Exercices calculs et automatismes

19 Espérance d'une somme (1)

Méthode Existe-il des conditions particulières pour utiliser la formule $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$?

20 Espérance d'une somme (2)

Si $E(X)=3$ et $E(X+Y)=0{,}45$, calculer $E(Y)$.

21 Espérance d'une somme (3)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,2 et Y suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}1$ alors $E(X+Y)=$

a 0,3. b 1,2. c 1. d 0,02.

22 Linéarité d'une espérance

X et Y étant deux variables aléatoires, exprimer $E(2X+3Y)$ en fonction de $E(X)$ et $E(Y)$.

23 Variance d'une somme (1)

Méthode Existe-il des conditions particulières pour utiliser la formule $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$?

24 Variance d'une somme (2)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

X et Y étant deux variables aléatoires telles que $V(X)=0{,}4$ et $\sigma(Y)=12{,}44$. Alors $V(X+Y)=$

a 12,84. b 155,1536.
c $\approx 12{,}46$ d on ne peut savoir.

25 Variance d'une somme (3)

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X)=12{,}23$ et $V(X+Y)=15{,}26$, calculer $V(Y)$.

26 Écart-type d'une somme

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

X et Y étant deux variables aléatoires indépendantes telles que $V(X)=1$ et $V(Y)=1$. Alors $\sigma(X+Y)=$

a $\sigma(X)+\sigma(Y)$. b 2. c 1,4 environ. d 1.

27 Somme de variables aléatoires (1)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	V	F
La somme de 10 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre 0,6 suit une loi binomiale et a une espérance égale à 0,6.	☐	☐

28 Somme de variables aléatoires (2)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	V	F
La somme de 5 variables aléatoires indépendantes d'écart-type 2 a pour écart-type 10.	☐	☐

29 Échantillon

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

X est une variable aléatoire d'espérance 6,78 et de variance 1,25.

Soit $(X_1\,;X_2\,;\ldots;X_n)$ un échantillon de taille n de la loi suivie par X et $M_n=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V(M_n)=$

a 0. b 1,25. c 6,78. d $\dfrac{1{,}25}{n}$.

30 Loi des grands nombres

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Soit $(X_1\,;X_2\,;\ldots;X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires d'espérance μ et d'écart-type σ.

Lorsque n est élevé, la variable aléatoire

$M_n=\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ se rapproche de :

a μ. b σ. c μ^2. d σ^2.

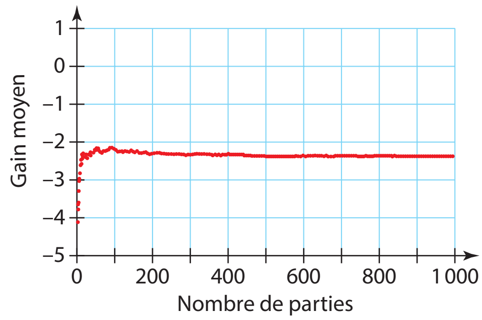
31 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et écart-type

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Soit X une variable aléatoire d'espérance 30 et d'écart-type 5. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $p(|X-30|\geqslant 10)$ est inférieure ou égale à :

a $\dfrac{1}{10}$. b $\dfrac{1}{25}$. c $\dfrac{1}{4}$. d $\dfrac{1}{30}$.

32 Loi des grands nombres



L'évolution du gain moyen d'un ou une joueuse à une table de jeu est donnée par ce graphique.

Estimer l'espérance de la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.

33 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire d'espérance 20 et de variance 9. Donner une minoration de $p(X\in\,]14\,;26[)$.

34 Inégalité de concentration

Soit $(X_1\,;X_2\,;\ldots;X_{100})$ un échantillon de 100 variables aléatoires d'espérance 34 et de variance 4 et M la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

Donner une majoration de $p(|M-34|\geqslant 5)$.

Exercices d'application

Calculer l'espérance et la variance de $X + Y$ ou aX

Méthode 1 p. 407

35 X et Y sont deux variables aléatoires telles que $E(X) = 2$ et $E(Y) = 5$. Calculer :
a) $E(X + Y)$. **b)** $E(3X)$. **c)** $E(-2Y)$.

