B ▶ Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -2+k \\ y = 1+2k \\ z = -5+5k \end{cases}$ avec k réel.

1. Un vecteur directeur de la droite est : **a** $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

2. La droite est incluse dans le plan :

a $x+y+z=0$ **b** $x+2y+5z=0$ **c** $x+2y-z-5=0$ **d** $-2x+y-5z+1=0$

C ▶ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$. On considère la droite d passant par le point A(0 ; 0 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{j}$. Un point quelconque M de l'espace a pour coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

1. Le projeté orthogonal de M sur la droite d a pour coordonnées :

a $(x\,;0\,;1)$ **b** $(0\,;y\,;1)$ **c** $(x\,;0\,;-1)$ **d** $(0\,;y\,;z)$

2. La distance du point M à la droite d est donnée par :

a $\sqrt{x^2+(z+1)^2}$ **b** $\sqrt{y^2+(z+1)^2}$ **c** $\sqrt{x^2+(z-1)^2}$ **d** $\sqrt{y^2+(z-1)^2}$

Exercice 4 Logarithme et géométrie

60 min — 5 POINTS

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; 1] par $f(x) = x(1-\ln(x))^2$.

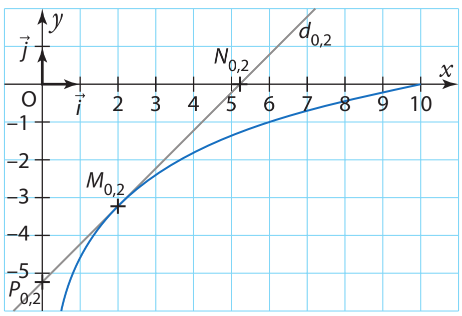
a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in$]0 ; 1] :

$$f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1).$$

b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle]0 ; 1] (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle]0 ; 1] par $g(x) = \ln(x)$. Soit a un réel de l'intervalle]0 ; 1]. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle]0 ; 1].



2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.

a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle]0 ; 1], l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1-\ln(a))^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

D'après Bac Liban mai 2019

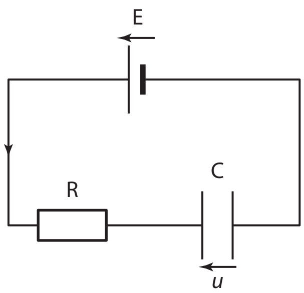
4 POINTS

50 min

Exercice 5 Équations différentielles, résistance et condensateur

On étudie la charge d'un condensateur et l'on dispose pour cela du circuit électrique composé de :

- une source de tension continue E de 10 V ;
- une résistance R de $10^5\ \Omega$;
- un condensateur de capacité C de 10^{-6} F.



On note u la tension exprimée en volts aux bornes du condensateur. Cette tension u est une fonction du temps t exprimé en secondes. La fonction u est définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$; elle vérifie l'équation différentielle suivante : $RCu' + u = E$ où u' est la fonction dérivée de u.

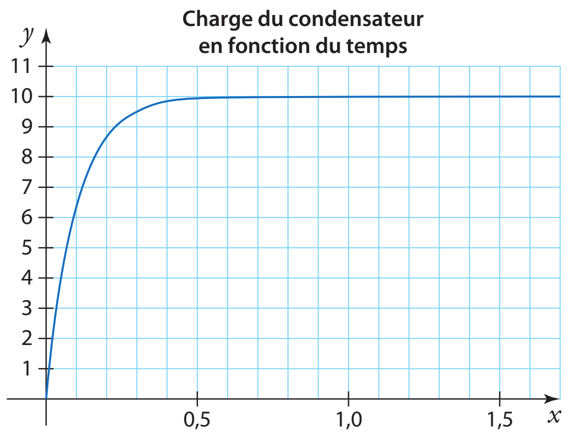
1. Justifier que l'équation différentielle est équivalente à : $u' + 10u = 100$

2. a) Déterminer la forme générale $u(t)$ des solutions de cette équation différentielle.

b) On considère qu'à l'instant $t = 0$, le condensateur est déchargé. Parmi les solutions, déterminer l'unique fonction u telle que $u(0) = 0$.

c) Déterminer en justifiant la réponse, la limite en $+\infty$ de la fonction u ainsi obtenue. En donner une interprétation.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction u qui vient d'être obtenue à la question **2. b)** avec les unités suivantes : 1 unité pour 1 seconde sur l'axe des abscisses et 1 unité pour 1 volt sur l'axe des ordonnées. On appelle T le temps de charge en seconde pour que $u(T)$ soit égal à 95 % de E.



a) Déterminer graphiquement le temps de charge T.

b) Retrouver, par le calcul, le résultat précédent.

4. Sans modifier les valeurs respectives de E et de C, déterminer la valeur de R afin que le temps de charge T soit multiplié par 2.

D'après Bac STI 2D/STL -Antilles-Guyane- Juin 2015

Sujet type E

Exercice 1 Suite

60 min — 5 POINTS

1. Déterminer la limite des suites suivantes définies par :

a) $u_n = n^2 - \dfrac{1}{n}$

b) $v_n = (n + \sqrt{n})\left(\dfrac{1}{n} - 3\right)$

c) $w_n = n^2 - n^3$

d) $a_n = \dfrac{n+3}{2n+4}$

2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + 2}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $b_n \geqslant \sqrt{n}$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n).

c) Calculer les cinq premiers termes de la suite (b_n) et conjecturer l'expression de b_n en fonction de n.

d) Démontrer la conjecture de la question **c)**.

Exercice 2 Loi binomiale et variable aléatoire

Algo — 60 min — 5 POINTS

Une urne contient 20 tickets numérotés de 1 à 20. On tire au hasard un ticket et :

- si on obtient un nombre supérieur à 18, on gagne 10 euros ;
- si on obtient un nombre compris entre 14 et 18 inclus, on gagne 2 euros ;
- dans les autres cas on perd 2,50 euros.

1. X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.

a) Donner la loi de X.

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule ce jeu.

```
def jeu():
    a=random.random()
    if a<0.1:
        r=10
    if a>0.1 and a<...:
        r=...
    if...
        r=...
return r
```

3. Lorsqu'elle joue, Léonie fait n parties de ce jeu.

On note X_i la variable aléatoire donnant le gain algébrique de sa i-ième partie (i entre 1 et n).

a) À quoi correspond concrètement la variable aléatoire S définie par $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$?

b) Exprimer $E(S)$ en fonction de n.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de n Léonie perd-elle en moyenne plus de 10 euros lorsqu'elle joue un grand nombre de fois ces n parties ?

4. Oscar, l'organisateur du jeu, décide de multiplier les gains algébriques par 3.

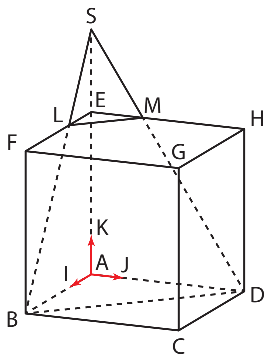
On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un joueur du nouveau jeu.

2 000 personnes jouent à son jeu. Que pouvez-vous dire à Oscar concernant ses gains ?

5 POINTS

60 min

Exercice 3 Géométrie repérée



Une artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête. Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-contre.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$ tel que :

$I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que : $\vec{FL} = \frac{2}{3}\vec{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2 ; 0 ; 6)$.

3. a) Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).

b) Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0 ; 0 ; 9)$.

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\vec{n}$ est normal au plan (BDL).

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est : $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

c) On admet que la droite (E H) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

Calculer les coordonnées du point M.

5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$V = \frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ Hauteur.

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.

Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Algo

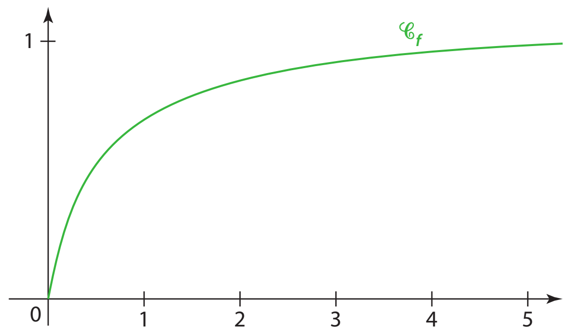
60 min

5 POINTS

Exercice 4 Logarithme et suite

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+1}\right)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



A ▶ 1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

B ▶ Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

C ▶ On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell)=\ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.

On introduit ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ où $x_0=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}\approx 0{,}215$ et $g(x_0)\approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3} près.

x	0	x_0	$+\infty$
Variation de la fonction g	0 ↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

2. a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,001 près.

```
x ← 0,22
Tant que …faire
     x ← x+0,01
Fin de Tant que
```

b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

D'après Bac Nouvelle Calédonie novembre 2019

Dicomaths

Lexique

A

Algorithme
Une séquence finie d'instructions qui permet de résoudre un problème.

Asymptote horizontale p. 52

Asymptote verticale p. 54

Archimède (de Syracuse) (287-212 av. J.-C.)

Physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (Grande Grèce), ses travaux portent particulièrement sur la géométrie, la numération et la notion d'infini. Il détermine un encadrement de π en utilisant des polygones inscrits et exinscrits.

B

Base (espace) p. 284

Bénéfice
Différence entre la recette et les coûts

Bernoulli (Jacques) (1654-1705)

Mathématicien et physicien suisse. Dans son œuvre la plus originale, il définit la notion de probabilité et introduit les notations encore utilisées au XXIe siècle. Ses neveux Nicolas et Daniel poursuivent par la suite son œuvre.

Bernoulli (Jean) (1667-1748)

Mathématicien et physicien suisse, petit frère de Jacques. Il est l'un des premiers à étudier le calcul infinitésimal. Il donne une première définition de la notion de fonction d'une grandeur variable.

Bernoulli (épreuve, loi, schéma) p. 370

Bijection (Théorème) p. 116

Bienaymé (Irénée-Jules) (1796-1878)

Mathématicien français, spécialisé en probabilités et en statistiques, il perpétue les travaux de Laplace en généralisant la méthode des moindres carrés. Il énonce l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

Binomiale (loi) p. 372

Bornée (suite) p. 24

Briggs (Henri) (1556-1630)
Mathématicien anglais, il établit les premières tables de logarithmes décimaux, approfondissant ainsi l'invention de John Napier.

C

Consignes (vocabulaire des)

Associer Unir des éléments dans lesquels on voit des points communs.

Balayer Observer des tableaux de valeurs successifs en réduisant au fur et à mesure le pas pour avoir un encadrement de plus en plus précis de la valeur cherchée.

Calculer Fournir une valeur numérique à l'aide des règles de calculs.

Chercher Tester plusieurs possibilités à partir des informations données dans l'énoncé, essayer de faire le lien avec des propriétés connues, utiliser la calculatrice ou un logiciel.

Communiquer Expliquer un raisonnement à l'écrit ou à l'oral, expliquer une démarche même si celle-ci n'aboutit pas à l'aide de phrases, de formule, de schémas…

Comparer Comparer deux nombres signifie déterminer s'ils sont égaux ou lequel est plus grand que l'autre.

Conjecturer Émettre une supposition à partir d'observations.

Démontrer À partir des éléments connus, effectuer un raisonnement ou un calcul pour obtenir le résultat ou la propriété cherchée.

Développer Écrire un produit sous forme d'une somme équivalente.

Encadrer Encadrer un nombre c'est donner un couple de valeurs (a ; b) entre lesquelles on est sûr que ce nombre se trouve.
On écrit une double inégalité : $a \leqslant x \leqslant b$.

Expliquer Rendre compréhensible un raisonnement, une idée.

Interpréter Faire une phrase situant le résultat obtenu dans le contexte (souvent concret) de l'exercice.

Modéliser Décrire une situation concrète en utilisant les connaissances mathématiques, par exemple : écrire une équation ou une fonction permettant d'étudier la situation proposée.

Optimiser Résoudre un problème consistant à trouver le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.

Représenter Fournir une information sous forme graphique : figures codées en géométrie, courbe d'une fonction, arbre ou schéma en probabilités…

Résoudre Trouver toutes les solutions possibles.

Raisonner ↪ **Démontrer**

Simplifier (une fraction) Opération qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles.

Cauchy (Augustin Louis) (1789-1857)

Mathématicien français et professeur à l'École Polytechnique, il est connu pour son *Cours d'Analyse* où, entre autres, il définit de manière rigoureuse la convergence de séries et où il énonce (et démontre) le théorème des valeurs intermédiaires.

Cavalieri (Bonaventure) (1598-1647)

Mathématicien et astronome italien, il est connu notamment pour le principe de Cavalieri, précurseur du calcul intégral et pour la géométrie des indivisibles. Galilée, avec lequel il entretient une correspondance prolifique, dit de lui que « peu ou nul, depuis Archimède, a vu aussi profondément dans la science de la géométrie ».

Chasles (Michel) (1793-1880)

Mathématicien français, ses travaux portent surtout sur la géométrie projective et sur l'analyse harmonique. Une relation vectorielle porte son nom mais existait déjà avant lui.
Il est l'inventeur du terme « homothétie ».

Combinaison (éléments d'un ensemble) p. 342

Combinaison linéaire p. 280

Composée de fonction p. 140

Concavité (d'une fonction) p. 144

Continuité p. 112

Convergence d'une suite p. 24

Convexité (d'une fonction) p. 144

Coût

Somme dépensée pour créer et fabriquer un produit.

D

Dérivable (fonction)

Une fonction f est dérivable en un point a si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie.

Dénombrer

Action de compter

Delannoy (Henri Auguste) (1833-1915)

Mathématicien et historien , il s'intéresse de près aux travaux d'Edouard Lucas. Ses travaux portent, entre autres, sur la combinatoire, les probabilités discrètes et les carrés magiques.

Deparcieux (Antoine) (1703-1768)

Mathématicien français, il publie des traités concernant la trigonométrie et les probabilités.
Son *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, dans lequel on trouve les « tables de mortalité » est considéré comme l'œuvre fondatrice de la science dite actuarielle c'est-à-dire de l'application des mathématiques à la finance et aux assurances.

Dichotomie p. 116

Dioclès (240 – 180 av. J.-C.) p. 76

Mathématicien grec, une courbe porte son nom : la Cissoïde de Dioclès. Il serait le premier à mettre en évidence le foyer d'une parabole.

E

Ensemble p. 338

Equations différentielles p. 206

Euclide (vers 300 av. J.-C.)

Mathématicien grec, il démontre dans ses *Eléments* de nombreux résultats en géométrie ou en arithmétique, d'où les notions de géométrie euclidienne, de division euclidienne ou encore d'algorithme d'Euclide.

Euler (Leonhard) (1707-1783)

Mathématicien et physicien suisse. Il introduit une grande partie des notations des mathématiques modernes : fonctions trigonométriques, notation $f(x)$, lettre e pour le nombre d'Euler, lettre i pour l'unité imaginaire etc.

F

Factorielle p. 340

Fourier (Joseph) (1768-1830)

Mathématicien et physicien français, il utilise les fonctions trigonométriques afin de déterminer l'équation de la chaleur.
L'évolution de la température est modélisée par des séries trigonométriques dites séries de Fourier.

G

Galton (Francis) (1822-1911)

Statisticien anglais, ses travaux portent sur le concept de corrélation.

La planche de Galton est connue pour expliciter la convergence d'une loi binomiale par une loi normale.

Gibbs (Josiah Willard) (1839-1903)

Physicien et chimiste américain, ses travaux portent sur la thermodynamique. Il crée la mécanique statistique en collaboration avec Maxwell et Boltzmann ainsi que l'analyse vectorielle en collaboration avec Heaviside.

H

Hamilton (William Rowan) (1805-1865)

Mathématicien, physicien et astronome irlandais, il est à l'origine des quaternions.

Ses travaux portent autant sur la géométrie (optique, vectorielle) que sur l'algèbre (résolution d'équations polynomiales).

Heaviside (Oliver) (1850-1925)

Physicien anglais, il crée l'analyse vectorielle en collaboration avec Gibbs et simplifie les équations de Maxwell grâce à cet outil.

La fonction indicatrice des réels positifs s'appelle fonction de Heaviside.

Huygens (Christian) (1629-1695)

Mathématicien, physicien et astronome néerlandais. Après avoir entendu parler de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat, il publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard.

I

Impaire (fonction) p. 88

Une fonction f, définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0, est dite impaire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Intégrale d'une fonction positive p. 242

Intervalle de fluctuation p. 376

J

Johnson (Katherine) (1918-2020)

Physicienne, mathématicienne et ingénieure spatiale américaine, ses calculs de trajectoires ont contribué au bon déroulement de plusieurs programmes de la NASA.

K

Koenig (Johan Samuel) (1712-1757)

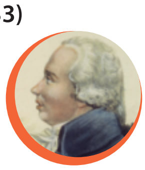
Mathématicien allemand, élève de Jean Bernoulli, il est également professeur de philosophie.
Son nom est associé au théorème probabiliste de König-Huygens.

L

Lagrange (Joseph-Louis) (1736-1813)

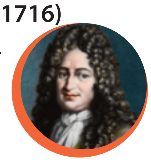
Mathématicien et astronome italien naturalisé français, il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. On lui doit la notation indicielle pour les suites numériques et il est à l'origine de la notation $f'(x)$.

Legendre (Adrien-Marie) (1752-1833)



Mathématicien français, ses travaux portent entre autres sur la théorie des nombres, les statistiques et les probabilités. Il introduit le symbole dit de Legendre au cours de ses recherches pour démontrer la loi de réciprocité quadratique.

Leibniz (Gottfried Wilhelm) (1646-1716)



Philosophe, mathématicien et diplomate allemand.
Il introduit le terme de fonction et invente le calcul infinitésimal.

Limite d'une fonction p. 52, 54

Limite d'une suite p. 18, 20

Lucas (Edouard) (1842-1891)

Mathématicien français, il est l'inventeur de nombreux jeux mathématiques comme par exemple les tours de Hanoï. De plus il étudie la suite de Fibonacci ainsi que la suite dite de Lucas. Il invente le test de primalité de Lucas-Lehmer que Lehmer optimise par la suite en 1927. À l'aide de ce test, il démontre en 1876 que le nombre de Mersenne M_{127} est premier.

M

Majorée (suite) p. 24

Malthus (Thomas Robert) (1766-1834)

Économiste anglais, il étudie la démographie et notamment le contrôle de la natalité. Il utilise les mathématiques pour montrer que l'évolution de la population augmente de manière exponentielle tandis que les ressources augmentent de manière arithmétique, ce qui conduirait à un déséquilibre.

Markov (Andreï) (1856-1922)

Mathématicien russe, il soutient sa thèse en théorie des nombres sur les formes quadratiques binaires avec déterminant positif. En théorie des probabilités, ses chaînes de Markov marquent le début du calcul stochastique.

Maxwell (James Clerk) (1831-1879)

Mathématicien et physicien écossais, ses travaux portent notamment sur l'électromagnétisme. On lui doit une méthode statistique décrivant la cinétique des gaz : la distribution de Maxwell. Il est également à l'origine de la première photographie en couleur.

Mendel (Gregor) (1822-1884)

Botaniste autrichien, il est reconnu comme étant le fondateur de la génétique. On lui doit les lois de Mendel qui constituent les principes de base de l'hérédité.

Minorée (suite) p. 24

Mouraille (Jean-Raymond) (1721-1808)

Auteur du Traité de la résolution des équations paru en 1768, il y étudie les conditions de convergence de la méthode de Newton et y souligne l'importance de la concavité de la fonction étudiée au sein de cette méthode.

N

Napier (John) ou Neper (Jean) (1550-1617)

Mathématicien, physicien et astronome écossais, il invente les logarithmes afin de simplifier les calculs utilisés en astronomie.

Newton (Isaac) (1642-1727)

Philosophe, mathématicien et physicien britannique. Il est l'un des fondateurs du calcul infinitésimal avec Leibniz et est à l'origine de la formule du binôme qui porte son nom.

P

Paire

Une fonction f, définie sur un ensemble de définition D symétrique par rapport à 0, est dite paire si, pour tout réel x de D, on a $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Partie d'un ensemble p. 338

Pascal (Blaise) (1623-1662)

Mathématicien, physicien et théologien français, il conçoit et fabrique une machine arithmétique : la *Pascaline*. Il entretient une correspondance avec Pierre de Fermat avec lequel il développe un nouveau champ de recherche en mathématiques : les calculs de probabilités.

Peano (Giuseppe) (1858-1932)

Mathématicien et linguiste italien, il est à l'origine d'une formalisation de l'arithmétique à travers des axiomes et d'une construction des nombres rationnels. Auteur du *Calcul différentiel et principes du calcul intégral* (1870) et du *Formulaire de Mathématiques* (1908), il est le premier à utiliser le terme de « logique mathématique » et de nombreuses notations qu'il emploie le sont encore à l'heure actuelle.

Période (d'une fonction)

Une fonction f est périodique de période T si pour tout x appartenant à son ensemble de définition, $f(x + T) = f(x)$

Permutation d'un ensemble p. 340

***p*-liste (ou *p*-uplet)** p. 340

Plan médiateur p. 319

Point d'inflexion p. 148

Poisson (Siméon Denis) (1781-1840)

Mathématicien et physicien français, ses travaux concernent entres autres la géométrie et l'astronomie. En théorie des probabilités, il introduit dans ses Recherches sur la probabilité des jugements, la loi de probabilité discrète qui porte son nom : la loi de Poisson.

Primitive (d'une fonction) p. 206, p. 244

Produit cartésien p. 338

Produit scalaire (espace) p. 310

Projection orthogonale p. 312

Pythagore (de Samos) (569-475 av. J.-C.)

Astronome, philosophe et mathématicien grec. Disciple de Thalès, il ne laisse aucun écrit mais est connu par ses disciples et successeurs.

On lui attribue l'origine du mot « mathématiques », celui qui veut apprendre.

Q

Quételet (Adolphe) (1796-1874)

Astronome, poète et mathématicien belge, il met en évidence le rôle primordial que joue la courbe de Gauss dans de nombreux domaines.

R

Raisonnement par récurrence p. 16

Raphson (Joseph) (env 1648-1715)

Mathématicien anglais, il publie en 1690 *Analysis Aequationum Universalis* où il présente la méthode connue actuellement comme étant la méthode de Newton-Raphson.

Recette

Somme d'argent encaissée

S

Saint-Vincent (Grégoire) (1584-1667)

Mathématicien flamand, ses travaux portent sur les calculs d'aires notamment dans ses recherches concernant la quadrature du cercle. Ses écrits, même si perfectibles, influencent grandement Leibniz lors de l'invention du calcul infinitésimal.

Scalaire

Un scalaire est un nombre réel dans les cas étudiés dans ce manuel.

Suite arithmétique

Une suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n + 1 = u_n + r$

Suite géométrique

Une suite (u_n) avec $n \in \mathbb{N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n + 1 = q\,u_n$

T

Tchebychev (Pafnouti Lvovitch) (1821-1894)

Mathématicien russe, ses domaines d'études sont la théorie des nombres, les probabilités et les statistiques. Il poursuit l'œuvre de ses prédécesseurs en démontrant de manière rigoureuse des théorèmes limites. Il démontre notamment l'inégalité énoncée par Bienaymé, devenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

U

Unité d'aire p. 242

V

Valeurs intermédiaires (théorème des) p. 116

Valeur moyenne p. 248

Vecteurs (espace) p. 284

Vecteur normal (espace) p. 312

Verhulst (Pierre François) (1804-1849)

Mathématicien belge, il est l'élève de Quételet et établit le modèle de Verhulst, modélisant la croissance exponentielle d'une population.

Z

Zenon (d'Elée) (490-430 av. J.-C.)

Philosophe grec, il est à l'origine de plusieurs paradoxes dont celui d'Achille et de la Tortue.