36 X et Y sont deux variables aléatoires telles que $E(X) = 1\,500$ et $E(Y) = 60$.
1. Calculer :
a) $E(X + Y)$. **b)** $E(4X)$. **c)** $E(3Y)$.
2. En déduire $E(4X + 3Y)$.

37 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X) = -1$, $V(X) = 2$, $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 0{,}5$.
Calculer :
a) $E(X + Y)$. **b)** $E(2X + 5Y)$. **c)** $E(2X + 10)$.
d) $V(X + Y)$. **e)** $V(3X)$. **f)** $V(nY)$ avec n entier positif.

38 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous.

x_i	−2	0	3	4
$p(X = x_i)$	0,5	0,2	0,2	0,1

y_i	−10	0	20
$p(Y = y_i)$	0,33	0,48	0,19

1. Calculer $E(X + Y)$.
2. Calculer $V(X + Y)$.
3. En déduire une valeur approchée de $\sigma(X + Y)$ à 0,01 près.

39 X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,6 et Y suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,33.
On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Calculer :
a) $E(X + Y)$. **b)** $V(X + Y)$. **c)** $E(X - Y)$.

40 X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}5$ et Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}42$.
On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Calculer $E(X + Y)$, $V(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$.

41 X est une variable aléatoire sur un univers fini Ω telle que $E(X) = 3$ et $V(X) = 0{,}5$ et Y est une variable aléatoire sur Ω constante égale 6 que l'on admettra indépendante de X.
1. a) Déterminer la loi de Y.
b) Que valent $E(Y)$ et $V(Y)$?
2. Calculer $E(X + Y)$ et $V(X + Y)$.

Remarque Plus généralement, on peut noter que pour toute constante b et toute variable aléatoire X, on a $V(X + b) = V(X)$.

42 X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs -5 ; 0 ; 20 et 50. Son espérance est égale à $-3{,}91$ et son écart-type vaut 2,83.
On considère les variables Y et Z telles que $Y = 3X$ et $Z = X + 2$.
1. Déterminer les valeurs que peut prendre Y.
2. Déterminer $E(Y)$.
3. Déterminer $\sigma(Y)$.
4. Reprendre les questions **1.**, **2.** et **3.** pour la variable aléatoire Z.

43 On lance un dé tétraédrique équilibré dont les 4 faces portent les montants en euros 10 ; 1 ; −2 et −4.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique affiché.
1. Calculer $E(X)$, interpréter ce résultat et calculer $V(X)$.
2. On décide de doubler chacun des montants (par exemple 10 devient 20 ; −4 devient −8). Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce deuxième jeu.
a) Exprimer Z en fonction de X.
b) En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. On décide finalement d'ajouter 1 à chacun des montants (par exemple 10 devient 11 ; −4 devient −3).
Y est la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce troisième jeu.
a) Exprimer Y en fonction de X.
b) En déduire $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Modéliser avec une somme de variables aléatoires

Méthode 2 p. 407

44 Un jeu consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré dont les 4 faces sont numérotées de 1 à 4 et un dé cubique équilibré dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6.
On souhaite étudier la somme des résultats des deux dés.
Proposer deux variables aléatoires X et Y dont la somme $X + Y$ permet de modéliser la situation.

45 Une urne contient 100 boules numérotées de 0 à 99.
On tire au hasard une boule de l'urne puis on lance une pièce équilibrée. On a écrit −50 sur une face de la pièce et 20 sur l'autre face.
On souhaite étudier la somme des deux nombres obtenus au final.
Proposer deux variables aléatoires X et Y dont la somme $X + Y$ permet de modéliser la situation.

46 On tire au hasard et avec remise 3 cartes dans un jeu de 52 cartes.
On gagne 7 euros par as obtenu, 4 euros par valet, dame ou roi obtenu et on perd 1 euro pour n'importe quelle autre carte obtenue.
Par exemple si on tire as de pique, 7 de trèfle et 2 de carreau, on gagne : 7 − 1 − 1 = 5 euros.
On note Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique total à ce jeu.
Décomposer Z sous la forme d'une somme de trois variables aléatoires que l'on définira puis calculer $E(Z)$.