Rappels de Seconde et de Première

Puissances

- Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

- Par convention, $a^0 = 1$.
- On considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$ • $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$ • $(a^m)^p = a^{m \times p}$

Racine carrée

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$
- Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.
- Pour tout nombre a : $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$
- Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Pour tous nombres positifs a et b (avec $b \neq 0$) : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Calcul algébrique

Distributivité

- Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a : $k(a + b) = ka + kb$ et $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

• $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Équations

- Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.
- Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.
- On considère l'équation $x^2 = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $x^2 = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **une seule solution réelle** $x = 0$.
  - si $\boldsymbol{k > 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **deux solutions réelles** $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.
- On considère l'équation $\sqrt{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \geqslant 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ a **une seule solution réelle** $x = k^2$.
- On considère l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \neq 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ a une **seule solution réelle** $x = \dfrac{1}{k}$.

Proportions et évolutions

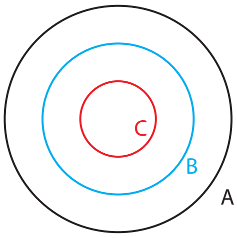
Proportions d'ensembles emboités

• On considère trois ensembles A, B et C emboités tels que $C \subset B \subset A$.

On note p la proportion de la population de B dans la population de A.

On note p' la proportion de la population de C dans la population de B.

Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à $p \times p'$.



Variations absolue et relative

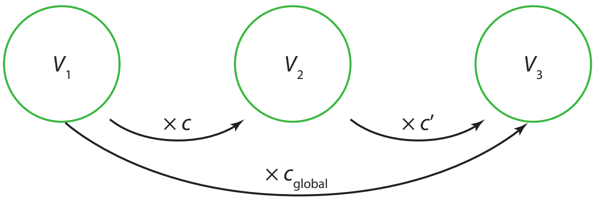
• On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A.

• la variation absolue est : $V_A - V_D$

• la variation relative, ou taux d'évolution, est : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$

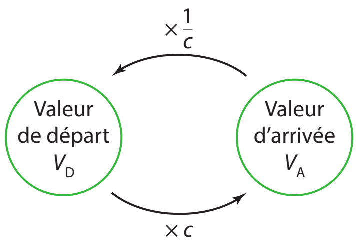
Évolutions successives

• Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à une valeur V_3, le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre V_1 et V_3. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global et est égal à $c \times c'$ où c (respectivement c') est le coefficient multiplicateur de la première (respectivement de la seconde) évolution.



Évolution réciproque

• Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A, le taux réciproque est le taux permettant de revenir de V_A à V_D. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque et est égal à $\dfrac{1}{c}$ où c est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.



Statistiques descriptives

Moyenne

• On considère une série statistique de p valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ donnée dans le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

La **moyenne** de cette série est : $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$

Moyenne pondérée

• On considère une série statistique constituée de p valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectées de p coefficients (ou poids) c_1, $c_2, \ldots, c_p$.

La **moyenne pondérée** de cette série est : $m = \dfrac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$

Probabilités

Équiprobabilité

• Une loi de probabilité est dite **équirépartie** lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est :

$$\frac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{n}$$

On est alors dans une situation d'**équiprobabilité.**

• La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet évènement.
Dans une situation d'**équiprobabilité**, où il y a n issues, la probabilité d'un événement A réalisé par k issues est :

$$p\,(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}$$

Probabilité de l'évènement contraire

• Soit A un événement. On a : $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}})$

Relation entre union et intersection

• Soit A et B deux événements. On a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

Vecteurs

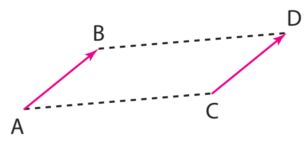
Définitions

• Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est défini par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB),
- son **sens** (de A vers B),
- sa **norme** (la longueur du segment AB).

• ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$



• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** s'il existe un réel non nul k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

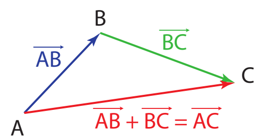
• Deux droites (AB) et (MN) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont **colinéaires**.

• Trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.

• Soient A et B deux points distincts d'une droite d alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite d.

Relation de Chasles

• A, B, C trois points.



On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Géométrie repérée

- On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\ \vec{j})$.

  - Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
  - Le milieu d'un segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
  - Coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
  - Égalité de vecteurs : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
  - Somme de deux vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
  - Multiplication par un réel k : $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
  - Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - Déterminant de deux vecteurs : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$

- Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si leur **déterminant est nul.**
- Une **équation cartésienne** de la droite passant par le point A et de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est de la forme :

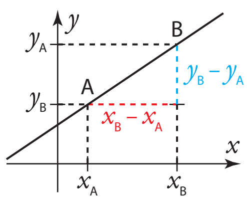
$$ax + by + c = 0$$

- Toute droite non verticale a une **équation réduite** de la forme : $y = mx + p$

où m s'appelle le **coefficient directeur** et **p l'ordonnée à l'origine.** Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

- Le **coefficient directeur** ou pente d'une droite (AB) est :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{si } x_A \neq x_B$$



- Toute droite **verticale** a une équation réduite de la forme : $x = k$
- Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si $m = m'$.

Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont **confondues.**

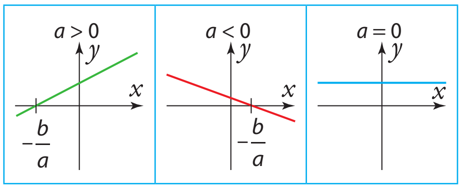
- Deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si

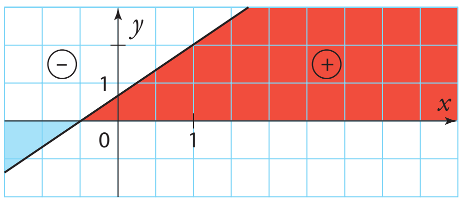
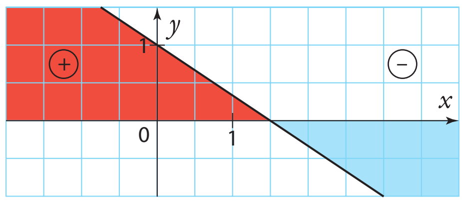
$$ab' - ba' = 0$$

Fonctions

Fonction affine

- Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ (avec m et p réels) :
  - si $\boldsymbol{a > 0}$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a < 0}$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a = 0}$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.
- La fonction affine f s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.



$\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{a < 0}$
	

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f est négative puis positive.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f est positive puis négative.

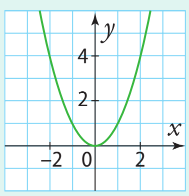
Fonctions de référence

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

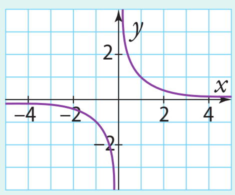


Fonction inverse

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

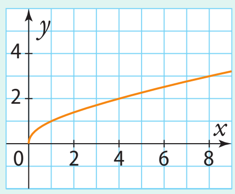


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$

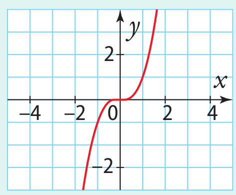


Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$\nearrow$	



Second degré

Fonction polynôme de degré 2

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$

Forme canonique

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α et β réels.

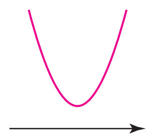
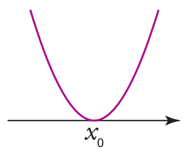
Coordonnées du sommet

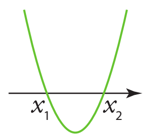
$S(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

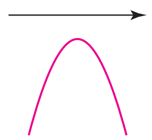
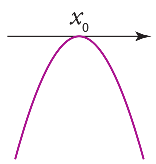
Discriminant

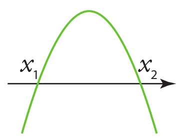
$\Delta = b^2 - 4ac$

Courbes représentatives

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta < 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta > 0$</th></tr>
<tr><td>$a > 0$</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">$+$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td>
<td>
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="2">$-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td>
<td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Factorisation</td>
<td>f n'admet pas de racine.
Il n'y a donc pas de factorisation.</td>
<td>f a une racine double :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
On a alors :
$f(x) = a(x - x_0)^2$</td>
<td>f admet deux racines distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
On a alors :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
De plus :
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$</td></tr>
</table>

Suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$	(u_n) est une suite arithmétique de raison r	(u_n) est une suite géométrique de raison q et $u_0 \neq 0$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1} = u_p \times q^{n-p}$
Variation	• Si $r > 0$: (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$: (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante.	• Si $q > 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement croissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement décroissante. • Si $0 < q < 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement décroissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement croissante. • Si $q = 0$ ou $q = 1$: (u_n) est constante. • Si $q < 0$: (u_n) n'est pas monotone.
Somme, $n \geqslant 1, q \neq 1$	$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Dérivation

Dérivées des fonctions de référence

f est définie sur	Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations et dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonctions u et v	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
Pour k constante réelle, $k \times u$	$k \times u'$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Pour a et b réels : $u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$
e^{ax+b}	$a \times e^{ax+b}$

Équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en un point d'abscisse a $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

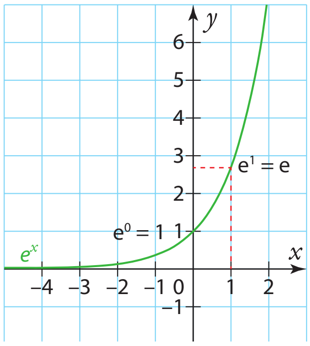
Fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\bullet\ e^0 = 1 \qquad \bullet\ e^1 = e \qquad \bullet\ \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad e^x > 0$
- Pour tous réels a et b, $n \in \mathbb{Z}$:

$\bullet\ e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \bullet\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \qquad \bullet\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad \bullet\ (e^a)^n = e^{an}$



Produit scalaire

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormé

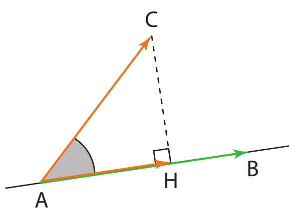
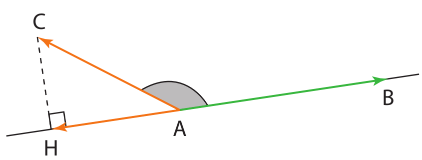
Formule analytique $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Formule géométrique $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Formule avec les normes $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Projeté orthogonal

- Soit A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = +AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.
	

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, ce qui se traduit par :

$$xx' + yy' = 0$$

Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Trigonométrie

Fonctions sinus et cosinus

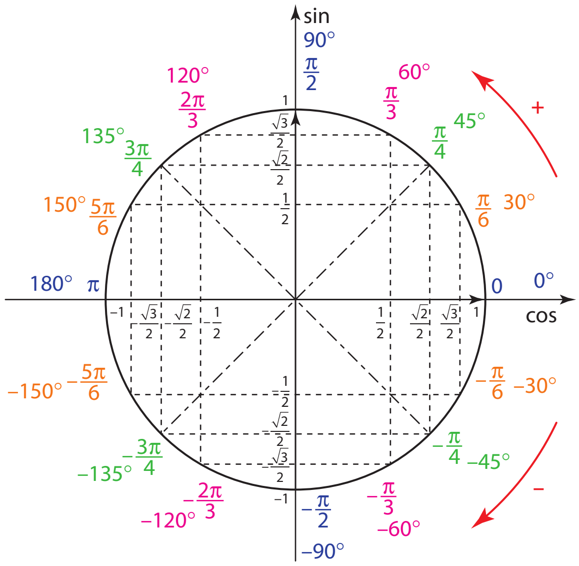
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$. Ce sont des fonctions périodiques de période 2π.

  • $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ • $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$

- Pour tout nombre réel x

  • $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$ • $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
  • $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Cercle trigonométrique



Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Angles associés

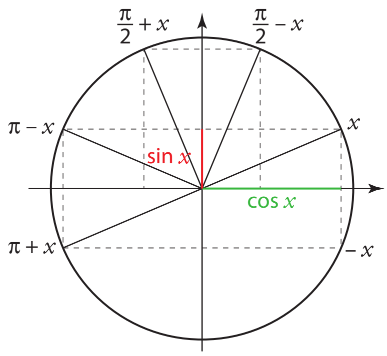
• $\cos(-x)=\cos(x)$ • $\sin(-x)=-\sin(x)$

• $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$ • $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

• $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ • $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$

• $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$

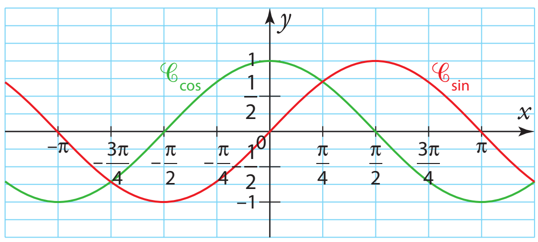
• $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$



Fonctions sinus et cosinus

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, ce sont des fonctions périodiques de **période 2π**, dites « **2π-périodiques** ».

$$\sin(x+2\pi)=\sin(x) \text{ et } \cos(x+2\pi)=\cos(x)$$



La fonction sinus est impaire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

La fonction cosinus est paire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

Formulaire de Terminale

Suites

Suite convergente

Soit (u_n) une suite et ℓ un réel. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert J (aussi petit qu'il soit) contenant ℓ contient toutes les valeurs de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N.

Suite qui tend vers $+\infty$

Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si pour tout réel A (aussi grand que l'on veut) il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N : u_n > A$.

Suite qui tend vers $-\infty$

Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si pour tout réel A (aussi petit que l'on veut) il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N : u_n < A$.

Théorème

Toute suite croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée) est convergente.

Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et ℓ et ℓ' deux nombres réels.

- **Limite d'une somme**

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**indéterminée**	$-\infty$

- **Limite d'un produit**

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**indéterminée**

- **Limite d'un quotient**

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell\neq0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)$	$\ell'\neq0$	0	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**

Théorème de comparaison

- Si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si à partir d'un certain rang N, on a $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n \leqslant$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers un même nombre ℓ, alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.

Suites

Convergence des suites géométriques

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Théorème

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers une limite finie ℓ.
Si la fonction f est continue en ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Fonctions

Théorèmes

- Si une fonction est dérivable sur un intervalle I alors elle est continue sur cet intervalle.
- Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors
pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Asymptote horizontale

- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) < g(x)$ sur un intervalle du type $]a\,;+\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Fonctions

Théorème des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions telles que $f(x) < g(x) < h(x)$ sur un intervalle du type $]a\,;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Propriétés

- Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et v une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un intervalle K de $\mathbb{R}$.

Si pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J alors $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x)$.

- Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:

• f est **convexe** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **positive** sur I

• f est **concave** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **négative** sur I.

- Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in I$ alors $M(x_0\,; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Fonctions trigonométriques

Propriétés

- Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Les fonctions f et g définies sur I par $f(t) = \cos(u(t))$ et $g(t) = \sin(u(t))$ sont dérivables sur I et pour tout nombre t de I, $f'(t) = -u'(t)\sin(u(t))$ et $g'(t) = u'(t)\cos(u(t))$.

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	0

Équations

• $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ *ou* $x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

• $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ *ou* $x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Inéquations

Soit a un nombre réel.

- Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \cos(a)$ sont les nombres vérifiant :

$$a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

- Les solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant \sin(a)$ sont les nombres vérifiant :

$$-\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dénombrement

Propriétés

- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments s'écrit $n!$

Il est égal à : $$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

- Le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est : $$\frac{n!}{(n-p)!}$$

- Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est égal à : $$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}$$

- Pour tous nombres entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\bullet \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \bullet \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \bullet \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \bullet \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \bullet \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Probabilités

Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ une partition d'un univers Ω, B un événement de Ω. Alors :

$$p(\Omega) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \ldots + p(A_n \cap B)$$

Événements indépendants

On dit que deux évènements A et B sont indépendants :

- si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- si $p_A(B) = p(B)$.

Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.

On a alors :

- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Loi binomiale

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ alors, pour tout entier k compris dans $[0\,;n]$, on a :

- $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in\,]0\,;1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a\,;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Probabilités

Espérance et variance

Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même univers fini Ω et a un nombre réel.

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X)$
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X) = \mu$ et de variance $V(X) = V$.

Pour tout réel strictement positif δ, $p(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$ c'est-à-dire $p(X \notin]\mu-\delta\,;\mu+\delta[) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$

Inégalité de concentration

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et de variance V et $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel strictement positif δ, l'inégalité, $p(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$ est vérifiée.

Loi (faible) des grands nombres

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires d'espérance μ et $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel strictement positif δ fixé, $\lim\limits_{n \to +\infty} p(|X-\mu| \geqslant \delta) = 0$

Fonction logarithme népérien

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$:

$\bullet\ e^{\ln(x)} = x \qquad \bullet\ \ln(e^x) = x \qquad \bullet\ \ln(1) = 0 \qquad \bullet\ \ln(e) = 1 \qquad \bullet\ \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

- La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$.
- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$\bullet\ \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \qquad \bullet\ \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

- Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$:

$\bullet\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \bullet\ \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \bullet\ \ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \bullet\ \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$
- Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est alors **dérivable** sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

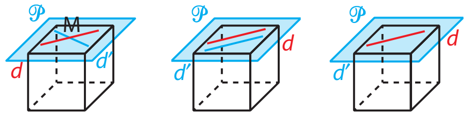
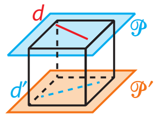
Limites

$\bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \bullet\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \bullet\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln(x) = 0 \quad \bullet\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0,\ n \in \mathbb{N} \quad \bullet\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0,\ n \in \mathbb{N}^*$

Espace

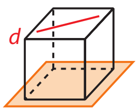
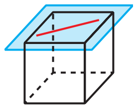
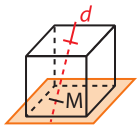
Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à-dire contenues dans un même plan) et alors elles sont sécantes ou parallèles soit non coplanaires.

d et *d'* sont coplanaires et sécantes en M ou strictement parallèles ou confondues	*d* et *d'* sont non coplanaires
	

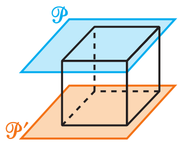
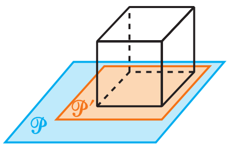
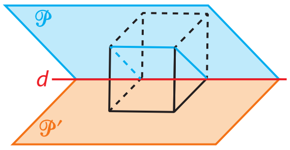
Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, et dans ce cas leur intersection est un point, soit parallèles.

① *d* est strictement parallèle à $\mathscr{P}$	② *d* est incluse dans $\mathscr{P}$	③ *d* est est sécante à $\mathscr{P}$
		

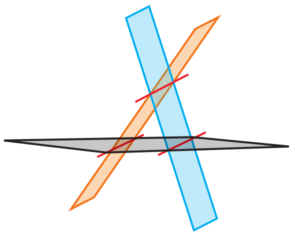
Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont soit sécants, et dans ce cas leur intersection est une droite, soit parallèles.

① *d* est strictement parallèle à $\mathscr{P}'$	② $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus	③ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants en *d*
		

Théorème « du toit »

Soient $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ deux plans sécants selon une droite Δ.
Si une droite d_1 de $\mathscr{P}_1$ est strictement parallèle à une droite d_2 de $\mathscr{P}_2$ alors Δ est parallèle à d_1 et d_2



Théorème

Soit A,B et C trois points distincts non alignés de l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace pour lesquels il existe deux réels α et β tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

Corollaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

Espace

Produit scalaire

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de l'espace dans un repère orthonormé.

- Formule analytique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Formule géométrique : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
- Formule avec les normes : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Représentation paramétrique d'une droite

Le système d'équations $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et telle que k est le **paramètre** de cette représentation.

Propriété

Le plan passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ a pour **équation cartésienne** :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Équations différentielles

Théorèmes

- Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions de la forme : $f(x) = Ke^{ax}$ avec K réel

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution telle que $f(x_0) = y_0$.

- Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions de la forme : $f(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec K réel

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution telle que $f(x_0) = y_0$

Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ avec k réel
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sauf -1	$\mathbb{R}$ si n est un entier naturel $]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$ si n est un entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ avec k réel
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k réel
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$ avec k réel
$f(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$	$F(x) = \ln(x) + k$ avec k réel

Primitives de fonctions composées

u désigne une fonction dérivable sur I.

Formes de la fonction	Primitive	Conditions
$u'u$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sauf 0 et -1	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < 0$ alors $u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
u'	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.

Calcul intégral

Propriétés

• Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors :
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ que l'on note aussi $[F(x)]_b^a$.

• Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel.
Alors :

$$\bullet \int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$\bullet \int_a^b (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels appartenant à I.

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

Propriétés

• Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors :

Si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

• Si pour tout $t \in [a\,;b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ définie par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

Intégration par parties

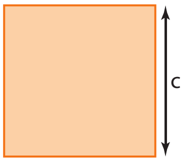
Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ et admettant des dérivées u' et v' continues. Alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_b^a - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Formulaire de géométrie

Aires et périmètres

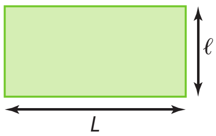
Carré



$\mathcal{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

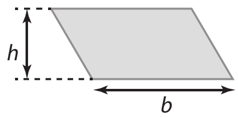
Rectangle



$\mathcal{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

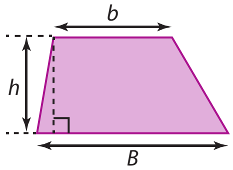
Parallélogramme



$\mathcal{A} = b \times h$

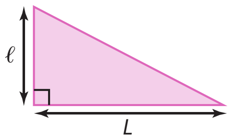
$p = 2 \times (L + \ell)$

Trapèze



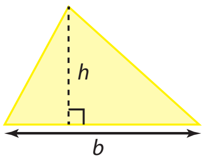
$\mathcal{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

Triangle rectangle



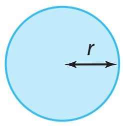
$\mathcal{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

Triangle quelconque



$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

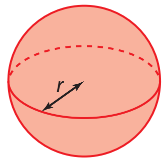
Disque



$\mathcal{A} = \pi \times r^2$

$p = 2\,\pi\, r$

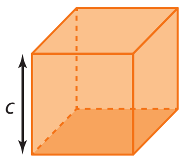
Sphère



$\mathcal{A} = 4\pi \times r^2$

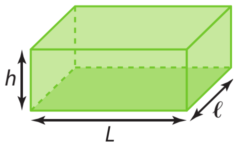
Volumes

Cube



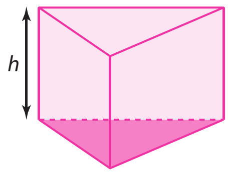
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = c^3$

Parallélépipède rectangle ou pavé



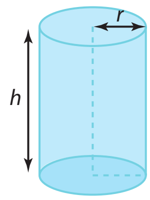
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = L \times \ell \times h$

Prisme droit



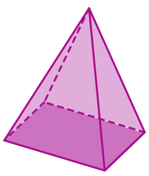
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h$

Cylindre



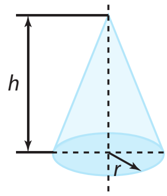
$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{base}} \times h = \pi \times r^2 \times h$

Pyramide



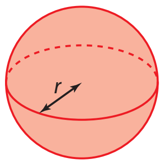
$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times h}{3}$

Cône de révolution



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{base}} \times h}{3} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$

Sphère



$\mathcal{V} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

1 ET et OU en mathématiques

Définition Et

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 ET une proposition 2 sont vérifiées, cela veut dire qu'elles sont vérifiées à la fois.
Ce "ET" mathématique est très lié au symbole $\cap$.

Exemples

① On cherche le nombre n tel que n soit un entier pair ET appartienne à l'intervalle [3,5 ; 5,9].

Il s'agit de trouver un nombre n (s'ils existe(nt)) qui vérifie les deux conditions à la fois c'est-à-dire qui est un entier pair ET qui appartient à [3,5 ; 5,9].
Le seul nombre vérifiant ces deux conditions est 4 donc $n = 4$.

② On considère le programme **PYTHON** :

```
import random
x = random.randint(1,10)
if x > 3 and x <= 7.3:
  print("Dans l'intervalle !")
else:
  print("Pas dans l'intervalle...")
```

Le programme affiche **"`Dans l'intervalle!`"** si le nombre **`x`** vérifie à la fois **$x > 3$** et **$x \leqslant 7{,}3$** c'est-à-dire si **$3 < x \leqslant 7{,}3$**.

Définition Ou

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 OU une proposition 2 est vérifiée, cela veut dire qu'au moins l'une des deux est vérifiée.
Ce "OU" mathématique est très lié au symbole $\cup$.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Quelles sont les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 ?
Les nombres entiers entre 1 et 6 qui vérifient la proposition :
- « être pair » sont 2 ; 4 ; 6.
- « être strictement supérieur à 2 » sont 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 sont donc 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 qui sont tous les entiers entre 1 et 6 qui vérifient au moins l'une des deux conditions (éventuellement les deux pour 4 et 6).

Remarques

- Dans le langage courant, le OU est **exclusif**. Par exemple, quand sur un menu au restaurant il est écrit « fromage ou dessert » cela veut dire que l'on peut prendre soit du fromage, soit un dessert, mais pas les deux.
- Dans le langage mathématique, le OU est **inclusif**. Dans l'exemple précédent du dé à 6 faces, les nombres 4 et 6 vérifient les deux conditions à la fois cela veut dire que si on les obtient, le résultat est bien pair OU strictement supérieur à 2.

Exemple

L'algorithme suivant illustre l'exemple précédent du dé à 6 faces.

```
x ← Entier aléatoire entre 1 et 6
Si x est pair ou x>2
   Afficher "Pair ou strictement supérieur à 2"
Fin si
```

Il affiche « **`Pair ou strictement supérieur à 2`** » si l'entier aléatoire **`x`** a pour valeur 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

2 Implication, contraposée, réciproque et équivalence

Définition **Implication**

Une implication est une proposition de la forme : SI énoncé 1 ALORS énoncé 2
Symboliquement, cela se note : énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2
Cela veut dire que si l'énoncé 1 est vérifié alors l'énoncé 2 l'est forcément (ou nécessairement) également.
On dit que l'énoncé 1 est une condition suffisante et que l'énoncé 2 est une condition nécessaire.

Exemples

1 La proposition suivante est VRAIE : SI la prise est débranchée ALORS la lampe est éteinte.
On peut la traduire par : la prise est débranchée $\Rightarrow$ la lampe est éteinte (se lit également « la prise est débranchée entraîne la lampe est éteinte »).

2 En revanche, la proposition suivante est FAUSSE : SI la lampe est éteinte ALORS la prise est débranchée.
En effet, si la lampe est éteinte, la prise peut être branchée mais l'interrupteur sur OFF.

Définition **Contraposée**

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 est vraie alors sa contraposée :
contraire de l'énoncé 2 $\Rightarrow$ contraire de l'énoncé 1 est également vraie.

Exemple

La proposition suivante est vraie : SI je viens de manger ALORS je n'ai pas faim.
Sa contraposée : SI j'ai faim (le contraire de « je n'ai pas faim ») ALORS je ne viens pas de manger (le contraire de « je viens de manger ») est également vraie.

Définition **Réciproque**

Si l'on considère une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, on dit que :
énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 est sa réciproque.
Cette réciproque peut être vraie ou non.

Exemple

La proposition suivante est VRAIE : SI $x = 3$ ALORS $x^2 = 9$.
En revanche, sa réciproque : SI $x^2 = 9$ ALORS $x = 3$ est FAUSSE.
En effet, si $x^2 = 9$, x peut être égal à 3 ou à -3.

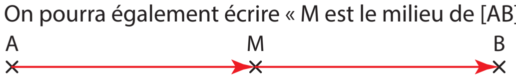
Définition **Équivalence**

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 et sa réciproque énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 sont vraies, on dit que les énoncés 1 et 2 sont équivalents.
À l'aide d'un symbole mathématique, cela se note :
énoncé 1 $\Leftrightarrow$ énoncé 2.

Exemple

Soit 3 points A, B et M. M est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ car l'implication « Si M est le milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. » et sa réciproque « Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu de [AB] » sont vraies.

Remarque On pourra également écrire « M est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. »



3 Inégalités et inéquations

Définition **Inégalité**

a, b, c et k sont des nombres réels.

- **Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité :**

si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

- **Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité :**

$$\text{si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

- **Multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité :**

$$\text{si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Définition **Inéquation**

Une inéquation est une inégalité dans laquelle une inconnue (ou des inconnues) est présente.

Remarques

- Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.
- Si on applique une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a le même ensemble des solutions.

Exemple

Résolvons l'inéquation $-2x - 8 < 4$.

$$-2x - 8 < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x < 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -6 \quad \text{(on divise par } -2 \text{ qui est négatif).}$$

Les trois égalités $-2x - 8 < 4$; $-2x < 12$ et $x > -6$ sont équivalentes puisqu'elles sont obtenues successivement en ajoutant 8 aux deux membres de l'inégalité puis en les divisant par -2 et en changeant le sens de l'inégalité.

Cela veut dire que x est solution de $-2x - 8 < 4$ si et seulement si x est solution de $x > -6$ (que l'on peut voir comme une inéquation d'ensemble des solutions immédiat), autrement dit que l'ensemble des solutions de $-2x - 8 < 4$ est $]-6\,;+\infty[$.

4 Quantificateurs universels

Définition **Il existe**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'il existe un réel x (ou un entier n etc.) qui vérifie une certaine propriété, il s'agit simplement de trouver un exemple pour lequel la propriété est vérifiée.

Exemple

Montrons qu'il existe un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$.

On constate que, pour $x = 1$, on a $2x^2 - 2 = 2 \times 1^2 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc il existe bien un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$, en l'occurrence 1.

Remarques

- Si on ne voit pas $x = 1$ directement, on peut aussi résoudre l'équation $2x^2 - 2 = 0$ avec les méthodes classiques pour le retrouver : $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
- Notons que la résolution de $2x^2 - 2 = 0$ fait plus que montrer qu'il existe une valeur de x pour laquelle $2x^2 - 2 = 0$, elle prouve que 1 et -1 sont les deux seules valeurs.

Définition **Pour tout / Quel que soit**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'une propriété est vraie « pour tout réel x » ou « quel que soit le réel x », il faut montrer qu'elle est vraie en tout généralité et non pas uniquement sur quelques exemples.

Exemple

Montrons que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est impaire.

On peut commencer, au brouillon, par se convaincre que c'est vrai en calculant $1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$, $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$; $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$; $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$; etc.

Ceci dit, nous n'avons rien démontré pour l'instant, puisqu'il faut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers (c'est implicite dans l'énoncé).

Soit donc n un entier (en toute généralité) et $n + 1$ celui qui le suit, il s'agit de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.

On calcule donc $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui est impair quel que soit n (puisque $2n$ est un multiple de 2, donc pair, $2n + 1$ est impair).

On vient de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair pour tout entier n (ou quel que soit l'entier n) donc la différence des carrés de deux entiers consécutifs est bien impair.

5 Type de raisonnement

Règle **Utilisation de la contraposée**

Lorsque l'on connaît une propriété, on peut utiliser sa contraposée (qui est également vraie) dans une démonstration.

Exemple

On sait que la propriété suivante est vraie : « Si n est un entier impair alors n^2 est impair. »

La contraposée de cette propriété est : « Si n^2 n'est pas impair alors n n'est pas impair. »

Ce qui est équivalent à : « Si n^2 est pair alors n est pair ». On a démontré cette nouvelle propriété par contraposée.

Règle **Raisonnement par l'absurde**

L'utilisation de la contraposée est assez proche d'un autre type de raisonnement, le raisonnement par l'absurde.

Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut montrer, puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).

On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte, donc que la propriété voulue est vraie.

Exemple

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (ne peut s'écrire sous forme d'une fraction).

On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un rationnel, alors il s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs non nuls.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc, en élevant au carré on a $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2 = 2q^2$. On en déduit que p^2 est pair.

De plus on sait que p est pair si et seulement si p^2 est pair. On en déduit alors que p est pair, donc il existe p' tel que $p = 2p'$.

On a alors $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2p')^2}{2} = \frac{4p'^2}{2} = 2p'^2$, ce qui signifie que q^2 est pair, ce qui est équivalent à q pair.

On a montré que q et p sont pairs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ car dans ce cas-là, on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, elle n'est donc pas irréductible comme annoncé.

Notre hypothèse de départ est donc fausse, autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Règle Contre-exemple

Pour infirmer une proposition (c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse), il suffit d'en donner un contre-exemple.

Exemple

Considérons la proposition suivante : Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers.

Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de trouver un nombre entier impair supérieur à 2 qui ne soit pas premier.

C'est le cas de 9, qui est divisible par 3.

La proposition est donc fausse.

Remarque On dit que l'on a nié la proposition « tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers ».

Règle Raisonnement par disjonction des cas

Lorsque qu'on démontre une propriété, il peut arriver que l'on doive traiter différents cas.
S'il en est ainsi, on peut procéder par disjonction des cas en faisant attention à bien traiter tous les cas possibles.

Exemple

Annie a souscrit un forfait téléphonique qui s'ajuste automatiquement à son nombre d'heures :

- si elle téléphone moins de 3 heures, elle sera facturée 6 euros au total quel que soit le nombre d'heures ;
- si elle téléphone entre 3 heures et 5 heures, elle sera facturée 2 euros l'heure de communication ;
- si elle téléphone plus de 5 heures, elle sera facturée 10 euros au total, quel que soit le nombre d'heures.

On souhaite montrer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

Pour cela, on appelle x son nombre d'heures de communication et on va traiter les trois cas suivants :

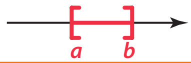
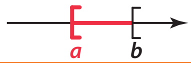
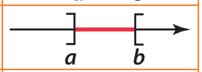
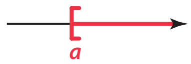
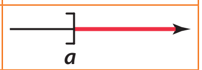
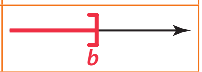
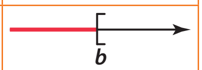
- si $x < 3$ alors elle paie 6 euros.
- si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $6 \leqslant 2x \leqslant 10$ (or $2x$ est le montant de sa facture qui est donc inférieur ou égal à 10).
- si $x > 5$ alors elle paie 10 euros.

On voit que dans les 3 cas possibles, le montant de la facture est inférieur ou égal à 10 donc on peut affirmer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

6 Notations

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre *a* (inclus) et *b* (inclus) est appelé intervalle et se note [*a* ; *b*]

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in\ ]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in\ ]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in\ ]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in\ ]-\infty\,;b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in\ ]-\infty\,;b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels ℝ est $]-\infty\,;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit ℝ+ ou $[0\,;+\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit ℝ– ou $]-\infty\,;0]$.

Définition **Ensemble de nombres**

• ℕ = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ;…} : ensemble des entiers naturels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif.

• ℕ* est l'ensemble des entiers naturels non nuls (privé de 0).

• ℤ = {… ; –3 ; –2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …} : ensemble des entiers relatifs, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif.

• ℤ* est l'ensemble des entiers relatifs non nuls (privé de 0).

• 𝔻 est l'ensemble des nombres décimaux, ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$. avec *a* un entier relatif et *n* un entier positif.

• ℚ est l'ensemble des nombres rationnels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec *a* un entier relatif, *b* un entier relatif non nul.

• ℝ est l'ensemble des nombres réels.

• ℝ* est l'ensemble des nombres réels non nuls (privé de 0).

• ℕ ⊂ ℤ ∈ 𝔻 ∈ ℚ.

Définition **Ensembles discrets**

Lorsqu'un ensemble de nombres est constitué de valeurs isolées (on dit alors que c'est un ensemble discret), on le note en écrivant tous ses éléments entre accolades, séparés par un point-virgule.

Exemple

L'ensemble des nombres impairs compris entre 0 et 12 est {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11}.

Notations Il ne faut pas confondre les accolades, les crochets et les parenthèses :
- {2 ; 5} désigne l'ensemble constitué des deux éléments 2 et 5.
- [2 ; 5] désigne l'intervalle constitué de tous les nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus dans ce cas).
- (2 ; 5) désigne un couple dont la première coordonnée est 2 et la deuxième est 5.

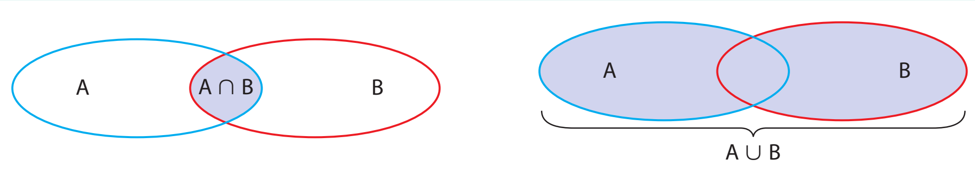
Définition Appartenance et inclusion

- Le symbole $\in$ (resp. $\notin$) désigne le fait qu'un élément **appartienne** (resp. **n'appartienne pas**) à un ensemble.
- Le symbole $\subset$ (resp. $\not\subset$) désigne le fait qu'un ensemble soit **inclus** (resp. **non inclus**) dans un autre ensemble.

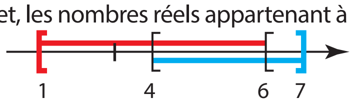
Exemples
- $5 \in \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car 5 est bien un élément de l'ensemble $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$.
- $2{,}3 \notin]5 ; 7[$ car le nombre 2,3 n'est pas strictement compris entre 5 et 7.
- $[4 ; 5] \subset [0 ; 12]$ car l'ensemble $[4 ; 5]$ est inclus dans l'ensemble $[0 ; 12]$, c'est-à-dire que tous les nombres de $[4 ; 5]$ sont également dans $[0 ; 12]$.
- $\{1 ; 2 ; 3\} \not\subset \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car $\{1 ; 2 ; 3\}$ n'est pas inclus dans $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ c'est-à-dire qu'au moins un élément de $\{1 ; 2 ; 3\}$, en l'occurrence 1, n'est pas dans $\{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$.

Définition Intersection et réunion

Soit A et B deux ensembles.
- **$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B, c'est-à-dire aux deux ensembles à la fois.**
- **$A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B, c'est-à-dire à au moins l'un des deux ensembles.**



Exemples
- $[4 ; 7] \cap [1 ; 6[= [4 ; 6[$ En effet, les nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles $[4 ; 7]$ et $[1 ; 6[$ sont les réels de l'intervalle $[4 ; 6[$:



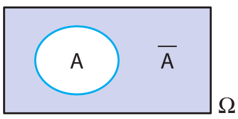
- $\{1 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9\} \cup \{2 ; 3 ; 9 ; 11\} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 11\}$ car ce sont tous les nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles (attention : on n'écrit qu'une seule fois les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, ici 3 et 9).

Règle Complémentaire

Soit A un ensemble (inclus dans un ensemble B).
Le complémentaire de A (dans B), noté $\overline{A}$ ou B\A est l'ensemble des valeurs (de B) qui n'appartiennent pas à A.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{[5 ; 6[} =]-\infty ; 5[\cup[6 ; +\infty[$ c'est à dire tous les réels sauf ceux qui appartiennent à $[5 ; 6[$.

Remarque La notation du complémentaire est la même que celle de l'évènement contraire en probabilités.
Cela est normal puisque dans ce contexte, $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, est le complémentaire de A dans l'univers Ω.



Corrigés

1 Suites et récurrence

À vous de jouer !

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = 1$

Donc $S_1 = \dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$

$= \dfrac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6}$

$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Or $\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$= \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Donc $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = -3$ et $u_1 = 2u_0 + 7 = 2\times(-3) + 7 = 1$

Donc $u_0 < u_1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n < u_{n+1}$.

Donc $2u_n < 2u_{n+1}$.

Donc $2u_n + 7 < 2u_{n+1} + 7$.

Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

5 **a)** $u_n > A \Leftrightarrow n^2 - 4 > A$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{A+4}$

Posons $n_0 = E\left(\sqrt{A+4}\right) + 1$.

Pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

b) Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme).

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 5 = +\infty$ (par produit et somme)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par produit)

11 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2(-n+2)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 2 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2\left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

13 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. Donc $u_n \geqslant n^2 - 5$.

2. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5 = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

15 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-5 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant -5 + \dfrac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{1}{n} = -5$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$.

17 **a)** $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) $7 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

19 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_n - 2 = \dfrac{2n-2}{n+4} - 2$

$= \dfrac{2n - 2 - 2(n+4)}{n+4}$

$= \dfrac{-10}{n+4}$

Donc $u_n - 2 < 0$. Donc $u_n < 2$. Donc (u_n) est majorée par 2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)-2}{n+1+4} - \dfrac{2n-2}{n+4}$

$= \dfrac{2n}{n+5} - \dfrac{2n-2}{n+4}$

$= \dfrac{2n\times(n+4) - (2n-2)(n+5)}{(n+5)(n+4)}$

$= \dfrac{10}{(n+5)(n+4)}$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est croissante majorée. Donc elle converge.

21 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 5 > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \geqslant n + 1$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 \geqslant 0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} \geqslant n + 1 + 2n + 5$

Donc $u_{n+1} \geqslant n + 2$ car $2n + 4 > 0$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 1$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_0 = 4$; $u_1 = u_0 + 2\times0 + 5 = 9$; $u_2 = u_1 + 2\times1 + 5 = 16$.

On conjecture que $u_n = (n+2)^2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (n+2)^2$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 = (0+2)^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} = (n+2)^2 + 2n + 5$

Donc $u_{n+1} = n^2 + 6n + 9$.

Donc $u_{n+1} = (n+3)^2 = (n+1+2)^2$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+2)^2$.

23 **1.** $u_0 = 500$
$u_1 = 500 \times 0{,}8 + 200 = 600$.
2. On prévoit que chaque année, 80 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 500$ et $u_1 = 600$.
Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1\,000$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$
$0{,}8u_n + 200 \leqslant 0{,}8u_{n+1} + 200 \leqslant 0{,}8 \times 1\,000 + 200$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\,000$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$.
4. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.
Soit ℓ sa limite.
$\ell = 0{,}8\ell + 200 \Leftrightarrow 0{,}2\ell = 200 \Leftrightarrow \ell = 1\,000$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1000$.

Exercices d'application

37 Soit x un réel quelconque.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $|x^n| = |x|^n$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $|x^0| = |1| = 1$ et $|x|^0 = 1$
Donc $|x^0| = |x|^0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $|x^{n+1}| = |x^n \times x| = |x^n| \times |x| = |x|^n \times |x|$
$= |x|^{n+1}$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

46 **1.** $u_n < -A \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -A$
$\Leftrightarrow n^2 > A + 5$
$\Leftrightarrow n > \sqrt{A+5}$
Donc $n_0 = E\left(\sqrt{A+5}\right) + 1$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

54 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.
d) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

63 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1 = n + 2n + 1$.
Donc $3n + 1 > n$.
Donc $\sqrt{3n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $u_n > \sqrt{n}$.
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

71 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

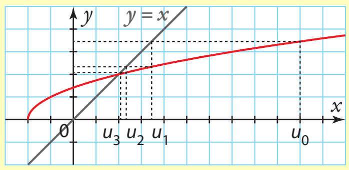
79 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(n - (n+1))}{n \times (n+1)}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)}$$
Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} > 0$.
Donc $u_n > 1$. Donc (u_n) est minorée par 1.
3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée. Donc elle converge.

Exercices d'entrainement

86 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$. Alors pour tout réel x, $f'(x) = n \times x^{n-1}$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 1$.
Pour tout réel x, $f(x) = x^1 = x$ et $f'(x) = 1$
Or $1 \times x^{1-1} = 1$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^{n+1} = x^n \times x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = n \times x^{n-1} \times x + x^n \times 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.
$f'(x) = (n + 1) \times x^n$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.
Donc si f est la fonction définie par $f(x) = x^n$, alors pour tout réel x, $f'(x) = n \times x^{n-1}$.

95 **1.** $100 \times 1{,}1 = 110$. Donc en 2020, il y aura 110 habitants.
$110 \times 1{,}1 = 121$. Donc en 2021, il y aura 121 habitants.
2. a) $v_0 = 100$; $v_1 = 110$ et $v_2 = 121$.
b) $v_{20} \approx 673$; $v_{30} \approx 1745$; $v_{40} \approx 4526$
c) On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
3. Une telle évolution est impossible. La population sera confrontée à des problèmes de place et de ressources.

103 **1.** et **2.**



3. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

106 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$. Donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie. On a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
Donc $\sqrt{1+1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+1} \leqslant \sqrt{u_n+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc elle converge.

114 **a)** $u_n = 5^n\left(1 - \left(\frac{0{,}2}{5}\right)^n\right) = 5^n(1 - 0{,}04^n)$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
b) $v_n = 6^n\left(1 - \left(\frac{7}{6}\right)^n\right)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
c) $w_n = 9^n\left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right)$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

121 **1.** $15\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 14\,500$
Il y aura 14 500 habitants en 2020.
2. On note u_n le nombre d'habitants en $2019 + n$.
En 2019, il y a 15 000 habitants, donc $u_0 = 15\,000$.
Chaque année, le maire prévoit que 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitants s'installeront.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 0{,}9u_n + 1\,000.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 15\,000$ et $5\,000 \times 0{,}9^0 + 10000 = 15\,000$.
Donc $u_0 = 5\,000 \times 0{,}9^0 + 10\,000$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1\,000$
Donc $u_{n+1} = 0{,}9 \times (5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000) + 1\,000$
$= 5\,000 \times 0{,}9^{n+1} + 9\,000 + 1\,000$
$= 5\,000 \times 0{,}9^{n+1} + 10\,000$
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$.
4. $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10\,000$.
Le nombre d'habitants de la ville tend vers 10 000.

Préparer le BAC

135 C et D **136** A **137** C
138 A **139** B **140** B
141 C **142** A et C

143 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « 2 divise $3^n - 1$ ».
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $3^0 - 1 = 0$, donc 2 divise $3^0 - 1$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1$
Or 2 divise $3^n - 1$, donc $3^n - 1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Donc $3^n = 1 + 2k$.
Donc $3^{n+1} = 3 \times (1 + 2k) - 1 = 3 \times 2k + 2$
$= 2 \times (3k + 1)$.
Donc 2 divise 3^{n+1}. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $3^n - 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + 1$ »
Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et $3 \times 2^0 + 1 = 4$. Donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Étape 2 Hérédit é Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
On a $u_{n+1} = 2u_n - 1$
Donc $u_{n+1} = 2 \times (3 \times 2^n + 1) - 1$
$= 3 \times 2^{n+1} + 1$
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$.

144 a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. d) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 3$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. f) $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$.

145 1. $u_1 = 5\,750$ et $u_2 = 6312{,}5$

2. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2000 = 0{,}75u_n + 2000$

3. a)

```
u=5000
for i in range(1,13)
    u=0.75*u+2000
print(u)
```

b) Elle a 7 904,97 € sur son compte le 1er janvier 2020.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 5750$ et $u_1 = 6312{,}5$. Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8\,000$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$
$0{,}75u_n + 2\,000 \leqslant 0{,}75u_{n+1} + 2\,000 \leqslant 0{,}75 \times 8\,000 + 2\,000$.
Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 8\,000$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000 = 0{,}75u_n + 2\,000 - 8\,000$
$= 0{,}75(u_n - 8\,000) = 0{,}75v_n$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme
$v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0{,}75^n$.
$v_n = u_n - 8\,000$, donc $u_n = v_n + 8\,000$.
Donc $u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n$.

6. $-1 < 0{,}75 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8000$.

La somme sur le compte tendra vers 8 000 €.