47 Le trajet de Myriam en bus pour aller au lycée lui impose un changement dans le centre-ville. Le temps de ces trajets peut varier suivant les heures, les lignes de transport et les embouteillages. Le temps de trajet entre sa maison et le centre-ville peut être de 5, 8 ou 10 min avec des probabilités respectives de $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$ et $\frac{1}{4}$.
Indépendamment, le temps de trajet entre le centre-ville et le lycée peut être de 3, 6 ou 9 min avec des probabilités respectives de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.
X est la variable aléatoire donnant le temps de trajet en minutes de Myriam entre sa maison et le centre-ville et Y est la variable aléatoire donnant son temps de trajet en minutes entre le centre-ville et le lycée.
1. Que représente la variable aléatoire $X + Y$?
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X puis celle de la variable aléatoire Y.
3. En déduire la valeur de $E(X + Y)$ puis interpréter ce nombre.

48 Les jours où elle s'entraîne au jet de 7 mètres au handball, Elia fait 30 tirs le matin et 50 l'après-midi. Elle marque avec une probabilité égale à 0,46 le matin et une probabilité égale à 0,78 l'après-midi. Tous les tirs sont supposés indépendants.
Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire donnant le nombre de tirs réussis par Elia le matin (respectivement l'après-midi).
1. Donner la loi suivie par X et celle suivie par Y.
2. Que représente $X + Y$?
3. Calculer $E(X + Y)$ et en donner une interprétation.

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathscr{B}(p)$

Méthode 3 p. 409

49 Dans chacun des cas suivants, préciser les paramètres de la loi binomiale suivie par une variable aléatoire somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
a) $n = 15$ et $p = 0,6$.
b) $n = 25$ et $p = 0,12$.
c) $n = 150$ et $p = 0,999$.
d) $n = 1\,000$ et $p = 0,2$.

50 Quelle est la loi de Bernoulli utilisée pour décomposer sous forme de somme :
a) une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(500\,;0,23)$?
b) une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(20\,;0,7)$?

51 X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale d'espérance 60. Elle se décompose en la somme de n variables aléatoires suivant $\mathscr{B}\left(\frac{3}{4}\right)$. Déterminer la valeur de n.

52 Quand il joue au bowling, Matéo a une probabilité égale à 0,1 de faire un strike.
Il lance 10 fois la boule de manière indépendante.
Pour tout entier i entre 1 et 10, X_i est la variable aléatoire prenant 1 s'il fait un strike et 0 sinon, au i-ème lancer.
1. Que peut-on dire de la variable aléatoire X définie par $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

53 On lance 30 dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. On considère la variable aléatoire Z donnant le nombre de 4 obtenu sur les 30 dés.
1. Déterminer une loi de probabilité associée à 30 variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{30}$ telle que $Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{30}$.
2. Calculer $E(Z)$ et en donner une interprétation.

54 Un test de solidité sur un prototype d'une nouvelle pièce automobile montre que dans 95 % des cas la pièce testée résiste.
On effectue 30 tests de manière indépendante et on note Y la variable aléatoire donnant le nombre de tests pour lesquels la pièce n'a pas résisté.
1. Déterminer une loi de probabilité permettant d'écrire Y sous la forme d'une somme de variables aléatoires indépendantes suivant toutes cette loi.
2. Calculer $E(Y)$.

55 X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,452$.
1. On décompose la variable aléatoire X en une somme de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli. Préciser cette loi.
2. Calculer $E\left(\frac{X}{1000}\right)$ et $V\left(\frac{X}{1000}\right)$.

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi

Méthode 4 p. 409

56 On lance 100 dés cubiques équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
X est la variable aléatoire donnant la somme des résultats de tous les dés.
1. Décomposer X en une somme de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi de probabilité que l'on précisera.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

57 Pour tout nombre entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 20$, la variable aléatoire X_i suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,3$. Les variables aléatoires X_i sont supposées indépendantes.
Calculer l'espérance et la variance de $S = X_1 + \ldots + X_{20}$.

Exercices d'application

58 La variable aléatoire X donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson dans un échantillon de 50 baguettes d'une même boulangerie suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}03$.
On recueille les résultats (indépendants) du prélèvement de 50 baguettes dans 10 boulangeries (ce qui donne 500 baguettes en tout) et on note Z la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes ayant eu une mauvaise cuisson sur l'ensemble des 10 boulangeries.
Déterminer $E(Z)$, $V(Z)$ et $\sigma(Z)$.