146 A ▶ 1. $u_1 = 0{,}9 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}189$ et $u_2 \approx 0{,}138$.
Il y a 189 tortues en 2001 et environ 138 en 2002.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$.
Donc $0 \leqslant 0{,}9u_n(1 - u_n) \leqslant 0{,}9u_n$ car $u_n \geqslant 0$.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$ »

Étape 1 Initialisation Pour $n = 0$, $u_0 = 0{,}3$ et $0{,}3 \times 0{,}9^0 = 0{,}3$.
Donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 0{,}3$.
Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 2 Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
On a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$.
Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0{,}9^n$
Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1}$.
Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape 3 Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$

c) $-1 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Cette population de tortues est donc en voie d'extinction.

3.

```
u=0.3
n=0
while u>=30 :
    u=0.9*u*(1-u)
    n=n+1
print(2000+n-1)
```

B ▶ 1. $v_{11} = 1{,}06 \times 0{,}032 \times (1 - 0{,}032) \approx 0{,}033$
$v_{12} \approx 0{,}034$
Il y a environ 33 tortures en 2011 et environ 34 en 2012.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}06v_n(1 - v_n)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$

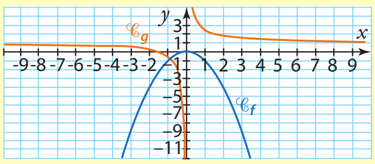
Donc $\ell = 1{,}06 \times \ell \times (1 - \ell)$.

3. La suite (v_n) est croissante.
Donc pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_{10}$
Donc $v_n \geqslant 0{,}032$.
Donc la population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

2 Limites de fonctions

À vous de jouer !

1 1. On obtient les courbes suivantes.



2. a) À partir de 4 et avant -4.
b) À partir de 3 et avant -3.

3. On conjecture $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty$

5 On conjecture une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

7 a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-3}{x} + 1}{\sqrt{x}} = 0$ c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1+x}{2x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} + x^2 = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 + 5x - \dfrac{2}{x} = -\infty$

12 a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 2\sin(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cos(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + 3\cos(x)}{(x+1)^2} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$

14 a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2-x} = +\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} e^{\sqrt{x+1}} = 1$

16 a) $2x^5 + x^2 = 2x^5\left(1 + \dfrac{1}{2x^3}\right)$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^5 + x^2) = -\infty$

b) $\dfrac{2x-1}{3x+2} = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{3x+2} = \dfrac{2}{3}$

c) $-3x^2 + 5x = -3x^2\left(1 - \dfrac{5}{3x}\right)$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 + 5x = -\infty$

d) $\dfrac{x-1}{x^2+3} = \dfrac{1 - \frac{1}{x}}{x\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{x^2+3} = 0$

20 a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = 0$

b) $\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-6} = \dfrac{5}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-6}}$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-6}\right) = 0$

c) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+1} = \dfrac{-x - x^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{x\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

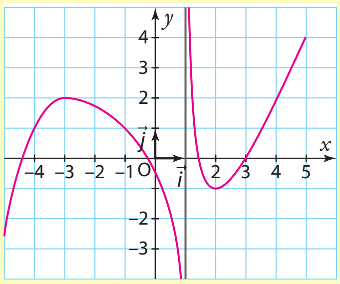
et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2+1}\right) = -\infty$

d) $\sqrt{-3-x} - \sqrt{4-x} = \dfrac{-7}{\sqrt{-3-x} + \sqrt{4-x}}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{-3-x} - \sqrt{4-x}\right) = 0$

Exercices d'application

31 On trace à la main en plaçant les extremums et l'asymptote verticale :



33 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

36 $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = +\infty$

39 La courbe $\mathcal{C}_f$ semble avoir une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
La courbe $\mathcal{C}_g$ semble ne pas avoir d'asymptote.
La courbe $\mathcal{C}_h$ semble avoir une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
La courbe $\mathcal{C}_k$ semble ne pas avoir d'asymptote.

42 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}+1=1$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+1=+\infty$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\sqrt{x}+1=+\infty$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{1-\sqrt{x}}=0$

45 **a)** $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-1=+\infty$
b) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x-1}{x+3}=\frac{1}{4}$
c) $\lim\limits_{x\to2} x^3e^2=8e^2$
d) $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2+3}{x-2}=-\infty$

47 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
c) Impossible.
d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$

51 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-x}=0$
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^5}{e^x}=0$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(x^2+2x-5)=0$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{e^x}=0$

52 **1. a)** $u(x)=2x^2+3$ et $v(x)=\sqrt{x}$
b) $u(x)=-2x-1$ et $v(x)=e^x$
c) $u(x)=\frac{1}{x}$ et $v(x)=\cos(x)$
d) $u(x)=e^{-x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$
2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

57 **1.** Forme « $\frac{0}{0}$ »
2. $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)^2}=\frac{x-2}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$

Préparer le BAC

107 D **108** D
109 B **110** A et D
111 D **112** C
113 B **114** B
115 C
116 **1.** c **2.** b **3.** b
117 **1.** b **2.** d

118 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x+\frac{1}{x}\right)=+\infty$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x-3)=-\infty$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1}=0$
d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-2x}{2x+1}=-1$

119 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sin x)=+\infty$
b) $\lim\limits_{x\to0} x\cos x=0$

120 **1.** b **2.** c **3.** c

121 **1.** b **2.** b **3.** c

3 Fonctions cosinus et sinus

À vous de jouer !

1 **a)** $f'(x)=\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$
b) $f'(x)=-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)$
$f'(x)=2(1-2\sin^2(x))$

3 **a)** $f'(x)=15\cos(3x+12)$
b) $g'(x)=40\sin(-5x+4)$
c) $h'(x)=-14\sin(-2x-3)$

5 **a)** $\left\{-\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{18};\frac{11\pi}{18};\frac{13\pi}{18}\right\}$
b) $\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

7 $x\in\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right[$

9 **a)** $f(x+2\pi)=3\cos^2(x+2\pi)-6\cos(x+2\pi)$
$f(x+2\pi)=f(x)$ car la fonction cosinus est 2π-périodique.
b) On peut étudier f sur $[0\,;2\pi]$.
c) $f'(x)=-6\cos(x)\sin(x)+6\sin(x)$
$f'(x)=6\sin(x)(1-\cos(x))$

x	0		π		2π
$6\sin(x)$	0	+	0	−	
$1-\cos(x)$		+		+	
$f'(x)$	0	+	0	−	
Variations de f	−3	↗	9	↘	−3

11 On effectue un changement de variable en posant $X=\sin(x)$ puis on résout l'inéquation $2X^2-X-1>0$.
$\Delta=9$; $X_1=-\frac{1}{2}$ et $X_2=1$
Donc $X>0$ pour $X<-\frac{1}{2}$.
Ainsi, $\sin(x)<-\frac{1}{2}$
$x\in\left]-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right[$

Exercices d'application

27 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7}{2}$; $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}-8}{2}$;
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$; $f(\pi)=-4$

30 **1. a)** $f(x+2\pi)=\frac{1-\cos(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=f(x)$
b) $f(-x)=\frac{1-\cos(-x)}{2+\cos(-x)}=f(x)$
2. $g(x+2\pi)=1+5\cos^2(x+2\pi)=g(x)$
$g(-x)=1+5\cos^2(-x)=g(x)$

34 **a)** Ni l'une ni l'autre
b) Impaire
c) Paire
d) Paire
e) Ni l'une ni l'autre

38

x	$-\pi$		0		π
Variations de la fonction cosinus	−1	↗	1	↘	−1

x	0		π		2π
Variations de la fonction cosinus	1	↘	−1	↗	1

40 **a)** $f'(x)=3\cos(x)+2x\cos(x)-x^2\sin(x)$
$=\cos(x)(3+2x)-x^2\sin(x)$
b) $f'(x)=-2\sin(x)+1$
c) $f'(x)=\frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$
d) $f'(x)=10x\sin(x)-5x^2\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)$
$f'(x)=9x\sin(x)+\cos(x)(1-5x^2)$

44
a) $S=\left\{-\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
b) $S=\left\{\frac{\pi}{24}+\frac{1}{3}k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
c) $S=\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$
d) $S=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{8}+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

47 **a)** $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right[$
b) $x\in\left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right]$
c) $x\in\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$
d) $x\in\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]$

Préparer le BAC

83 B **84** B
85 D **86** C
87 B **88** C
89 C

90 **1.** $AD = \dfrac{AB}{\cos(\theta)} = \dfrac{4}{\cos(\theta)}$; $CD = 7 + 4\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$\dfrac{60\text{ km}}{\text{h}} = 1\,000\text{ m/min}$ et $\dfrac{30\text{ km}}{\text{h}} = \dfrac{500\text{ m}}{\text{min}}$

$t_1 = \dfrac{1}{125\cos(\theta)}$; $t_2 = \dfrac{7 + 4\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1\,000}$

2. $t_1 < t_2 \Leftrightarrow \dfrac{8}{\cos(\theta)} < 7 + 4\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow f(\theta) > 0$

3. $f'(\theta) = \dfrac{2}{\cos^2(\theta)} - 4\dfrac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{2(1 - 2\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)}$

sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

f' est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ donc f' est strictement positive sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et s'annule en $\dfrac{\pi}{6}$.

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) > 0$

Le lapin s'en sort si $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

91 **1.** Voir le logiciel de géométrie dynamique.

2. a) $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

b) $\mathscr{A}(\theta) = \dfrac{(1 + AD) \times h}{2} = \dfrac{(1 + 1 + 2\cos(\theta)) \times \sin(\theta)}{2}$

$= (1 + \cos(\theta))\sin(\theta)$

c) $\mathscr{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))\cos(\theta)$

$\mathscr{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta)$

$\mathscr{A}'(\theta) = 2\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1$

On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(\theta)$.
On étudie alors le signe du polynôme $2X^2 + X - 1$ sur $[0\,;1]$.
On obtient alors :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathscr{A}'(\theta)$		0	
Variations de $\mathscr{A}$	0 ↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘ 1

d) On en déduit que pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, l'aire du trapèze est maximale.

92 **1.** $f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)$

2. $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)$
$= -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$

3. $\sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$

$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

4.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$-\sin(x)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 + 2\cos(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

5.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
Variations de f	$2{,}5$ ↘	$0{,}25$ ↗	$0{,}5$ ↘	$0{,}25$ ↗	$2{,}5$

93 **A ▶ 1.** $f'(x) = \dfrac{9x^4 - 18x^2 + 9}{(3x^2 + 1)^2}$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = x^2$ et on étudie le signe de $9X^2 - 18X + 9$.
Comme $\Delta = 0$, ce polynôme est toujours positif.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. $y = f'(0)x + f(0)$
$y = 9x - 3$

B ▶ 1. $g(x + 2\pi) = g(x)$

2. a) $g(x) = f(\sin(x))$

b) $g'(x) = \cos(x) \times \dfrac{9\sin(x)^4 - 18\sin(x)^2 + 9}{(3\sin(x)^2 + 1)^2}$

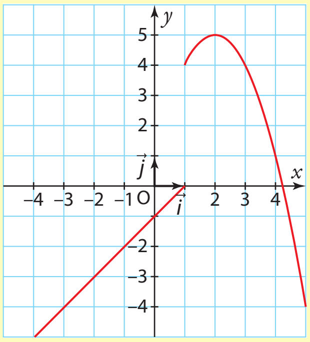
3. La fonction cosinus est positive sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g	-3	↘	-6	↗	0	↘	-3

4 Continuité

À vous de jouer !

1 **1.** On obtient :



On peut conjecturer que la fonction est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

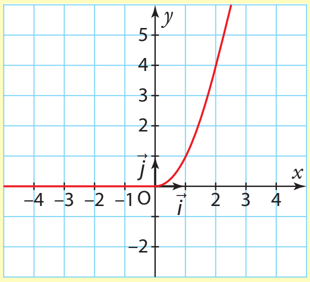
2. Si $x \neq 1$, la fonction f est continue car un polynôme est continue sur son ensemble de définition.
Si $x = 1$, la fonction f est discontinue car :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} x - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} -x^2 + 4x + 1 = 4\end{array}\right\}\text{Pas de limite en 1.}$$

3 **1.** La fonction en continue en 0 car :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$

2. On obtient



La fonction f est dérivable en 0 car la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

5 La fonction associée à la suite est :

$f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composition de fonctions contiunues, d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$\dfrac{1}{3}\sqrt{x^2 + 8} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x \overset{x\geqslant 0}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 8 = 9x^2 \Leftrightarrow 8x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = \pm 1$

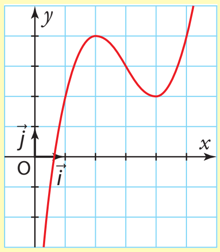
La suite (u_n) étant de termes positifs : $\ell = 1$.

7 **1.** Lafonction est dérivable sur $[0\,;+\infty[$
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$
• $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = 2$.
• le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme.
On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-12	↗	8	↘	4	↗	$+\infty$

2. a) • Sur $[0\,;2]$, la fonction f est continue (dérivable), strictement croissante et change de signe car $f(0) = -12$ et $f(2) = 8$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
• Sur $]2\,;+\infty[$, $f(x)$ est minorée par 4, donc ne peut s'annuler.
Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\,;+\infty[$.

b) On constate que la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses.



9 **1.** On peut proposer le programme :

```
def u(n):
    u=1
    for i in range(1,n+1):
        u=9/(6-u)
    return u
```

On peut remplir le tableau de valeurs suivant.

n	10	50	100	1 000
$u(n)$	2,739	2,942	2,970	2,997

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 3.

2. a) $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{6\}$ donc continue sur [1 ; 3].

b) D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation :

$$\frac{9}{6-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Donc $\ell = 3$.

11 **1.** On obtient : $f'(x) = 12g(x)$ avec : $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

2. a) On étudie les variations de g.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

$\Delta = 4 - 24 = -20$ donc $g'(x)$ ne s'annule pas.

La fonction g est alors strictement croissante, continue et change de signe car $g(-1) = -0$ et $g(0) = 1$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in [-1 ; 0]$.

b) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice on obtient :

$-0{,}57 < \alpha < -0{,}57$.

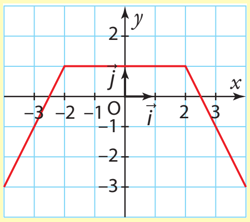
c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercices d'application

20 **1.** On obtient la courbe suivante.



On peut donc conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $\mathbb{R}\setminus\{-2 ; 2\}$ la fonction f est continue car composées de fonctions élémentaires.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^-} 2x+5 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} 1 = 1 \end{array}\right\}$ f est continue en -2

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to2^+} -2x+5 = 1 \end{array}\right\}$ f est continue en 2

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

25 **1.** La continuité du volume vient du fait que l'ajout de liquide étant continue, son volume aussi.

La fonction volume ne sera pas dérivable en 60, car le volume étant proportionnel à la hauteur, le coefficient de proportionnalité change en 60.

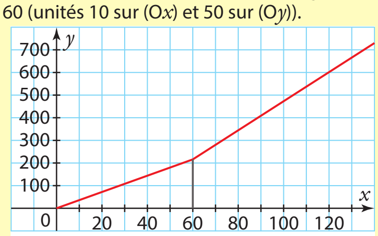
2. a) 1 ℓ = 1 dm³, pour avoir le volume en litres, il faut exprimer toutes le mesure en dm³.

$$\begin{cases} V(x) = 3{,}6x & \text{si } x \leqslant 60 \\ V(x) = 6{,}4x - 168 & \text{si } 60 < x \leqslant 140 \end{cases}$$

b) On a :

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to60^-} 3{,}6x = 216 \\ \lim\limits_{x\to60^+} 6{,}4x - 168 = 216 \end{array}\right\}$ V est continue en 60

Si l'on trace la fonction V sur la calculatrice, on observe que la courbe n'a pas de tangente en 60 (unités 10 sur (Ox) et 50 sur (Oy)).



29 La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie :

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \overset{\times 2x}{\Leftrightarrow} x^2 + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

On obtient $= \pm\sqrt{2}$, comme la suite (u_n) est minorée par 0, on a alors $\ell = \sqrt{2}$.

33 • Sur [0 ; 3], $f(x) \leqslant -2$, donc $f(x)$ ne peut s'annuler.

• Sur $[3 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $f(3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

Exercices d'entrainement

40 **1. a)** f est continue sur $I = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ car f est une fonction rationnelle.

b) $\dfrac{2x+1}{x+2} = x \Leftrightarrow 2x + 1 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 = 1$

On obtient alors $x = \pm 1$.

c) $f'(x) = \dfrac{2(x+2) * 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

Pour tout, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) Initialisation $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 < 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(1).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 1$$

La proposition est héréditaire.

Conclusion Par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$$

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur ℓ et la suite (u_n) est convergente ; d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = 0$, comme $\ell \geqslant 0$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 1$.

44 **A ▶ 1.** $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

• $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• signe de $g'(x)$ est le signe du trinôme.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur [1 ; 3], g est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $g(1) = -6$ et $g(3) = 14$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

3. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B ▶ 1. $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{x(3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$

2. Limites en $\pm\infty$: $f(x) = \dfrac{x^2(x+2)}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{x+2}{1 - \dfrac{1}{x}}$

Par quotient, on trouve :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Limite en ± 1 : on détermine le signe de $x^2 - 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient alors les limites :

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+1^+} f(x) = +\infty$

3. Le signe de $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Préparer le BAC

64 A et D

65 A

66 B

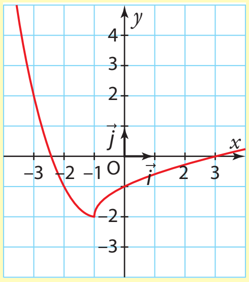
67 B

68 C

69 C

70 B

71 **1.** On obtient :



On peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

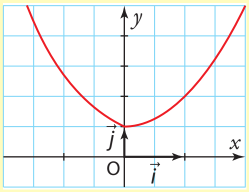
2. Sur $x \neq -1$, la fonction est continue car composée de fonctions continues.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} x^2+2x-1=-2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{x+1}-2=-2\end{array}\right\} f \text{ est continue en } -1$$

72 **1.** On a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1=1\end{array}\right\} \begin{array}{c} f \text{ est continue}\\ \text{en } 0\end{array}$$

2. On obtient :



La non dérivabilité en 0 s'explique par l'absence de tangente en 0.

73 **1.** f est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition et donc sur $[0\,;9]$.

2. a) On montre facilement par récurrence l'encadrement.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 9, donc d'après le theorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \leqslant 9$.

c) La fonction f est continue sur $[0\,;\,9]$ et la suite (u_n) est convergente vers ℓ, donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation

$$f(x)=x \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{29}}{2}\approx 5{,}19$$

$$\text{ou } x=\frac{5-\sqrt{29}}{2}\approx -0{,}19\,.$$

On en déduit alors que $\ell=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

74 **1.** On a :

$$f'(x)=1+\frac{2x}{(x^2+1)^2}-\frac{x^4+2x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$(x+1)(x^3-x^2+3x+1)=x^4+2x^2+2x+1$$

On en déduit alors que :

$$f'(x)=\frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}.$$

2. a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x)=x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Par produit, on déduit :

$$\lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\end{array}\right.$$

b) $g'(x)=3x^2-2x+3$

$\Delta=-32<0$ donc $g'(x)$ n'a pas de racine.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)>0$ donc la fonction g est croissante.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+		
g	$-\infty$ ↗	-4 ↗	1 ↗	$+\infty$

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe car $g(-1)=-4$ et $g(0)=1$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α et $\alpha \in [-1\,;0]$.

d) On trouve $-0{,}296 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}295$.

3. a) si $x<\alpha$, $g(x)<0$ et si $x>\alpha$, $g(x)>0$.

b) $f'(x)$ est du signe de $(x+1)g(x)$.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$x+1$		–	0	+		+	
$g(x)$		–		–	0	+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

75 **1. a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x+3=+\infty$

b) $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ et comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$, $x<0$, $f'(x)<0$ et $x>0$, $f'(x)>0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-0		+	
f	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

2. a) Sur $]-\infty\,;0]$ et sur $[0\,;+\infty[$ la fonction f est continue, strictement monotone et change de signe donc sur chacun de ces intervalles l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

b) $f(1)\approx-1{,}28$ et $f(2)\approx 2{,}38$ donc $\beta \in [1\,;2]$.

Par balayage, on trouve : $\beta \approx 1{,}5$ au dixième.

76 **A ▸ 1.** On a les équivalences pour $x \neq 0$:

$$\mathrm{e}^x=\frac{1}{x} \overset{\times x}{\Leftrightarrow} x\mathrm{e}^x-1=0 \overset{\div \mathrm{e}^x}{\Leftrightarrow} x-\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow f(x)=0$$

2. a) Par somme, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $f'(x)=1+\mathrm{e}^{-x}>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α. De plus $f(0{,}5)\approx-0{,}11$ et $f(1)\approx 0{,}63$ donc $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

d) Comme f est croissante si $x \in [0\,;\alpha]$, $f(x)<0$.

B ▸ 1. a) On a les équivalences pour $x \neq 0$

$$\mathrm{e}^x=\frac{1}{x} \overset{\times x}{\Leftrightarrow} x\mathrm{e}^x=1 \overset{+x}{\Leftrightarrow} x\mathrm{e}^x+x=x+1$$

$$\Leftrightarrow x(\mathrm{e}^x+1)=x+1 \overset{\div(\mathrm{e}^x+1)}{\Leftrightarrow} \frac{x+1}{\mathrm{e}^x+1}=x \Leftrightarrow g(x)=x$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=\frac{1(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x(1+x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=\frac{1-x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}-x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}=-\frac{\mathrm{e}^x f(x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}>0$, on en déduit que le signe de $g'(x)$ est celui de $-f(x)$.

Comme sur $\in[0\,;\alpha]$, $f(x)<0$ alors $g'(x)>0$.

La fonction g est croissante sur $[0\,;\alpha]$.

2. a) Initialisation $n=0$, on a $u_0=0$ et $u_1=\dfrac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1<\alpha$. La proposition est initialisée.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}<\alpha$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}<\alpha$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}<\alpha \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(u_{n+1})$$
$$<g(\alpha) \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}<\alpha$$

La proposition est héréditaire.

Conclusion Par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}<\alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par α, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers ℓ.

De plus, la fonction g est continue sur $[0\,;\alpha]$, d'après le théorème du point fixe, $\ell=\alpha$.

c) On peut proposer le programme suivant.

```
from math import*
def u(n):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=(1+u)/(1+exp(u))
    return u
```

Pour $n=4$, on trouve alors $u_4 \approx 0{,}567\,143$.

Corrections exercices :

5 Dérivation et convexité

À vous de jouer !

1 Le schéma de composition de la fonction f est $\begin{array}{ccccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} & \xrightarrow{v} & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x+2 & \mapsto & (x+2)^3\end{array}$.

3

$$f\circ g(6)=f(g(6))=f\left(\frac{1}{6}\right)=3\left(\frac{1}{6}\right)+1=\frac{1}{2}+1=1{,}5$$

5 $f'(x)=(-1)\mathrm{e}^{3x}+(-x+1)3\mathrm{e}^{3x}$
$=\mathrm{e}^{3x}(-1-x+1)=-x\mathrm{e}^{3x}$.

7 La fonction peut être étudiée seulement sur une période.

$f(x) = \sqrt{2+\cos(x)}$

$f'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{2\sqrt{2+\cos(x)}}$

Or $2\sqrt{2+\cos(x)} > 0$ et $-\sin(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-\pi + 2k\pi\,;0+2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.
Donc f est croissante sur $[-\pi+2k\pi\,;0+2k\pi]$ et décroissante sur $[0+2k\pi\,;\pi+2k\pi]$.
Le tableau de variations est donc, pour $k=0$:

x	0	π	2π
Variations de f	$\sqrt{3}$ ↘	1	↗ $\sqrt{3}$

9 D'après le graphique, la courbe de f est en dessous de ses sécantes sur $[-1\,;0{,}5]$ et est au-dessus de ses sécantes sur $[0{,}5\,;1{,}5]$. Donc f est convexe sur $[-1\,;0{,}5]$ et concave sur $[0{,}5\,;1{,}5]$.

11 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ si et seulement si

$\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2}$ si et seulement si

$\sqrt{a+b} \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

13 f' est décroissante sur $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.
f' est croissante sur $[0\,;1]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

15 $f(x) = xe^{-x}$
donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$
et $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$
Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x et $x-2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$.
Donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 2$. Donc f est convexe sur $[2\,;+\infty[$ et f est concave sur $]-\infty\,;2]$.

17 Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0{,}7$.

19 $f(x) = (x+1)e^{-x}$ donc
$f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}$.
$f''(x) = -1e^{-x} + (xe^{-x}) = e^{x}(x-1)$
Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc f'' change de signe pour $x = 1$. Donc le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(1\,;f(1))$ c'est-à-dire $(1\,;2e^{-1})$.

21 $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}e^{3\sqrt{x}} > 0$
Le tableau de variation est donc :

x	0	$+\infty$
Signe $f'(x)$	$+$	
Variations de f	1 ↗	$+\infty$

23 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ et

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. f'' change de signe pour $x = 1$ donc la croissance commence à ralentir au bout du 1^er^ mois c'est-à-dire à partir du 1^er^ février 2020.

Exercices d'application

40 **1.** Le schéma de composition de la fonction f est $x \overset{u}{\longmapsto} x^2+1 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x^2+1}$ ($\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathbb{R}$).

2. Comme $x^2+1 > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

46 $g\circ f(1) = g(f(1)) = g(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

$f\circ g(3) = f(g(3)) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{3}+1} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

53 $f'(x) = -e^{-x+2}$

61 **1.** Le schéma de composition de la fonction f est $x \overset{u}{\longmapsto} x^3-1 \overset{v}{\longmapsto} \sqrt{x^3-1}$ ($\mathbb{R} \xrightarrow{u} \mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathbb{R}$).

2. f existe si et seulement si $x^3-1 \geqslant 0$ si et seulement si $x^3 \geqslant 1$ si et seulement si $x \geqslant 1$.
Donc $\mathscr{D}_f = [1\,;+\infty[$.

3. $g'(x) = 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variation.

x	1	$+\infty$
Signe $g'(x)$	$+$	
Variations de g	0 ↗	$+\infty$

4. On en éduit le tableau de variation de f :

x	1	$+\infty$
Variations de f	0 ↗	$+\infty$

65 f est concave sur $[-2\,;-1]$ et convexe sur $[-1\,;+\infty[$.

69 $x \mapsto e^{x}$ est convexe donc sa courbe est au-dessus de ses tangentes. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 est $T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 1x + 1 = x + 1$.
Donc $e^{x} \geqslant 1 + x$ pour tout réel x.

72 f' est croissante sur $]-\infty\,;6]$ et f' est décroissante sur $[6\,;+\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty\,;6]$ et f est concave sur $[6\,;+\infty[$.

76 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 12x$ et $f''(x) = 6x + 12$.
2. $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $6x + 12 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant -\dfrac{12}{6}$ si et seulement si $x \geqslant -2$.
Donc f est convexe sur $[-2\,;+\infty[$.

81 Graphiquement, les points d'inflexion sont ceux d'abscisses -2 et 2.

83 **1.** Tableau de signes de $f''(x)$:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe $f''(x)$	$+$	0	$-$

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée $6 + (6-4)e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}$.

Exercices d'entrainement

87 **1. a)** $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \,]-\infty\,;2] \cup [5\,;+\infty[$. (Calculer le discriminant Δ pour trouver les racines puis le signe du polynôme en fonction de a).
b) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc : $D_g = \,]-\infty\,;2] \cup [5\,;+\infty[$.

2. a) Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - 7x + 10 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = \dfrac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+10}}$. Donc $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \dfrac{7}{2}$ donc g est croissante sur $\left[\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\right]$.

c) Tableau de variations de f et g :

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$ ↘	0	0	↗ $+\infty$

Exercices bilan

Préparer le BAC

117 B	**118** B
119 D	**120** A
121 C	**122** A
123 D	**124** D
125 A D	**126** D

127 **1.** $g\circ u(-1) = g(u(-1)) = g(2) = -1$
et $u\circ g(2) = u(g(2)) = u(-1) = 2$.
2. Sur $]-\infty\,;-1]$, la fonction u est décroissante et cet intervalle a pour image l'intervalle $[2\,;4]$.
Or sur $[2\,;4]$, la fonction g est croissante. Donc la fonction $g\circ u$ est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(u(x)) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} g(X) = +\infty$ et on conclut par théorème sur les limites de composée.

128 **1.** Les fonctions $x \mapsto mx$ et $x \mapsto \cos(x) + x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $D_{g_m} = \mathbb{R}$.

2. $g_m(1) = \cos(m) + m$ et $g_m(-1) = \cos(-m) - m$
$= \cos(m) - m$.
Donc, pour $m > 0$; $g_m(-1) \neq g_m(1)$ et, pour $m \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $g_m(-1) \neq -g_m(1)$. Donc la fonction g_m n'est ni paire ni impaire.
La fonction $x \mapsto \cos(mx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{m}$ mais la fonction $x \mapsto mx$ n'est pas périodique. Donc g_m n'est pas périodique. On ne peut pas restreindre l'intervalle d'étude de cette fonction.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \cos(mx) + mx = \cos(0) + 0 = 1$ et

$\lim\limits_{x \to \frac{2\pi}{m}} \cos(mx) + mx = \cos(2\pi) + 2\pi = 1 + 2\pi$.

$g'_m(x) = -m\sin(mx) + m = m(1 - \sin(mx)) \geqslant 0$

Donc g_m est croissante sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{m}\right]$.

4. Voici le tableau de variation de g_m sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{m}\right]$:

x	0	$\frac{2\pi}{m}$
Variations de g_m	1 ↗	$1 + 2\pi$

129 **1.** $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$
donc $f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x$
$= (-5x^2 - 10x + 5)e^x$.
Par suite, $f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x$
$= -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5 = 400 - 100$
$= 300 > 0$ d'où $x_1 = -2 - \sqrt{3}$
et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.
Donc $5x^2 + 20x + 5 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[$.
Or $-e^x < 0$ pour tout réel x.
Donc $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si
$x \in]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[$
et $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si
$x \in [-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}]$.

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont donc : $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur
$]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[$ et convexe sur $[-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}]$.

130 **1.** $-x + 1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x + 1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{-x + 1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{-x+1}} = e^0 = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

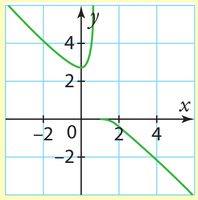
3. $f'(x) = -\frac{x}{x - 1} e^{\frac{1}{-x+1}}$. Or $-e^{\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\frac{x}{x-1}$. Or $\frac{x}{x-1} > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$ et négatif sinon. Donc

f est décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$ et croissante sur $[0 ; 1]$.
La fonction possède deux extrema :
- un minimum local pour $x = 0$: A(0 ; e),
- un maximum local pour $x = 1$: B(1 ; 0).

4. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	e ↗	$+\infty$ ‖ 0 ↘	$-\infty$

5.



131 **1.**
$f'(x) = 0 + 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42)\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}$
$= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}$.

2. $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$. $-14x + 28 \geqslant 0$ si et seulement si $28 \geqslant 14x$ si et seulement si $\frac{28}{14} \geqslant x$ si et seulement si $2 \geqslant x$. D'où le tableau de variations :

x	0	2	60
Variations de f	112 ↗	$70 + 70e^{-0,4}$ ↘	$70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$. Le <point A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.
b) $\frac{14}{25}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x - 7 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 7$. Donc f est convexe sur $[7 ; 60]$ et concave sur $[0 ; 7]$.
c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

6 Fonction logarithme népérien

À vous de jouer !

01 **a)** $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$
b) $e^{2x} = -1$; $S = \{\varnothing\}$
c) Conditions d'existence : il faut que $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in I =]-\infty ; 2[$.
$\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1$ et $x \in I$
$\Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; 2 - \frac{e}{2}\right[$.
d) $e^{x+1} \geqslant 2 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow x \in [\ln(2) - 1 ; +\infty[$.

03 **a)** Conditions d'existence : $x \in]-1 ; +\infty[$ et $x \in]-\infty ; 0[$ d'où $x \in I =]-1 ; 0[$.
$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$ et $x \in I$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
b) Conditions d'existence :
$x \in I =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; +\infty[$
$\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leqslant (5)$ et $x \in I$
$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6} ; \sqrt{6}\right] \cap I$
$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6} ; -1\right[\cup \left]-1 ; \sqrt{6}\right]$.

05 **a)** $2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$
b) $-\ln 5$
c) $4 - 2\ln 5$
d) $-\frac{4}{5} - \ln 5$

07 **a)** $n\ln\left(\frac{5}{9}\right) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$ soit $n \geqslant 8$

b)
$2^{n-1}(2 - 7) > -3 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow n < \dfrac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)} + 1$
soit $n = 0$

09 T_e : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ soit $y = \frac{x}{e}$.
Étude du signe de $h(x) = \ln x - \frac{1}{e}$; $h'(x) = \frac{e - x}{x}$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de h	↗	0	↘
Signe de h		$-$	

Puisque $h(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, cela signifie que la courbe est toujours en dessous de sa tangente T_e.

11 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1 - x}{x^2}$, sur $]0 ; +\infty[$; $-1 - x < 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$, d'où f est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

13 $x^2\ln x - x^2 = x^2(\ln x - 1)$ Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$, donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\ln x - x^2 = +\infty$.

15 $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1 \square x^2 - (1 + x) \square 2x}{x^4}}{\dfrac{1 + x}{x^2}} = \dfrac{-x^2 - 2x}{x^2(1 + x)}$

17 **1.** $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$
$= \dfrac{\ln(x) - 2}{x^2} + \dfrac{\frac{x - 1}{x}}{x} = \dfrac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2}$
$= \dfrac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$

2. $u'(x)=\frac{1}{x}+1=\frac{1+x}{x}$ pour $x \in [e\,;+\infty[$, $u'(x)>0$; par conséquent, u est croissante sur $[e\,;+\infty[$, or $u(e)=e-2>0$, donc u est positive sur $[e\,;+\infty[$.

3. f' est donc positive sur $[e\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $[e\,;+\infty[$.

19 **1.** et **2.** $f'(x)=\frac{-4x}{-2x^2+13{,}5}$

x	$-2{,}5$		0		$2{,}5$
$-4x$		$+$	0	$-$	
$-2x^2+13{,}5$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	1		$\ln(13{,}5)$		1

3. Puisque f admet un minimum positif sur $[e\,;+\infty[$, on en déduit que f est positive sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

Exercices d'application

29 **1. a)** Conditions d'existence :
$x\in I=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $2x-1=1 \Leftrightarrow x=1\in I$

b) Conditions d'existence : $x\in I=]e\,;+\infty[$; $x-e=e \Leftrightarrow x=2e\in I$

c) $\ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2}$

d) $5-2x=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}-\frac{\ln 2}{2}$

2. a) Conditions d'existence : $x\in I=]-\infty\,;1[$; $1-x>1$ et $x\in I \Leftrightarrow x<0$ et $x\in I \Leftrightarrow$ $x\in]-\infty\,;0[$.

b) Conditions d'existence : $x\in I=\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$;

$3-2x\leqslant e$ et $x\in I \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-e}{2}\,;+\infty\right[$

et $x\in I \Leftrightarrow x\in\left[\frac{3-e}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$.

c) $e^x<3 \Leftrightarrow x<\ln 3 \Leftrightarrow x\in]-\infty\,;\ln 3[$

d) $e^x(e^x-3)\geqslant 0$ or $e^x>0$ pout tout x, cela revient donc à résoudre $e^x-3\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \ln 3$.

36 **1. a)** Conditions d'existence : $x>2$ et $x<4$ donc $x\in I=]2\,;4[$.

$3x-6=4-x$ et $x\in I \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

b) Conditions d'existence : $x\in I=]5\,;+\infty[$;

$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\ln(x-5)$ et $x\in I \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1}=x-5$

et $x\in I \Leftrightarrow x^2-6x-5=0$ et $x\in I$

$\Leftrightarrow x=3+\sqrt{14}$.

2. a) Conditions d'existence : $x\in I=\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$\ln(4x-2)\leqslant \ln\left(\frac{e}{10}\right) \Leftrightarrow x\leqslant \frac{e}{40}+\frac{1}{2}$ et $x\in I$

$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+\frac{e}{40}\right]$

b) Conditions d'existence : $x\in I=]1\,;5[$;
$5-x\geqslant x-1$ et $x\in I \Leftrightarrow x\leqslant 3$ et $x\in I$
$\Leftrightarrow x\in]1\,;3]$

39 **1. a)** $\ln 25-\ln 15=\ln\left(\frac{25}{15}\right)=\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln 16-\ln 5=\ln\left(\frac{16}{15}\right)$

2. a) $4\ln 5+2\ln 5+3\ln 5=9\ln 5$
b) $3\ln 5-\ln 5-2\ln 5-2\ln 5=-2\ln 5$

46 **a)** $n\ln\left(\frac{2}{3}\right)<\ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n>\frac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ soit $n\geqslant 23$

b) $n\ln\left(\frac{9}{7}\right)\geqslant \ln(10^6) \Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$ soit $n\geqslant 55$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{5}\right)\leqslant \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$

soit $n\geqslant 14$

d) $\ln(0{,}004)>2n\ln\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow n\geqslant \frac{\ln(0{,}004)}{2\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$

soit $n\geqslant 24$

49 **1.** T_1 : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$; $y=2x-1$

2. a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de T_1 revient à étudier le signe de
$2\ln x+1-(2x-1)=2\ln x-2x+2$
$=2(\ln x-x+1)$.

b) $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$; sur $]0\,;+\infty[$, $x>0$

$g'(x)$ est du signe de $1-x$ qui est positif sur $]0\,;1[$ et négatif sur $]1\,;+\infty[$; d'où g est croissante sur $]0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
c) $g(1)=0$, g admet un maximum nul, ce qui signifie que, pour tout $x\in]0\,;+\infty[$, $g(x)\leqslant 0$.
d) La courbe $\mathscr{C}_f$ est alors en dessous de sa tangente T_1.

53 **a)**
$f'(x)=\frac{1}{x}(x-2)+(\ln x+3)\square 1=1-\frac{2}{x}+\ln x+3$
$=-\frac{2}{x}+\ln x+4$

b) $f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(3\ln x+1)-(x-\ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x+1)^2}$

$=\frac{3\ln x-2-\frac{1}{x}}{(3\ln x+1)^2}=\frac{3x\ln x-2x-1}{x(3\ln x+1)^2}$

c) $f'(x)=3(\ln(x)-2x+1)^2\times\left(\frac{1}{x}-2\right)$

$=\frac{3(1-2x)(\ln(x)-2x+1)^2}{x}$

d) $f'(x)=\frac{3-1\square\ln x-x\square\frac{1}{x}}{2\sqrt{3x-x\ln(x)}}$

$=\frac{2-\ln x}{2\sqrt{3x-x\ln(x)}}$

58 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln(x)=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln(x)-4=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x}=+\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)+\frac{3}{x}=+\infty$.

c) $5x^2\ln(x)-4x^2=x^2(5\ln(x)-4)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln(x)-4=+\infty$ donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(5\ln(x)-4)=+\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2\ln(x)-4x^2+1=+\infty$.

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x-3=0^+$ d'où

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{\ln(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(X)}{X}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} 3x=9$

donc, par somme des limites, on a
$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{\ln(x-3)}{x-3}+3x=-\infty$.

61 **a)** $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ **b)** $\mathbb{R}$

c) $]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$ **d)** $]0\,;+\infty[$

Préparer le BAC

99 C **100** C
101 C **102** D
103 B **104** D
105 C

106 **1.** $A(0\,;1)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow f(0)=1 \Leftrightarrow c=1$; graphiquement on voit que $f'(0)=-1$ or $f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x+1}$ d'où $f'(0)=-1$
$\Leftrightarrow b-1=-1 \Leftrightarrow b=0$;
$f'(1)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=1$ d'où
$f(x)=x^2+1-\ln(x+1)$.

2. $f'(x)=2x-\frac{1}{x+1}=\frac{2x^2+2x-1}{x+1}$; sur $]-1\,;\infty[$, $x+1>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2+2x-1$.

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$		$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0{,}82$		$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} x+1=0$ et $\lim\limits_{X\to 0}-\ln(X)=+\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to-1} x^2+1=2$ donc, par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$.

$f(x)=x^2\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)+1$ pour $x\neq 0$;

$f(x)=x^2\left(1-\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\times\frac{(x+1)^2}{x^2}\right)+1$;

or $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X^2}=0$

par croissance comparée et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=1,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

et donc, par produit des limites, on a

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

3. Cela revient à résoudre

$f'(x)\times f'(0)=-1 \Leftrightarrow \left(2x-\frac{1}{x+1}\right)\times(-1)=-1$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-2=0$

avec $x\in\,]-1\,;+\infty[\,\Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, il existe donc une tangente à $\mathscr{C}_f$ perpendiculaire à T_0.

4. $f(x)-g(x)=-4-\ln(x+1)<0$

$\Leftrightarrow x\in\,]e^{-4}-1\,;+\infty[$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]e^{-4}-1\,;+\infty[$ et au-dessus sur $]-1\,;e^{-4}-1[$.

$f(x)-h(x)=-\ln(x+1)+\ln(x^2+6x+5)>0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x+1}>0$ avec $x\in\,]-1\,;+\infty[$ ce qui est toujours le cas sur $]-1\,;+\infty[$.

Par conséquent la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_h$ sur $]-1\,;+\infty[$.

$h(x)-g(x)=-4-\ln(x^2+6x+5)<0$ avec $x\in\left]-1\,;+\infty\right[\,\Leftrightarrow x\in\,]-1\,;-3+\sqrt{4+e^{-4}}\,[$,

donc la courbe $\mathscr{C}_h$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-1\,;-3+\sqrt{4+e^{-4}}\right[$ et au-dessus sur $\left]-3+\sqrt{4+e^{-4}}\,;+\infty\right[$.

107 **a)** $\lim\limits_{x\to0}5x^2-2+2\ln x=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to0}2x^2=0^+$ donc, par quotient de limites, on a $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$.

$g(x)=\frac{x^2\left(5-\frac{2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x^2}\right)}{2x^2}=\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x^2}}{2}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ par croissance comparée et par

somme des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{2}{x^2}+\frac{2\ln x}{x^2}}{2}=\frac{5}{2}$

soit $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{5}{2}$.

b)

$g'(x)=\frac{\left(10x+\frac{2}{x}\right)(2x^2)-(5x^2-2+2\ln x)\times 4x}{4x^4}$

$=\frac{3-2\ln x}{x^3}$

x	0		α		$\left(\sqrt{e}\right)^3$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+		+	0	−	
Variations de g	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{5e^3+1}{2e^3}$	↘	$\frac{5}{2}$
Signe de g		−	0	+			

c) Sur l'intervalle $]0{,}5\,;1[$, g est une fonction continue, strictement croissante telle que $g(0{,}5)<0$ et $g(1)>0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur$]0{,}5\,;1[$. Sur $]0\,;0{,}5[$, la fonction g est négative donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution et, sur $]1\,;+\infty[$, la fonction g est positive donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution.

d) Voir le tableau précédent.

2. a) $\lim\limits_{x\to0}5x^2-2\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}2x=0^+$ donc,

par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

$f(x)=\frac{x^2\left(5-\frac{2\ln x}{x^2}\right)}{2x}=\frac{x\left(5-\frac{2\ln x}{x^2}\right)}{2}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ par croissance comparée,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(5-\frac{2\ln x}{x^2}\right)}{2}=+\infty$, par produit

et quotient des limites, soit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

b) $f'(x)=\frac{\left(10x-\frac{2}{x}\right)\times 2x-(5x^2-2\ln x)\times 2}{4x^2}$

$=\frac{g(x)}{2x^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$ = signe de g		−	0	+	
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, on en déduit que f admet un minimum en α

valant $f(\alpha)=\frac{5\alpha^2-2\ln\alpha}{2\alpha}$; or on a

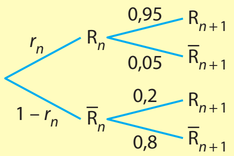
$g(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\ln\alpha=2-5\alpha^2$ d'où

$f(\alpha)=\frac{5\alpha^2-2+5\alpha^2}{2\alpha}=\frac{5\alpha^2-1}{\alpha}$.

d) $\alpha>0{,}5$ donc $5\alpha^2-1>0$ d'où $\frac{5\alpha^2-1}{\alpha}>0$.

Le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0\,;+\infty[$.

108 $P(R_{n+1})=r_{n+1}=0{,}95r_n+0{,}2\,(1-r_n)$ d'après la loi des probabilités totale, d'où $r_{n+1}=0{,}75r_n+0{,}2$.



2. Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence : $\{r_n=0{,}1\times0{,}75^{n-1}+0{,}8\}$.

Hérédité : $r_1=0{,}9$ or $0{,}1\times0{,}75^0+0{,}8=0{,}9$.

L'hypothèse est donc bien vérifiée pour $n=1$.

On suppose qu'il existe un entier k tel que (H_k) est vraie et on cherche à montrer que (H_{k+1}) est encore vraie.

$r_{k+1}=0{,}75r_k+0{,}2$

$R_{k+1}=0{,}75\times(0{,}1\times0{,}75^{k-1}+0{,}8)+0{,}2$

$R_{k+1}=0{,}1\times0{,}75^k+0{,}8$

(H_{k+1}) est donc vraie. En vertu du principe de récurrence, on a donc bien $r_n=0{,}1\times0{,}75^{n-1}+0{,}8$.

3. a)

```
R←0,9
N←1
Tant que R>0,80001
        N←N+1
        R←0,75*R+0,2
Fin tant que
```

b) $0{,}1\times0{,}75^{n-1}+0{,}8\leqslant0{,}80001$

$\Leftrightarrow 0{,}7^{n-1}\leqslant0{,}0001$

$\Leftrightarrow n\geqslant\frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}7)}+1$

Donc c'est vérifié à partir de $n=27$.

109 **1.** Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2}>0$ et $e^{-\frac{1}{x}}>0$

donc $g(x)>0$ d'où $\ln(g(x))$ est toujours bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

2. $h(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)+\ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$

$=-2\ln x-\frac{1}{x}=\frac{-2x\ln x-1}{x}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ par croissance comparée,

donc $\lim\limits_{x\to0}h(x)=-\infty$, par somme et quotient de limites.

b) $\lim\limits_{x\to0}\ln(g(x))=-\infty$ or $\lim\limits_{X\to0}\ln(X)=-\infty$, donc

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$.

7 Primitives et équations différentielles

À vous de jouer !

1 **a)** $y'(x)=5x^2+3x=f(x)$

b) $y'(x)=-\frac{3}{3x^4}=-\frac{1}{x^4}=f(x)$

4 **a)** $F(x)=\frac{5}{12}x^4$

b) $F(x)=\frac{1}{4x^4}$

6 **1.** $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

2. L'ensemble des primitives sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + K$, avec K réel.

3. La primitive F qui s'annule en 1 est telle que $F(1) = 0$ soit $1 \times \ln(1) - 1 + K = 0 \Leftrightarrow K = 1$.
$F(x) = x\ln(x) - x + 1$.

8 **a)** $F(x) = \mathrm{e}^{-x}$

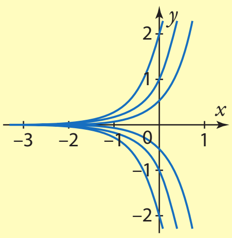
b) $F(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3 + 5)$

c) $F(x) = \frac{1}{6}(x^2 + x - 7)^6$

10 **1. a)** L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto K\mathrm{e}^{2x}$, avec K réel.

b) L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K \mapsto K\mathrm{e}^{-5x}$, avec K réel.

2. Si K est positif, alors la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses ; si K est négatif, la courbe est en dessous de cet axe.



12 **a)** Une solution particulière est la fonction constante $-\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto -\frac{1}{2} + K\mathrm{e}^{2x}$, avec K réel.

b) Une solution particulière est la fonction constante $\frac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto \frac{2}{5} + K\mathrm{e}^{-5x}$, avec K réel.

c) $y' + y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$
Une solution particulière est la fonction constante 3.
L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto 3 + K\mathrm{e}^{-x}$, avec K réel.

d) $4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$

Une solution particulière est la fonction constante 5.
L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto 5 + K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec K réel.

14 **1.** Avec $u(x) = \sin(x)$, on reconnaît la forme $u'u$: une primitive sera $x \mapsto \frac{1}{2}(\sin(x))^2$.

2. Avec $u(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x}$, on reconnaît la forme $2u'u$: une primitive sera $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+2x}$.

18 **1.** $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto K\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}$, avec K réel.

2. $y_k(0) = \mathrm{e} \Leftrightarrow K\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\times 0} = \mathrm{e} \Leftrightarrow K = \mathrm{e}$.

Donc $f : x \mapsto \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} = \mathrm{e}^{1-\frac{2}{3}x}$.

3. $f'(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{1-\frac{2}{3}x} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. $f(x) = 5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3 - 3\ln(5)}{2}$

20 **1.** L'équation différentielle est $f' = \alpha f$, où α est une constante réelle. Les solutions sont de la forme $x \mapsto f(t) = K\mathrm{e}^{\alpha t}$, avec $f(0) = 25$, on obtient $f(t) = 25\mathrm{e}^{\alpha t}$.

2. Avec la condition $f(10) = 15$, soit $25\mathrm{e}^{\alpha\times 10} = 15$,

on arrive à $f : x \mapsto 25\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x}$.

3. $f(4) = 25\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}\times 4} = 25\mathrm{e}^{\frac{2\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{5}} \approx 20{,}4$.

Il reste environ 20,4 kg de sel.

4. $f(x) = 0{,}5 \Leftrightarrow 25\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow x = \frac{-10\ln(50)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 76{,}6$

Il ne reste plus que 0,5 kg de sel au bout d'environ 76,6 h.

22 **1.** $g'(x) - 3g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x} - 3\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x}\right)$

$= 2\mathrm{e}^{1-x}$

Donc g est bien solution de (E).

2. $f'(x) - 3f(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} \Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g$

$\Leftrightarrow (f - g)' - 3((f - g) = 0$

3. $y' + 3y - 0 \Leftrightarrow y' = 3y$
Les solutions de (E′) sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{3x}$, avec K réel.
Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x} + K\mathrm{e}^{3x}$, avec K réel.

Exercices d'application

37 **1. a)** $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + \mathrm{e}^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

2. a) $F'(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x - 4} = f(x)$

sur $I =]4\,;+\infty[$

b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = f(x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$

42 **a)** $F(x) = \mathrm{e}^x$

b) $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \ln(x)$

d) $F(x) = \frac{1}{x}$

44 **a)** Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \mathrm{e}^x + k$, avec k réel.

b) Sur $I =]0\,;+\infty[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel.

c) Sur $I =]0\,;+\infty[$, $F(x) = \ln(x) + k$, avec k réel.

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{8}x^8 + k$, avec k réel.

48 **a)** $F(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

b) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 5x$

c) $F(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{4}x^4$

d) $F(x) = 2\mathrm{e}^x + x^3 + 5x$

e) $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + 5x$

55 **a)** $F(x) = \frac{1}{6}(x + 1)^6 - \frac{1}{6}$

b) $F(x) = -\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-7x} + \frac{1}{2}x^2$

c) $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-2x+2} + 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4-2\sqrt{2}}$

d) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 1)^3 - \frac{2}{3}$

58 **1. b)** e^{3x}

2. d) e^{-5x}

3. a) Une fonction solution de l'équation $y' = -y$.

66 **a)** Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{1}{2} + K\mathrm{e}^{2x}$, avec K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto 4 + K\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, avec K réel.

c) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{3}{2} + K\mathrm{e}^{-2x}$, avec K réel.

d) Les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{1}{5} + K\mathrm{e}^{\frac{5}{2}x}$, avec K réel.

71 **1. a)** Les solutions sont $y_K \mapsto K\mathrm{e}^{-0{,}12x}$, où K réel.

b) $y_K(0) = 1\,013{,}25 \Leftrightarrow K = 7$

donc $f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x}$.

2. a) $f(0{,}150) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0{,}150} \approx 995{,}17$ hPa.

b) $f(x) = 1\,013{,}25\mathrm{e}^{-0{,}12x} = 900$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{900}{1\,013{,}25}\right)}{0{,}12} \Leftrightarrow x \approx 988$ m.

Préparer le BAC

108	D	109	A
110	B	111	B
112	C	113	A
114	D	115	A

116 **1.** $G' = a\mathrm{e}^{x-1} + (ax+b)\mathrm{e}^{x-1} + 1$
$= (ax + a + b)\mathrm{e}^{x-1} + 1$
Par identification avec g, $a = 1$ et $b = -1$.

2. $1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1} = h(x)$

Une primitive de h est $H : x \mapsto x - \ln(\mathrm{e}^x+1)$.

117 **1.** Les solutions de l'équation sont de la forme $C\mathrm{e}^{kt}$, avec C réel.
$y(0) = N \Leftrightarrow C\mathrm{e}^{k\times 0} = N \Leftrightarrow C = N$

Donc $y(t) = N\mathrm{e}^{kt}$.

2. $y(2) = 4N \Leftrightarrow N\mathrm{e}^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = \ln(2)$

Donc $y(t) = N\mathrm{e}^{\ln(2)t} = 2^t N$.

$y(3) = 2^3 N = 8N$.

Au bout de 3 heures, il y a $8N$ microbes.

3. $y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200$.

118 **1.** Les solutions de (1) sont les fonctions $y_K : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$, avec K réel.

Les solutions de (2) sont les fonctions

$y_K : x \mapsto K\mathrm{e}^x$, avec K réel.

2. a) Graphiquement, $f(0) = 1$.
Le coefficient directeur de T est $\dfrac{-2-1}{-1-0} = 3$ et son ordonnée à l'origine est 1, donc T a pour équation $y = 3x + 1$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de T, soit $f'(0) = 3$.

b) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ donc f est de la forme

$A\mathrm{e}^{2x} - B\mathrm{e}^x$, avec A et B réels.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow A\mathrm{e}^{2\times 0} - B\mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow A = 1 + B$

f' est de la forme $2A\mathrm{e}^{2x} - B\mathrm{e}^x$.

$f'(0) = 3 \Leftrightarrow 2A\mathrm{e}^{2\times 0} - B\mathrm{e}^0 = 3$
$\Leftrightarrow 2A - B = 3$
$\Leftrightarrow 2(1+B) - B = 3$
$\Leftrightarrow B = 1$

Donc $A = 1 + B = 2$

Donc $f_1(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^x$

Donc $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f(x) = \mathrm{e}^x(2\mathrm{e}^x - 1)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = 0$
$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = -\ln(2)$

119 **1. a)** $2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x))$
$= 2\left(1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right)$
$= (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = f(x)$

b) Une primitive de f est :

$F : x \mapsto 2u(x)v(x) = 2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

2. a) Pour $n = 3$, l'algorithme renvoie
$s = \dfrac{1}{3}f(0) + \dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}f\left(\dfrac{2}{3}\right)$, soit la somme des aires des trois rectangles verts du graphique.
b) Lorsque n devient grand, la valeur de S_n proposée se rapproche de l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

120 Pour $x \leqslant 2$, on résout $y'(x) + y(x) = 1$.
$f : x \mapsto 1$ est une solution particulière de cette équation.
y est solution de cette équation si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -y$.
Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$, avec K réel.
Donc les solutions de $y'(x) + y(x) = 1$ sont $y_K : x \mapsto 1 + K\mathrm{e}^{-x}$, avec K réel.

$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + K\mathrm{e}^{-0} = 0 \Leftrightarrow K = -1$.

Donc la solution de $y'(x) + y(x) = 1$ est $f_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Pour $x > 2$, on résout $y'(x) + y(x) = 0$

$y'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = -y(x)$

Les solutions de cette équation sont de la forme $K\mathrm{e}^{-x}$, avec K réel.
Ainsi la solution de $y'(x) + y(x) = g(x)$ est

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \leqslant 2 \\ K\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y doit être dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi on doit avoir $1 - \mathrm{e}^{-2} = K\mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow K = \mathrm{e}^2 - 1$

Donc $y(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \leqslant 2 \\ (\mathrm{e}^2 - 1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

121 $y'(x) = 2C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^x = 2y(x) - C_2\mathrm{e}^x$

Une équation différentielle est :

$y'(x) = 2y(x) - C_2\mathrm{e}^x$.

8 Calcul intégral

À vous de jouer !

1 On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 2x$. L'intégrale est l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 4 et 10.
$\displaystyle\int_2^5 2x\,\mathrm{d}x = \frac{(4+10) \,□\, 3}{2} = 21$ u.a.

3 $\mathscr{A}_\mathrm{i} = \dfrac{5}{10}\left(\ln(1) + \ln\left(1 + \dfrac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2\times\dfrac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1 + 9\times\dfrac{5}{10}\right)\right)$

$\mathscr{A}_\mathrm{i} = \dfrac{5}{10}(\ln(1 \,□\, 1{,}5 \,□\, 2 \,□\, 2{,}5 \,□\, \ldots \,□\, 5{,}5)$
$\approx 5{,}28$ u.a.

$\mathscr{A}_\mathrm{s} = \dfrac{5}{10}\left(\ln\left(1 + \dfrac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2\times\dfrac{5}{10}\right) + \ldots + \ln\left(1 + 9\times\dfrac{5}{10}\right) + \ln(6)\right)$

$\mathscr{A}_\mathrm{s} = \dfrac{5}{10}(\ln(1{,}5 \,□\, 2 \,□\, 2{,}5 \,□\, \ldots \,□\, 5{,}5 \,□\, 6)$

$\approx 6{,}18$ u.a.

5 **a)** $\displaystyle\int_{-1}^4 (x-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^4$
$= 9 - \left(\dfrac{-8}{3}\right) = \dfrac{35}{3}$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x^2-1}{x^3-x}\mathrm{d}x = \left[\ln(x^3 - x)\right]_2^3$
$= \ln(24) - \ln(6) = \ln(4)$

7 **a)**
$\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x = \left[-x\sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x)\mathrm{d}x$
$= \left[\cos(x)\right]_0^\pi$
$= \cos(\pi) - \cos(0) = -2$

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-2+\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$

9

$\displaystyle\int_0^1 2f(t) - g(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 11$

11 $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ donc

$\displaystyle\int_2^4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x$

Donc $2 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2{,}5$.

13 f est négative sur $[-5\,;-3]$ donc
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-5}^{-3} -\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$

15 $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$. Le polynôme a deux racines -1 et 2. Il est négatif sur $[-1\,;2]$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2)\mathrm{d}x = 4{,}5$

17 $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n\cos(t)(t-1)\mathrm{d}t$

Or, sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$: $t^n\cos(t) \geqslant 0$ et $t - 1 \leqslant 0$ donc
$t^n\cos(t)(t-1) \leqslant 0$ donc $u_n+1 - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est décroissante.

sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$: $t^n\cos(t) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n\cos(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$

donc (u_n) est minorée par 0.
(u_n) est décroissante et minorée, elle converge.

19 **1.** $F'(t) = f(t)$

2. $\displaystyle\int_0^{10} f(t)\mathrm{d}t = -220\mathrm{e}^{-10} + 20 < 20$. Il respecte le cahier des charges (de justesse).

Exercices d'application

32 **1.** 6
2. 12

40 **1.** 0,2
2. Aire colorée = 0,2 ;

Aire hachurée $= 0{,}2 \times \dfrac{1}{1{,}2} = \dfrac{1}{6}$.

3. Aire des 5 rectangles hachurés.
$0{,}2\left(\dfrac{1}{1{,}2} + \dfrac{1}{1{,}4} + \dfrac{1}{1{,}6} + \dfrac{1}{1{,}8} + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1627}{2\,520}$.
Aire des 5 rectangles colorés :
$0{,}2\left(1 + \dfrac{1}{1{,}2} + \dfrac{1}{1{,}4} + \dfrac{1}{1{,}6} + \dfrac{1}{1{,}8}\right) = \dfrac{1\,879}{2\,520}$.
La fonction inverse est décroissante donc
$\dfrac{1\,627}{2\,520} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1\,879}{2\,520}$.

ou encore $0{,}64 \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0{,}74$.

43 **1.** $F'(x) = 3x^2 - 6x - 4 = f(x)$ donc F est une primitive de f.

2. $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = [x^3 - 3x^2 - 4x]_{-1}^{2} = -12$

53 $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) = 1$

60 $I + J = \int_0^{\pi} x(\cos^2(x) + \sin^2(x))\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$

66 **a)** La fonction est négative sur $[-2\,;-1]$ donc $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

b) La fonction est positive sur $[-3\,;-1]$ donc $\int_{-3}^{-1}(2x^2+1)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

c) La fonction est positive sur $[0\,;11]$ donc $\int_0^1 2xe^x \mathrm{d}x \geqslant 0$.

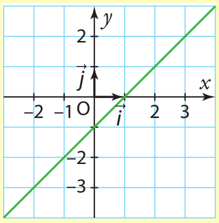
d) La fonction est négative sur $[0{,}5\,;1]$ donc $\int_{0,5}^{1}\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

68 $\int_{-1}^{4} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}t + \int_{2}^{3}(-t+3)\mathrm{d}t + \int_{3}^{4}(t+3)\mathrm{d}t$
$= 10$

71 **a)** $\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}(x^2+3)\mathrm{d}x = \frac{52}{12}$

b) $\frac{1}{8-2\mathrm{e}}\ln\left(\frac{13}{\mathrm{e}^2 - 3}\right)$

72 **1.**



2. a) $-4{,}5$

b) 2

3. $f \leqslant 0$ sur $[-2\,;1]$ et $f \geqslant 0$ sur $[1\,;3]$.

4. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5$

5. $\mathscr{A}' = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5 + 2$
$= 6{,}5$ u.a.

79 **1.** $f(x) > g(x)$ si $x \in]2\,;+\infty[$

2. $\int_{-4}^{2}(g(x) - f(x))\mathrm{d}x = 18$ u.a.

3. $\mathscr{A} = \int_{2}^{7}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 12{,}5$ u.a.

Préparer le BAC

- **132** B D
- **133** A
- **134** B D
- **135** A C
- **136** A
- **137** B D
- **138** C
- **139** C
- **140** C

141 **1.** $F(x) = -\mathrm{e}^{-kx}$

2. $\mathscr{A}_{\mathrm{OCB}} = \frac{1 \times k\mathrm{e}^{-k}}{2}$

$\mathscr{A}_{\mathrm{D}} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \mathscr{A}_{\mathrm{OCB}} = -\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k\mathrm{e}^{-k}}{2}$

3. $-\mathrm{e}^{-k} + 1 - \frac{k\mathrm{e}^{-k}}{2} = k\mathrm{e}^{-k}$ équivaut à $\left(-\frac{3}{2}k - 1\right)\mathrm{e}^{-k} + 1 = 0$.

On étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(k) = \left(-\frac{3}{2}k - 1\right)\mathrm{e}^{-k} + 1$.

$g'(k) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k\right)\mathrm{e}^{-k}$. g admet un minimum en $k = \frac{1}{3}$ et elle est continue et strictement croissante de $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ dans $\left]g\left(\frac{1}{3}\right);1\right[$.

$0 \in]-1\,;1[$ donc il admet un unique antécédent dans $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$, la fonction g est strictement décroissante et continue de $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$ dans $\left]g\left(\frac{1}{3}\right);0\right[$.

O n'appartient pas à ce dernier intervalle, il n'a pas d'antécédent par la fonction g sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$.

Ainsi, il existe une unique valeur de k strictement positive qui annule g et donc telle que l'aire de la surface D soit le double de celle du triangle OCB.

142 **1.** $f(1) = f(\mathrm{e}^2) = 0$.

2. F est la primitive de f donc $F' = f$. f est positive sur $[1\,;7{,}2]$, négative sinon donc F est croissante sur $[1\,;7{,}2]$, décroissante sinon. C'est la courbe 2 qui correspond.

3. L'aire correspond à F(7,2) – F(1) soit 12,5.

4. a) $(x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

b) $F(x) = -x^2 + (\mathrm{e}^2 - 1)(x\ln(x) - x) + 2x$

c) $\frac{1}{\mathrm{e}^2 - 1}\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\mathrm{d}x = \frac{F(\mathrm{e}^2) - F(1)}{\mathrm{e}^2 - 1}$
$= \frac{(\mathrm{e}^2 - 2)(\mathrm{e}^2 + 1)}{\mathrm{e}^2 - 1}$

143 **1.** $f(x) - g(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + 1)$ donc $f - g$ est positive sur $\mathbb{R}$ et la courbe de f est au-dessous de la courbe de g.

2. a) $H'(x) = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\ \mathrm{e}^{-x}$
$- \ -\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\ \mathrm{e}^{-x}$
$= (\sin(x) + 1)\mathrm{e}^{-x}$

b) $D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$= -0{,}5\left(\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ u.a.
$\approx 55{,}55$ u.a.

1 u.a. $= 4\ \mathrm{cm}^2$ donc $D \approx 222\ \mathrm{cm}^2$

144 **1. a)** $f_1(x) = \ln(1 + x)$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

b) f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) $I_1 = \int_0^1 \ln(1 + x)\mathrm{d}x$
$= [x\ln(1 + x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$
$= 2\ln(2) - 1$

2. a) $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \ln(1 + x^n) \leqslant \ln(2)$ et $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \ln\left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right)\mathrm{d}x$. $0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ donc $0 < \frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n} < 1$ donc $\ln\left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right) < 0$ et $I_{n+1} - I_n < 0$. La suite (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

3. a) $g'(x) = \frac{-x}{1 + x}$. g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $g(0) = 0$ et g est décroissante donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$.
$x > 0$ donc $x^n > 0$. On en déduit $g(x^n) < 0$ et donc $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$.

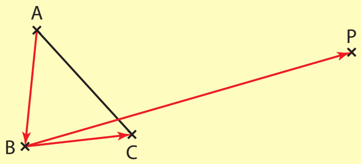
c) $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x$ donc $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Par le théorème des gendarmes, on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

9 Vecteurs, droites et plans de l'espace

À vous de jouer !

1 La construction donne :



3 **1.** Le plan (SAC) est caractérisé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{SA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$.

2. $\overrightarrow{\mathrm{SO}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{SA}} + \overrightarrow{\mathrm{SC}})$ donc O appartient au plan (SAC) par conséquent I aussi.

5 **a)** (AB) et (FH) sont non coplanaires.

b) (AF) et (SH) non coplanaires.

c) (CFH) et (AB) sont sécants.

7 **a)** (SB)

b) (SO)

c) $\varnothing$

d) Une droite parallèle à (AB) passant par S.

9 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}}$
$= -2\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} - 3\overrightarrow{\mathrm{BA}}$
$= 6\overrightarrow{\mathrm{AB}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

12 $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}}$
$= -\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}$

14 ABGH est un rectangle donc les points sont coplanaires mais le point E n'est pas dans le même plan donc le triplet est bien une base de l'espace.

16 (DK) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \\ z = t \end{cases}$

20 **1. a)** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

b) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (DBH) donc il est parallèle à ce plan.

2. a) $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$

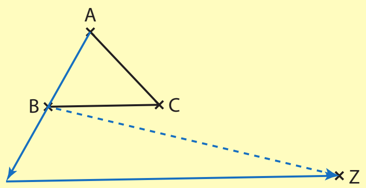
c) (MN) est parallèle à (BDH).

23 **1.** Les vecteurs directeurs de d et d' sont : $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

2. On a $\begin{cases} 1 - 2k = 2 - 4t \\ 2 + k = -2t \\ 3k = -1 + t \end{cases}$ avec les deux premières équations on obtient $k = -\frac{5}{4}$ et $t = -\frac{3}{8}$ mais ces valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc les droites ne sont pas coplanaires

Exercices d'application

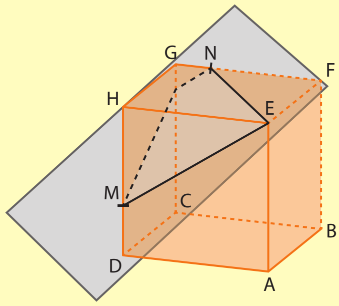
34 La construction donne :



38 **1.** Le plan (CMN) est défini par le point C et les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ donc le point A n'appartient pas au plan (CMN).

41 **a)** (CF) et (AE) sont non coplanaires.
b) (AC) et (DH) sont non coplanaires.
c) (BF) et (AC) sont non coplanaires.
d) (AH) et (CD) sont non coplanaires.

44 La section donne :



46 **1.** $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

2. On en déduit que $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$ donc que les points sont alignés.

53 **1.** $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et D sont dans le même plan donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne forment pas une base de l'espace.
2. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$ et la droite (FH) n'est pas incluse dans le plan (AEH) donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{FH}$ forment une base de l'espace.

59 **a)** $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ **d)** $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f)** $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

65 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles. Par ailleurs $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AC}$ donc les points sont coplanaires et donc les droites sont sécantes.

71 **1.** On a : $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 + k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$

2. Pour $k = 1$ on obtient B.
3. Non pas de k possible.

Préparer le BAC

110 A et D
111 A
112 B et C
113 A et B
114 D
115 A
116 B

117 **1.** C appartient à la droite pour $k = 0$.
2. D appartient à la droite pour $k = 1$.
3. On a le système : $\begin{cases} 0 = b \\ 1 = -a - b \\ 1 = -a + 2b \end{cases}$
qui donne $a = -1$ et $b = 0$.

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires et donc d est incluse dans la plan (ABC).

118 **1.** $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$

2. (IJ) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

3. $M\left(0\,;\frac{1}{3}\,;1\right)$, $N\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$ et $K\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right)$

4. Pour $k = \frac{1}{3}$ le point K appartient à la droite (IJ) donc les point I, J et K sont alignés.

119 **1.** (AD) $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$ et (MN) $\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ z = 0 \end{cases}$

2. $L\left(0\,;\frac{5}{4}\,;0\right)$

3. (PL) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + t \\ z = -t \end{cases}$

4. $K\left(0\,;1\,;\frac{1}{4}\right)$

5. La droite est incluse dans les deux plans.

6. (KL) $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}s \\ z = s \end{cases}$

120 **1.** $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{PF}$ combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.
3. donc (PF) est parallèle au plan (EGQ).

121 **1.** Faux
2. Faux
3. Faux
4. Vrai

10 Produit scalaire et plan de l'espace

À vous de jouer !

1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 - 3 = -9$

3 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2} \times AC \times \cos 60$

$$\Leftrightarrow -6 = 3\sqrt{2} \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d'où $AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

5 L'équation du plan est de la forme $2x - 3y - 4z + d = 0$ et passe par C donc : $-4 - 3 + 12 + d = 0$ donc : $2x - 3y - 4z - 5 = 0$.

7 La droite perpendiculaire passant par C a pour représentation : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -1 + k \end{cases}$

L'intersection avec le plan donne :

$2(1 + 2k) - 3(2 - 3k) + (-1 + k) - 1 = 0$ d'où : $k = \dfrac{3}{7}$

et le projeté de C est donc le point :

$H\left(\dfrac{13}{7} ; \dfrac{5}{7} ; -\dfrac{4}{7}\right)$ et la distance est : $CH = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

9 **1.** On a : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{IJ \times IK}{2} \times IL = \dfrac{4^3}{6} = \dfrac{32}{3}$

11 **1.** On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ qui ne sont pas orthogonaux donc la droite et le plan ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

2. On a : $(2 + 2k) + (1 - k) - 2k = 0$ d'où $k = 3$ et le point d'intersection est le point : $(8 ; -2 ; 3)$

13 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC}$
$= 0 + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Exercices d'application

22 **a)** $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HF} = -a^2$ **b)** $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
c) $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{3}$ **d)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = a^2$
e) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BH} = \dfrac{a^2}{2}$ **f)** $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{a^2}{2}$

28 $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$

36 **1.** $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

2. $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ donc les plans sont perpendiculaires.

44 **1.** $\overrightarrow{HA} = \vec{n}$ et H appartient au plan.
2. $AH = 3\sqrt{3}$

49 **1.** $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM}) \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN}) = EF^2 = a^2$

2. $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = $ EM ▯ EN ▯ $\cos(\widehat{MEN})$

$a^2 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2} + \cos(\widehat{MEN})$

d'où : $\cos(\widehat{MEN}) = \dfrac{4}{5}$ et $\widehat{MEN} \approx 36,87°$.

52 $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan.
b) $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ donc la droite n'est pas parallèle au plan et on remplace, ce qui donne :
$1 + k - 3(-3k) + 1 + k - 1 = 0$
d'où $k = -\dfrac{1}{11}$ et le point est : $\left(\dfrac{10}{11} ; \dfrac{3}{11} ; \dfrac{10}{11}\right)$.
c) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.
d) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.

60 **1.** $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IP} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{IP} = 0 - 1 + 1 = 0$
2. $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{LP} = (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF}) . \overrightarrow{LP} = 0 - 1 + 1 = 0$
3. La droite est perpendiculaire au plan.

Préparer le BAC

84 C **85** B
86 D **87** C
88 A et B **89** D
90 A **91** A
92 D **93** A

94 **1. a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$
b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$
c) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$
d) La droite est perpendiculaire au plan.

2. Dans le plan AEGC, K est aux 2/3 à partir de E jusqu'au milieu de [AC].

3. a) (BDE) $x + y + z - 1 = 0$
b) $d\begin{cases} x = k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$
c) $L\left(-\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$
d) $HL = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

95 **1.** $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{6a}$

2. a) $\overrightarrow{BK} = \dfrac{1}{a^2 + 2}(a^2\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{a^2 + 2}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{a^2 + 2}$

par soustraction on déduit : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
c) De même $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
d) K est l'intersection des hauteurs.

3. a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et

$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
b) La droite est perpendiculaire au plan (MBD).

4. $BD = \sqrt{2}$ et $BM = MD = \dfrac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$.

Sa hauteur vaut : $\sqrt{\dfrac{a^2 + 1}{a^2} - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 2}}{a\sqrt{2}}$.

Et l'aire vaut : $\dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{a^2 + 2}}{a\sqrt{2}}$.

96 **1.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents donc la droite est perpendiculaire au plan.

3. (ABD) $-2x + y + 3z - 6 = 0$

4. (CE) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = -7 + k \\ z = -1 + 3k \end{cases}$

5. On remplace pour obtenir $k = 2$ et donc $F(2 ; -5 ; 5)$.

97 **1.** $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. Leur produit scalaire est nul.

3. a) Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ vérifie le système :

$\begin{cases} -a - \dfrac{1}{2}b + \dfrac{1}{4}c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases}$ dont une solution est $\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\-2\\1\end{pmatrix}$.

b) (MNP) $\dfrac{5}{4}x - 2y + z = 0$

4. $d\begin{cases} x = 1 + \dfrac{5}{4}k \\ y = -2k \\ z = 1 + k \end{cases}$

5. On trouve bien K.

6. $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{MN \times MP}{2} \times FK$.

$= \dfrac{1}{6} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} = \dfrac{3}{8}$

98 **1.** (SB) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + k \\ z = -3k \end{cases}$ pour $k = -\dfrac{1}{3}$

2. a) C'est le théorème du toit.
b) $V\left(-\dfrac{2}{3} ; 0 ; 1\right)$

3. a) (AE) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = 0 \end{cases}$ pour $k = \dfrac{1}{6}$ donne K.

Et $\overrightarrow{UK} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$

b) L'aire vaut :

$\dfrac{1}{2} \times (UV + AE) \times UK$.

$= \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \dfrac{\sqrt{86}}{6} = \dfrac{5\sqrt{43}}{18}$

11 Dénombrement

À vous de jouer !

1 **1.** $A \cup B = \{n ; a ; t ; h ; y ; g ; l ; v\}$
$A \cap B = \{n ; a\}$
$A \times B = \{(n, y) ; (n, a) ; (n, g) ; (n, l) ; (n, v) ; (n, n) ; (a, y) ; (a, a) ; (a, g) ; (a, l) ; (a, v) ; (a, n) ; (t, y) ; (t, a) ; (t, g) ; (t, l) ; (t, v) ; (t, n) ; (h, y) ; (h, a) ; (h, g) ; (h, l) ; (h, v) ; (h, n)\}$
2. (n, a, t), (n, a, h), (n, t, h), (n, t, a), (n, h, a), (n, h, t), (a, n, t), (a, t, h), (a, h, n), (a, h, t), (t, a, n), (t, a, h), (t, n, h), (t, n, a), (t, h, a), (t, h, n), (h, n, a), (h, n, t), (h, a, t), (h, a, n), (h, t, n), (h, t, a)

3 Il y en a 17.

5 Il y en a 2^{20}.

7 Le nombre de podiums est de $8 \times 7 \times 6 = 336$.

9 Le nombre de tirages possibles est de $\binom{102}{7}$.

11 Le nombre de façons de choisir est de $\binom{10}{3} \times \binom{5}{2} = 120 \times 10 = 1\,200$.

13 **1.**

	Oui	Non	Total
Question 1	10	2	12
Question 2	3	3	6
Total	13	5	18

2. Il y a 13 personnes qui ont répondu oui aux deux questions.

15 **1.** $\binom{16}{4} = 1820$

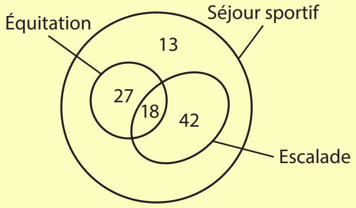
2. $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} = 4\,845 - 1820 = 3\,025$

3. $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} - \binom{4}{1} \times \binom{16}{3} = 3\,025 - 4 \times 560$
$= 785$

Exercices d'application

26 Il y a 20 sous-ensembles qui sont : $\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\,;d\}$, $\{a\,;b\,;e\}$, $\{a\,;b\,;f\}$, $\{b\,;c\,;d\}$, $\{b\,;c\,;e\}$, $\{b\,;c\,;f\}$, $\{c\,;d\,;e\}$, $\{c\,;d\,;f\}$, $\{d\,;e\,;f\}$, $\{a\,;c\,;d\}$, $\{a\,;c\,;e\}$, $\{a\,;c\,;f\}$, $\{a\,;d\,;e\}$, $\{a\,;d\,;f\}$, $\{a\,;e\,;f\}$, $\{b\,;d\,;e\}$, $\{b\,;d\,;f\}$, $\{b\,;e\,;f\}$, $\{c\,;e\,;f\}$.

29 **1.** Le diagramme donne :

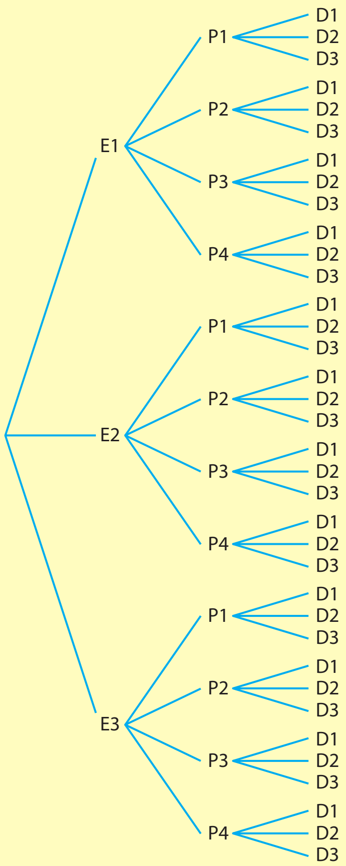


2. 42 adolescents.
3. 27 adolescents.

33 $15 \times 12 = 180$ poignées de mains.

38 $38 \times 37 \times 36 = 50\,616$ distributions possibles.

49 **1.**



2. Le nombre de menus est de $3 \times 4 \times 3 = 36$.

53 Le nombre de grilles possibles est de : $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

61 **1.** Le nombre de résultats possibles est de 6^5.
2. Avec trois faces numérotées 1, le nombre de résultats possibles est : 6^3.
3. Aucune face numérotée 1 : 5^5.
4. Au moins une face numérotée 1 : $6^5 - 5^5$.
5. Exactement une face numérotée 1 : 1×5^4.

Préparer le BAC

93 C
94 C
95 B
96 A
97 A
98 D
99 A

100 **a)** 5 joueurs **b)** 15 joueurs **c)** 10 joueurs

101 Le nombre de rangements possibles est de : $4 \times 3 = 12$.

102 Le nombre de mots est de : $5! = 120$.

103 Le nombre de tiercés est de : $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

104 **1.** Le nombre de choix possibles est de : $\binom{10}{7} = 120$.
2. Le nombre de choix devient : $\binom{3}{3} \times \binom{7}{4} = 35$.
3. Le nombre de choix devient : $\binom{4}{3} \times \binom{6}{4} = 4 \times 15 = 60$.

105 **1.** Le nombre de mains est de : $\binom{4}{4} \times \binom{48}{9}$.
2. Le nombre de mains est de : $\binom{52}{13} - \binom{48}{9}$.
3. Le nombre de mains est de :
$$\binom{52}{13} - \binom{1}{1}\binom{13}{0}\binom{38}{12} - \binom{1}{1}\binom{13}{1}\binom{38}{11} - \binom{1}{1}\binom{13}{2}\binom{38}{10} - \binom{1}{1}\binom{13}{3}\binom{38}{9}.$$
4. $4 \times \binom{13}{5} \times 3 \times \binom{13}{4} \times 2 \times \binom{13}{3} \times 1 \times \binom{13}{1}$.

106 **a)** $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$
Soit $3n(n+1) + n(n^2 - 1) = 10n^2 - 8n$
$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 10n = 0 \Leftrightarrow n(n^2 - 7n + 10) = 0$, qui a pour solution 0 ; 2 et 5. On retire la première qui est impossible, il en reste 2.
b) $5n = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
$\Leftrightarrow 24n = 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$
$\Leftrightarrow n^2 - 25 = 0$
car n est non nul, donc une seule solution $n = 5$.

107 **1.** On peut former $2^3 = 8$ nombres.
2. Leur somme est 1 776.

108 **1.** On peut former $3^3 = 27$ nombres.
2. Leur somme est 10 989.

109 Le nombre de répartitions est : $5 \times 4 \times 3 \times \binom{3}{2} = 180$.

110 **1.** Il y a $6^3 = 216$ résultats.
2. Il y en a $3^2 \times 3 = 27$.
3. Il y en a $6 \times 5 \times 4 = 120$.
4. Il y en a $6 \times 1 \times 5 = 30$.

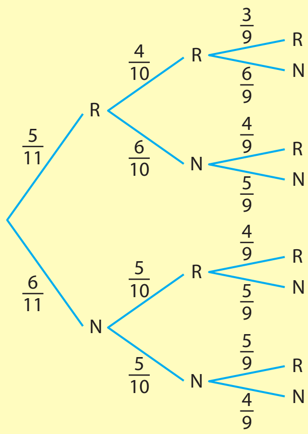
111 **1.** On peut en former $9 \times 10 \times 10 = 900$.
2. Pour cela, il faut que $c = 0$, donc il y en a $9 \times 10 \times 1 = 90$.

12 Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

À vous de jouer !

1 **1. a)** Oui : on remet la boule tirée dans l'urne donc sa composition est identique à chaque tirage.
b) Les tirages sont indépendants donc
$p((R\,;N\,;N)) = \frac{5}{11} \square \frac{6}{11} \square \frac{6}{11} = \frac{180}{1331} \approx 0{,}135$.

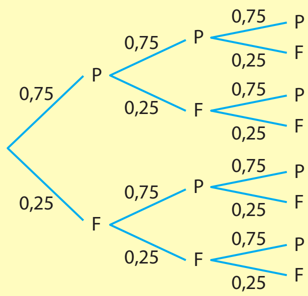
2.



$p = \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{33} \approx 0{,}152.$

3 **1.** On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir PILE par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0{,}75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement un succès est $3 \times 0{,}75 \times 0{,}25^2 = 0{,}140\,625$ (4^e^, 6^e^ et 7^e^ chemins en partant du haut).

5 **1.** X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0{,}5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

2. $p(X = 11) = \binom{20}{11} \times 0{,}5^{11} \times 0{,}5^{20-11}$

$= \binom{20}{11} \times 0{,}5^{20} \approx 0{,}16$

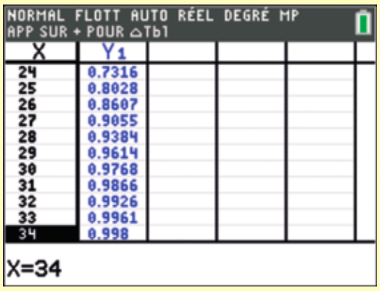
7 **1.** $p(X > 6) = 1 - p(X \leqslant 6) \approx 0{,}62$
2. $p(3 \leqslant X < 12) = p(X \leqslant 11) - p(X \leqslant 2) \approx 0{,}97$

9 • L'espérance associée à $\mathcal{B}_1$ est environ 22 et celle associée à $\mathcal{B}_2$ est environ 4 donc $\mathcal{B}_1$ a la plus grande espérance.
• Le diagramme associé à $\mathcal{B}_2$ est plus haut et moins large que celui associé à $\mathcal{B}_1$ donc c'est la loi à $\mathcal{B}_1$ qui a le plus grand écart-type.

11 La probabilité qu'il puisse accueillir tous les clients se présentant est $p(C \leqslant 43) \approx 0{,}98$ donc oui.

13 Ici, $\alpha = 0{,}1$ et $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$.
$p(Y < 3) = p(Y \leqslant 2) \approx 0{,}099\,6 > 0{,}05$
donc [3 ; 9] n'est pas centré.

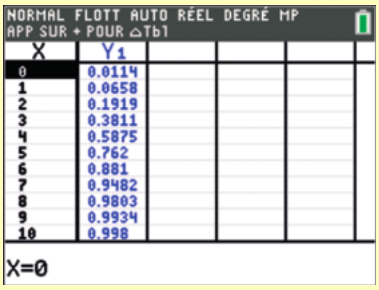
15 On tabule $p(Y \leqslant k)$:



X	Y1
24	0.7316
25	0.8028
26	0.8607
27	0.9055
28	0.9384
29	0.9614
30	0.9768
31	0.9866
32	0.9926
33	0.9961
34	0.998

donc $k = 32$.

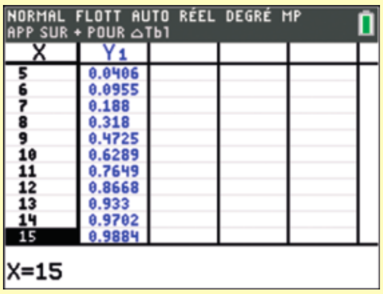
17 $p(Y \geqslant k) = 1 - p(Y < k) = 1 - p(Y \leqslant k - 1)$
donc $p(Y \geqslant k) > 0{,}8 \Leftrightarrow 1 - p(Y \leqslant k - 1) > 0{,}8$
$\Leftrightarrow p(Y \leqslant k - 1) < 0{,}2.$
On tabule $p(Y \leqslant x)$:



X	Y1
0	0.0114
1	0.0658
2	0.1919
3	0.3811
4	0.5875
5	0.762
6	0.881
7	0.9482
8	0.9803
9	0.9934
10	0.998

donc $k - 1 = 2$ puis $k = 3$.

19 Ici $\frac{\alpha}{2} = 0{,}05$ et $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$ donc on cherche les plus petits entiers a et b tels que $p(Y \leqslant a) > 0{,}05$ et $p(Y \leqslant b) \geqslant 0{,}95$
On tabule $p(Y \leqslant x)$:

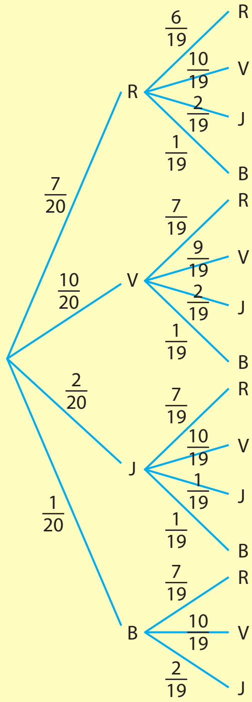


X	Y1
5	0.0406
6	0.0955
7	0.188
8	0.318
9	0.4725
10	0.6289
11	0.7649
12	0.8668
13	0.933
14	0.9702
15	0.9884

L'intervalle cherché est [6 ; 14].

Exercices d'application

32 **1.** Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.
2. Dans l'arbre ci-dessous, R désigne l'obtention d'une boule rouge, V d'une boule verte, J d'une boule jaune et B d'une boule bleue.



3. a) $\frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190} \approx 0{,}111$

b) $\frac{10}{20} \times \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{2}{19} \approx 0{,}105$

c) Appelons J_1 l'événement « la première boule est jaune » et R_2 l'événement « la deuxième boule est rouge ».

On cherche $p_{R_2}(J_1) = \frac{p(J_1 \cap R_2)}{p(R_2)}$ avec :

• $p(J_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{7}{190}$

• $p(R_2) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{1}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{133}{380} = \frac{7}{20}$

donc $p_{R_2}(J_1) = \frac{\frac{7}{190}}{\frac{7}{20}} = \frac{7}{190} \times \frac{20}{7} = \frac{2}{19} \approx 0{,}105.$

d) Appelons V_1 l'événement « la première boule est verte » et B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

On cherche $p_{B_2}(V_1) = \frac{p(V_1 \cap B_2)}{p(B_2)}$ avec :

• $p(V_1 \cap B_2) = \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{38}$

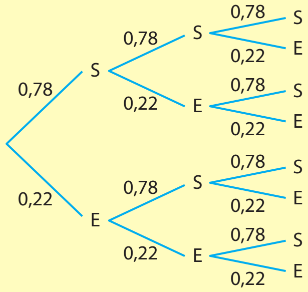
• $p(B_2) = \frac{7}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20}$

donc $p_{B_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{38}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{38} \times \frac{20}{1} = \frac{10}{19} \approx 0{,}526.$

35 **1.** C'est un tirage avec remise donc la composition de l'urne reste la même à chaque tirage : les différents tirages n'ont pas d'influence sur les autres.
2. En notant B, G, N, O et V les différentes couleurs, l'univers associé à cette succession de trois épreuves est $\{B\,;G\,;N\,;O\,;V\}^3$.
3. $p((B\,;G\,;V)) = p(B) \times p(G) \times p(V)$
$= 0{,}23 \times 0{,}12 \times 0{,}11 \approx 0{,}003$

39 En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi la spécialité mathématiques » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p = 0{,}71$.

49 **1.** On doit supposer que les lancers sont indépendants.
2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.



3. a) $0{,}78 \times 0{,}22 \times 0{,}22 + 0{,}22 \times 0{,}78 \times 0{,}22 + 0{,}22 \times 0{,}22 \times 0{,}78 \approx 0{,}113$.
b) $0{,}78^3 + 3 \times 0{,}78^2 \times 0{,}22 \approx 0{,}876$.

54 **1.** En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est « obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« obtenir rouge ») est $p = \dfrac{18}{37}$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{18}{37}$.
2. On cherche
$p(X = 9) = \dbinom{20}{9} \times \left(\dfrac{18}{37}\right)^9 \times \left(\dfrac{19}{37}\right)^{11} \approx 0{,}168$.

57 **a)** Environ 0,197.
b) Environ 0,366. **c)** Environ 0,861.
d) Environ 0,66.

64 **1.** • $E(X) = 20 \times 0{,}83 = 16{,}6$
• $V(X) = 20 \times 0{,}83 \times 0{,}17 = 2{,}822$
• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}822} \approx 1{,}680$

2. • $E(Y) = 100 \times 0{,}79 = 79$
• $V(Y) = 100 \times 0{,}79 \times 0{,}21 = 16{,}59$
• $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{16{,}59} \approx 4{,}073$

70 **1. a)** $E(X) = 10$
b) $np = 10 \Leftrightarrow n = \dfrac{10}{0{,}4} = 25$.
2. Le diagramme en barres associé à $\mathscr{B}'$ est plus haut et moins large que celui associé à $\mathscr{B}$ donc l'écart-type associé à $\mathscr{B}$ est plus grand que celui associé à $\mathscr{B}'$.

72 La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles qu'il a trouvé suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}9$.
a) $p(X < 28) \approx 0{,}589$ donc $p(X < 28) < 0{,}99$ donc non.
b) $p(X \geqslant 23) \approx 0{,}992$ donc $p(X \geqslant 23) \geqslant 0{,}99$ donc oui.
c) $p(21 \leqslant X \leqslant 29) \approx 0{,}957$ donc $p(21 \leqslant X \leqslant 29) < 0{,}99$ donc non.

75 **1.** Ici, $\alpha = 0{,}05$ donc $\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$.
$p(X<18) \approx 0{,}022$ et $p(X > 35) \approx 0{,}021$ donc $p(X < 18) \leqslant 0{,}025$ et $p(X > 35) \leqslant 0{,}025$: $[18\,;35]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.
2. Ici, $\alpha = 0{,}01$ donc $\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}005$.
$p(X < 15) \approx 0{,}003$ et $p(X > 38) \approx 0{,}004$ donc $p(X < 15) \leqslant 0{,}005$ et $p(X > 38) \leqslant 0{,}005$: $[15\,;38]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 %.

Exercices d'entrainement

93 **a)** 15 **b)** 34

97 **a)** $p(X \geqslant k) > 0{,}9 \Leftrightarrow p(X \leqslant k - 1) < 0{,}1$
On trouve $k - 1 = 30$ puis $k = 31$.
b) $p(X \geqslant k) \geqslant 0{,}05 \Leftrightarrow p(X \leqslant k - 1) \leqslant 0{,}95$
On trouve $k - 1 = 38$ puis $k = 39$.

100 On tabule $k \mapsto p(X \leqslant k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
1	0.0131
2	0.0513
3	0.1345
4	0.268
5	0.4353
6	0.6065
7	0.7533
8	0.8608
9	0.9292
10	0.9675
11	0.9865

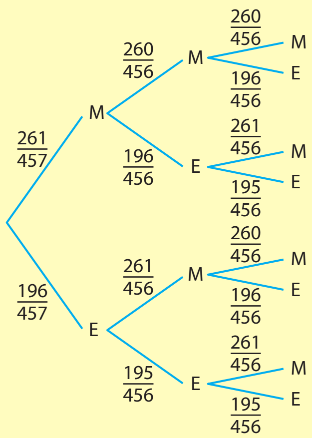
X=1

donc [2 ; 11] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leqslant 2) > 0{,}025$ et $p(X \leqslant 11) \geqslant 0{,}975$).

Préparer le BAC

120 B **121** C
122 D **123** B
124 C **125** A
126 B **127** B
128 B

129 **A ▶ 1.** Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.
2.

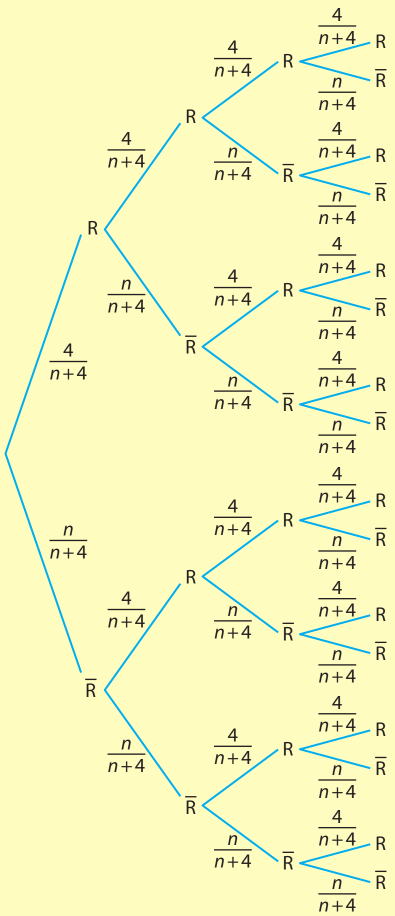


3. a) $\dfrac{261}{457} \times \dfrac{196}{456} \times \dfrac{195}{456} + \dfrac{196}{457} \times \dfrac{261}{456} \times \dfrac{196}{456}$
$+ \dfrac{196}{457} \times \dfrac{195}{456} \times \dfrac{261}{456} \approx 0{,}315$
(4e, 6e et 7e chemins).
b) On peut faire le calcul direct ou remarquer que c'est la probabilité que le téléphone joue 2 ou 3 titres électro, soit :
$\dfrac{261}{457} \times \dfrac{196}{456} \times \dfrac{195}{456} + \dfrac{196}{457} \times \dfrac{261}{456} \times \dfrac{196}{456} + \dfrac{196}{457}$
$\times \dfrac{195}{456} \times \dfrac{261}{456} + \dfrac{196}{457} \times \dfrac{195}{456} \times \dfrac{195}{456} \approx 0{,}394$.

B ▶ 1. Oui.
2. $\{M\,;E\}^5$
3. $p((M\,;E\,;E\,;E\,;M)) = p(M)^2 \times p(E)^3$
$= \left(\dfrac{261}{457}\right)^2 \times \left(\dfrac{196}{457}\right)^3$
$\approx 0{,}026$
4. $p((M\,;E\,;E\,;E\,;E)) = p((E\,;M\,;E\,;E\,;E))$
$= p(M)^1 \times p(E)^4$
$= \left(\dfrac{261}{457}\right) \times \left(\dfrac{196}{457}\right)^4$
$\approx 0{,}019$
5. Introduisons la variable aléatoire X donnant le nombre de titres « métal » joués.
X suit la binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{261}{457}$. On cherche donc :
• $p(X = 1) \approx 0{,}097$; • $p(2 \leqslant X \leqslant 4) \approx 0{,}828$.
6.

```
def cinq_titres():
  L=[]
  for i in range(5):
      if random.randint(1,457)<=261:
          L.append("Metal")
      else:
          L.append("Electro")
  return L
```

130 **1.** Le tirage est avec remise donc, en considérant que l'obtention d'une boule rouge est un succès (par exemple), on répète 4 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli.
En notant R l'événement : « la boule tirée est rouge », on a :



2. q_n est la probabilité de l'événement contraire de « aucune boule n'est noire » donc

$q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

3. $1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geqslant 0{,}999\,9 \Leftrightarrow 0{,}000\,1 \geqslant \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$

donc $n \geqslant 36$.

131 **1.** D suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,500$ et $p = 0{,}02$.
$p(D \leqslant 44) \approx 0{,}994$ donc oui.
2. a) $[20\,;41]$
b) Non car $40 \in [20\,;41]$.

132 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes (supposées indépendantes) n'aimant pas le livre dans le club. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 236$ et $p = 0{,}15$.
On cherche le plus petit entier k tel que $p(X > k) \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow p(X \leqslant k) \geqslant 0{,}99$ donc $k = 49$.

13 Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

À vous de jouer !

1 **a)** $E(X + Y) = 3 + 5 = 8$
b) $E(2{,}5X) = 2{,}5 \times 3 = 7{,}5$
c) $V(2X) = 2^2 \times 0{,}5 = 2$

3 X est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Jean sur ses 10 lancers et Y est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Sophie sur ses 20 lancers.

5 Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi de $\mathscr{B}(0{,}5)$ car la probabilité de faire PILE est 0,5.
$X_1 + X_2 + \ldots + X_{40}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}5$. Elle correspond au nombre de PILE obtenue sur les 40 lancers.

7 $E(X_1) = 12 \times 0{,}48 = 5{,}76$
Donc $E(S) = 3E(X_1) = 17{,}28$

9 **1. a)** $p(|P - 32| < 6) = p(\overline{|P - 32| \geqslant 6})$

$= 1 - p(|P - 32| \geqslant 6)$

or $p(|P - 32| \geqslant 6) \leqslant \frac{9}{6^2} = 0{,}25$

donc $-p(|P - 32| \geqslant 6) \geqslant -0{,}25$
puis $1 - p(|P - 32| \geqslant 6) \geqslant 0{,}75$
c'est-à-dire $p(|P - 32| < 6) \geqslant 0{,}75$.
b) La probabilité que ce médecin voie entre 26 et 38 patients (exclus), c'est-à-dire entre 27 et 37 patients, est supérieure ou égale à 0,75.
2. $21 = 32 - 9$ et $41 = 32 + 9$ donc on cherche $p(|P - 32| \geqslant 9)$ or $p(|P - 32| \geqslant 9) \leqslant \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$.

11 On appelle X_i pour i entier entre 1 et 100 le gain du i-ème joueur. On a alors $(X_1\,; X_2\,; \ldots\,; X_{100})$ qui est un échantillon associé à une loi d'espérance 10 et de variance 2 et

$M = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}}{100}$ sa moyenne.

On cherche $p(|M - 10| < 3) \geqslant 1 - \frac{2}{100 \times 3^2}$ avec

$1 - \frac{2}{100 \times 3^2} \approx 0{,}998$.

13 La moyenne d'un échantillon associé à une loi se rapproche de l'espérance associée à cette loi donc, ici, de $0{,}4 \times 1 + 0{,}5 \times 10 + 0{,}1 \times 30 = 8{,}4$.

15 **1.** Comme il y a 20 000 billes, ce qui est grand, on peut considérer que le prélèvement de 3 billes ne changera pas les probabilités et donc que le prélèvement peut être considéré comme un tirage avec remise de 3 billes.
2. a) La loi de X_1 est donnée par : $p(X_1 = 1) = 0{,}7$, $p(X_1 = 2) = 0{,}25$ et $p(X_1 = 9) = 0{,}05$.
Les lois de X_2 et X_3 sont considérées identiques.
b) $E(X_1) = 1{,}65$ donc $E(S) = 3E(X_1) = 4{,}95$.
$V(X_1) = 3{,}0275$ donc $V(S) = 3V(X_1) = 9{,}082\,5$.

17 **1.** $E(R) = 2{,}5$ et $V(R) = 1{,}25$.
2. Les lancers étant identiques et indépendants, les variables aléatoires $(X_1\,;\ldots\,;X_n)$ donnant les résultats de n lancers successifs forment un échantillon de variables aléatoires d'espérance 2,5 et de variance 1,25.
Appelons M la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.
On cherche à trouver n tel que
$p(|M - 2{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant 0{,}01$

or $p(|M - 2{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{1{,}25}{n \times 0{,}5^2} = \frac{5}{n}$ donc une condition suffisante est :

$\frac{5}{n} \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{5}{0{,}01} \leqslant n$ c'est-à-dire $n \geqslant 500$.

Exercices d'application

35 **a)** $E(X + Y) = 7$
b) $E(3X) = 6$
c) $E(-2Y) = -10$

44 X est la variable aléatoire donnant le résultat du dé tétraèdrique et Y est la variable aléatoire donnant le résultat du dé cubique.

49 **a)** $n = 15$ et $p = 0{,}6$
b) $n = 25$ et $p = 0{,}12$
c) $n = 150$ et $p = 0{,}999$
d) $n = 1\,000$ et $p = 0{,}2$

56 **1.** En posant X_i la variable aléatoire donnant le résultat du dé lu en i-ième position, on a $X = X_1 + \ldots + X_{100}$.
La loi des X_i est donnée dans le tableau ci-dessous.

y_i	1	2	3	4	5	6
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On a $E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_{100}) = 100E(X_1)$.

Or $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + \ldots + 6 \times \frac{1}{6} = 3{,}5$.

Donc $E(X) = 350$.
Cela signifie que sur un très grand nombre de lancers de 100 dés, on obtient en moyenne une somme proche de 350.

62 **1.** $I =]7\,;17[$
2. $J =]-\infty\,;-2]$ et $K = [8\,;+\infty[$

72 **1. a)** $p(|F - 165| \geqslant 8) \leqslant \frac{25}{8^2}$ avec $\frac{25}{8^2} \approx 0{,}39$.

b) $p(|F - 165| \geqslant 10) \leqslant \frac{25}{10^2}$ avec $\frac{25}{10^2} = 0{,}25$.

2. $p(|H - 180| \geqslant 10) \leqslant \frac{36}{10^2}$ avec $\frac{36}{10^2} = 0{,}36$:

la probabilité qu'un homme pris au hasard dans cette population mesure 1,70 m ou moins ou 1,90 m ou plus en inférieure à 0,36.

79 **1.** $E(G) = 0{,}55$ et $V(G) = 0{,}997\,5$.

2. a) $p(|G - 0{,}55| \geqslant 2{,}45) \leqslant \frac{0{,}997\,5}{2{,}45^2}$ avec

$\frac{0{,}997\,5}{2{,}45^2} \approx 0{,}17$.

b) L'événement $|G - 0{,}55| \geqslant 2{,}45$ est l'événement $G \in]-\infty\,;-1{,}9] \cup [3\,;+\infty[= [3\,;+\infty[$ puisque le gain est positif.
La probabilité de gagner plus de 3 jetons est donc inférieure à 0,17 environ.

82 **1.** Soit $X_1, X_2, \ldots, X_35$ les variables aléatoires donnant les résultats des 35 mesures de même loi que X et $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{35}}{35}$.

$p(|M - 9{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \dfrac{0{,}04}{35 \square\ 0{,}5^2}$ avec

$\dfrac{0{,}04}{35 \times 0{,}5^2} \approx 0{,}005.$

2. a) $p(|M - 9{,}5| < 0{,}2) \geqslant 1 - \dfrac{0{,}04}{35 \square\ 0{,}2^2}$ avec

$1 - \dfrac{0{,}04}{35 \times 0{,}2^2} \approx 0{,}97.$

b) On est sûr au seuil de 97 % que la moyenne des mesures réalisées sera comprise strictement entre 9,3 et 9,7 cm.

b) Il y a donc moins de 10 % de chance qu'il marque 1 700 points ou moins ou 2 000 (1 700 × 1,176 = 1999,2) points ou plus sur ces 1 700 tirs.

89 La moyenne va se rapprocher de $E(G) = -1$.

Exercices d'entrainement

104 **1.** Comme l'effectif de l'entreprise est relativement grand par rapport au prélèvement (1 500 par rapport à 10), on peut considérer que c'est un tirage avec remise.

2. $E(S) = 10 \times 1\,870 = 18\,700$.
$V(S) = 10V(X) = 10 \times 223^2$

donc $\sigma(S) = \sqrt{10 \square\ 223^2}$.

$\approx 705{,}2$

113 On considère $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ et on cherche n tel que $p(|M_n - 250| < 5) \geqslant 0{,}95$.

Comme $p(|M_n - 250| < 5) \geqslant 1 - \dfrac{100}{n \times 5^2} = 1 - \dfrac{4}{n}$,

une condition suffisante est

$1 - \dfrac{4}{n} \geqslant 0{,}95 \Leftrightarrow n \geqslant 80.$

118 **1.** Pour $\delta \geqslant \sqrt{200}$ l'inégalité est vérifiée.

2. $p(|X - 10| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{4}{\delta^2} \leqslant 0{,}02.$

Préparer le BAC

128 B	**129** B
130 B	**131** C
132 D	**133** D
134 A	**135** C et D
136 B	

137 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où elle touche la cible 1 et Y celle pour la cible 2.
Les tirs étant indépendants, on peut dire que X suit $B(20\,;0{,}4)$ et Y suit $B(10\,;0{,}1)$.
On a donc $E(X) = 8$ et $E(Y) = 1$.
Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de points : on a $Z = 5X + 20Y$.
Sur un grand nombre d'entrainements, elle peut espérer en moyenne $E(Z)$ points avec :
$E(Z) = E(5X + 20Y) = 5E(X) + 20E(Y) = 40 + 20 = 60$
c'est-à-dire 60 points.

138 **1.** La loi de X est donnée par :

x_i	-4	5	100
$p(X = x_i)$	0,78	0,18	0,04

2. D'après la ligne 11, elle est utilisée 10 fois.
3. -40 signifie que l'on a obtenu -4 dix fois (soit 10 parties perdues).
Cette probabilité vaut $0{,}78^{10} \approx 0{,}083$.
4. a) On peut écrire $S = X_1 + \ldots + X_{10}$ où X_i est le gain à la i-ème des 10 parties.
b) On a $E(S) = 10\,E(X) = 17{,}8$ car $E(X) = 1{,}78$.
On peut espérer gagner en moyenne 17,8.

139 **1.** On considère $T_1, T_2, \ldots, T_{52}$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T.

On pose alors $M = \dfrac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{52}}{52}$

et $p(|M - 600| < 60) \geqslant 1 - \dfrac{2\,000}{52 \times 60^2}$ avec

$1 - \dfrac{2\,000}{52 \square\ 60^2} \approx 0{,}989.$

2. a) $T' = T - 60$ donc $E(T') = 540$ et $V(T') = 2\,000$.
b) On considère $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T'.

On pose alors $M'_n = \dfrac{T'_1 + T'_2 + \ldots + T'_n}{n}$ et on cherche n tel que $p(|M'_n - 540| < 30) \geqslant 0{,}99$.

Comme

$p(|M'_n - 540| < 30) \geqslant 1 - \dfrac{2000}{n \square\ 30^2} = 1 - \dfrac{20}{9n}$,

une condition suffisante est

$1 - \dfrac{20}{9n} \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{2000}{9}$ donc à partir de 223 clients.

140 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}25$.
2. a) $G = 2X$
b) $E(X) = 12{,}5$ et $V(X) = 9{,}375$ donc $E(G) = 25$ et $V(G) = 37{,}5$.
3. a) $S = 2X - 0{,}5(50 - X) = 2X - 25 + 0{,}5X = 2{,}5X - 25$.
b) $E(S) = 2{,}5E(X) - 25 = 6{,}25$ et $V(S) = V(2{,}5X) = 2{,}5^2\ V(X) = 58{,}593\,75$.

c) $p(|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75) \leqslant \dfrac{58{,}593\,75}{31{,}75^2}$ avec

$\dfrac{58{,}593\,75}{31{,}75^2} \approx 0{,}058.$

d) $|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75$
$\Leftrightarrow S \in]-\infty\,;-25{,}5] \cup [38\,;+\infty[$ or le score minimal est -25 donc $|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75 \Leftrightarrow S \geqslant 38$.
La probabilité que l'on obtienne 38 points ou plus à ce jeu est inférieure à 0,058 environ.
e) $S \geqslant 38 \Leftrightarrow 2{,}5X - 25 \geqslant 38 \Leftrightarrow 2{,}5X \geqslant 63$
$\Leftrightarrow X \geqslant 25{,}2$ c'est-à-dire $X \geqslant 26$.
Ainsi, $p(S \geqslant 38) = p(X \geqslant 26) \approx 0{,}000\,04$.
f) La majoration (de l'ordre de 0,06) n'est pas très bonne puisque la « vraie » probabilité est bien plus faible (de l'ordre de 0,000 04).

Responsable éditorial : Adrien FUCHS
Coordination éditoriale : Aurore BALDUZZI, Julie DRAPPIER, Stéphanie HERBAUT, Marilyn MAISONGROSSE.
Maquette de couverture : Primo & Primo
Maquette intérieure : Primo & Primo et Delphine d'INGUIMBERT
Mise en pages et schémas : Nord Compo
Iconographie : Candice RENAULT
Numérique : Dominique GARRIGUES et Audrey BILLARD

Crédits

Couverture : ©Mauricios Ramos/Canvas Images/Alamy/Photo 12

p. 10 : Bridgeman Images ; Leemage ; Droits Réservés - **p. 11 :** akg/Science Photo Library ; Bridgeman Images ; Granger/Bridgeman Images - **p. 12 :** Archives du 7e Art/Warner Bros - **p. 46 :** Granger collection/Bridgeman images - **p. 47 :** Photo12/Alamy/The History Collection - **p. 48 :** architecte: Santiago Calatrava Valls/Robert Harding/hemis.fr - **p. 76 :** akg-images/Pictures FromHistory/- **p. 78 :** Science Photo Library/King-Holmes, James - **p. 80 :** iStock/Getty Images Plus - **p. 105 :** AKG/Science Source - **p. 136 :** Alain Schein/The ImageBank/Getty Images - **p. 159 :** Granger/Bridgeman Images - **p. 171 :** DR - **p. 202 :** Henri Stierlin/Bildarchiv Steffens/Bridgeman Images - **p. 235 :** Wikipedia - **p. 238 :** iStock Editorial/Getty Images Plus - **p. 267 :** Lee/Leemage - **p. 268 :** MP/Leemage ; Granger/Bridgeman Images - **p. 274 :** Granger collection/Bridgeman images ; Bridgeman Images ; De Agostini Picture Library/Bridgeman Images ; ©Bianchetti/Leemage - **p. 275 :** Wikipedia ; Bridgeman Images ; FototecaGilardi/Bridgeman Images - **p. 306 :** martinm303/AGE - **p. 334 :** Muriel Hazan/Biosphoto - **p. 361 :** De Agostini Picture Library/Bridgeman - **p. 362 :** Bridgeman Images ; Granger/Bridgeman Images - **p. 363 :** DR ; Granger/Bridgeman Images ; Bridgeman Images - **p. 364 :** Arnaud Robin - **p. 366 :** Jamie Grill/Getty - **p. 367 :** AFP Photo ; STREETER LECKA/GETTY IMAGES NORTH AMERICA/AFP - **p. 391 :** akg-images/IMAGNO/Votava - **p. 397 :** akg-images - **p. 402 :** Stuart Kinlough/Ikon Images/Photononstop - **p. 421 :** Jordan Mansfield/GETTY IMAGES EUROPE/Getty Images/AFP - **p. 422 :** Glyn KIRK/AFP - **p. 432 :** akg/Science Photo Library - **p. 460 :** Granger collection/Bridgeman images ; wikipedia/DR - **p. 461 :** G. DagliOrti/De Agostini Picture Library/Bridgeman Images ; Wikipedia - **p. 462 :** MP/Leemage ; Granger/Bridgeman Images ; akg-images/Science Source ; akg-images / Science Photo Library/NASA ; Wikipedia - **p. 463 :** Aisa/Leemage - **p.464 :** Lee/Leemage ; Bridgeman Images; akg images.

ISBN : 978-2-210-11405-0

Les ressources numériques

Un accès simple à vos ressources

Par lien-mini dans le manuel papier • En un clic dans le manuel numérique

Des vidéos de démonstration

Avec le youtubeur

ØLJEN
Les maths en finesse

Découvrez les 18 démonstrations du programme :

- Les idées pour comprendre les grandes lignes.
- Toutes les étapes commentées.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-07

Des vidéos déclenchantes

Découvrez les 13 chapitres avec des vidéos illustrant un problème mathématique.

VIDÉO
Distribution : la rupture de stock
lienmini.fr/maths-s07-01

En plus

- Tous les exercices de **Calculs et automatismes** sous forme de **diaporama** avec corrigés.
- Tous les **QCM** de Se tester en **version interactive**.
- Tous les **fichiers TICE**.

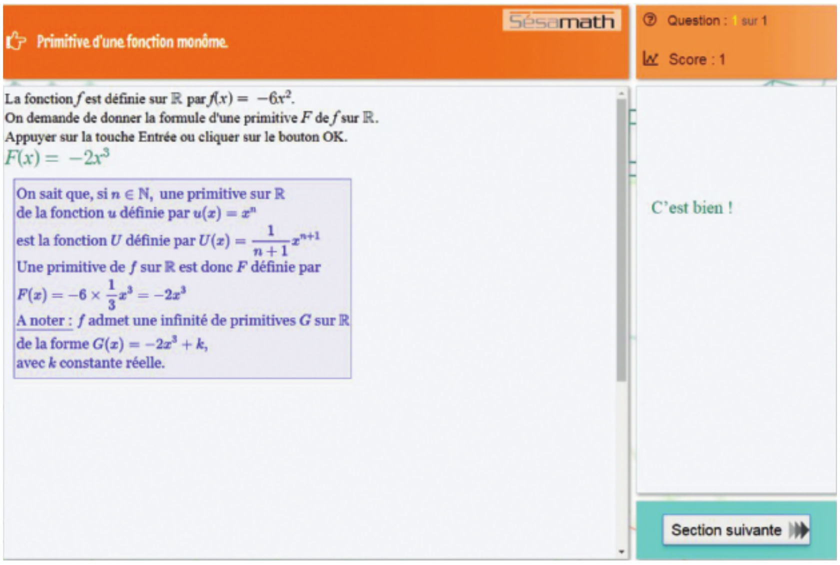
Le numérique avec Sésamath

Des parcours différenciés

EXO
Prérequis
lienmini.fr/maths-s08-02
Les rendez-vous Sésamath

Des **parcours différenciés** de réinvestissement des **prérequis**.

- Des **conseils** sont proposés en cas d'erreur.
- Les exercices proposés s'adaptent à votre niveau.
- Chaque exercice est **corrigé**.

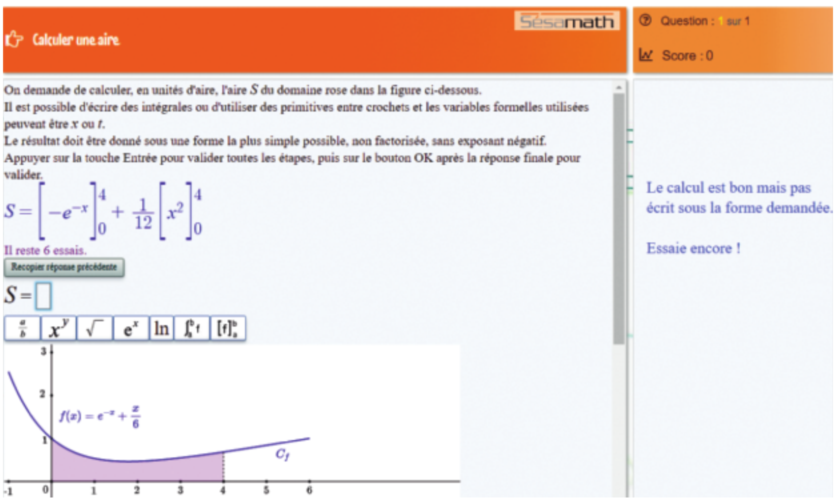


Des exerciseurs

EXO
Prérequis
lienmini.fr/maths-s08-03
Les rendez-vous Sésamath

Des **exerciseurs** portant sur les **méthodes essentielles** du programme.

- Des **conseils** sont proposés en cas d'erreur.
- Chaque exercice est **corrigé**.
- Les **paramètres** de l'exercice sont **renouvelés** à chaque ouverture afin de pouvoir faire des **gammes**.



ISBN : 978-2-210-11405-0

9 782210 114050

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

MAGNARD

www.magnard.fr