59 Le matin, suivant le temps dont elle dispose et selon sa faim, Carmen mange une, deux ou trois tartines au beurre avec des probabilités respectives 0,25 ; 0,62 et 0,13.
On note S la variable aléatoire donnant le nombre de tartines mangées par Carmen au cours d'une semaine.
1. Décomposer S en une somme de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi que l'on précisera.
2. Calculer $E(S)$ et $\sigma(S)$.

60 X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}579$. On considère un échantillon $(X_1 ; ... ; X_{50})$ de la loi suivie par X ainsi que les variables aléatoires $S_{50} = X_1 + X_2 + ... + X_{50}$ et $M_{50} = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_{50}}{50}$.
Déterminer les espérances et les variances de S_{50} et M_{50} au centième près.

61 X est une variable aléatoire d'espérance 5,6 et d'écart-type $\dfrac{1}{4}$. On considère un échantillon de taille n $(X_1 ; ... ; X_n)$ de variables aléatoires suivant la loi de X ainsi que les variables aléatoires $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ et
$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.
Déterminer les expressions des espérances et écarts-type de S_n et M_n en fonction de n.

Manipulations de variables aléatoires et d'inégalités

62 Soit X une variable aléatoire.
1. Déterminer l'intervalle I tel que $|X - 12| < 5 \Leftrightarrow X \in I$.
2. Déterminer des intervalles J et K tels que
$|X - 3| \geqslant 5 \Leftrightarrow X \in J \cup K$.

63 Soit Y une variable aléatoire.
Recopier et compléter les pointillés.
a) $Y \in]0 ; 10[\Leftrightarrow |Y - ...| < ...$
b) $Y \in [45 ; 51] \Leftrightarrow |Y - ...| \leqslant ...$
c) $Y \in]-\infty ; 12[\cup]14 ; +\infty[\Leftrightarrow |Y - ...| > ...$
d) $Y \in]-\infty ; 2] \cup [16 ; +\infty[\Leftrightarrow |Y - ...| \geqslant ...$

64 Soit Z une variable aléatoire telle que
$p(Z \in]-\infty ; 5[\cup]7 ; +\infty[) = 0{,}2$. Déterminer $p(Z \in [5 ; 7])$.

65 Soit Y' une variable aléatoire telle que
$p(Y' \in]-\infty ; 10[\cup]20 ; +\infty[) = 0{,}35$.
Déterminer $p(|Y' - 15| \leqslant 5)$.

66 Soit A une variable aléatoire telle que
$p(A \in]-4 ; 12[) = 0{,}72$. Déterminer $p(|A - 4| \geqslant 8)$.

67 Soit B une variable aléatoire telle que
$p(|B - 8| \geqslant 3) \leqslant 0{,}36$. Donner une minoration de $p(|B - 8| < 3)$.

68 Soit C une variable aléatoire telle que
$p(|C - 4| < 3) > 0{,}98$. Donner une majoration de $p(|C - 4| \geqslant 3)$.

69 Soit D une variable aléatoire telle que
$p(|B + 12| \geqslant 2) \leqslant 0{,}11$. Donner une minoration de $p(|B + 12| < 2)$.

70 Soit Z une variable aléatoire tel que $p(Z \in [7 ; 8]) = 0{,}25$ et $p(Z \in]8 ; 13]) = 0{,}3$.
1. Déterminer $p(|Z - 10| \leqslant 3)$.
2. En déduire $p(|Z - 10| > 3)$.

71 Soit A une variable aléatoire vérifiant
$p(|A - 10| < 3) = 0{,}4$, $p(|A - 8| < 1) = 0{,}15$ et $p(A = 9) = 0$.
Déterminer $p(|A - 11| < 2)$.

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Méthode 5 p. 411

72 Dans une population, la taille en cm d'une personne adulte prise au hasard est donnée par une variable aléatoire :
- F, d'espérance 165 et de variance 25 pour une femme ;
- H, d'espérance 180 et de variance 36 pour un homme.

1. a) Majorer la probabilité $p(|F - 165| \geqslant 8)$.
b) Majorer la probabilité que la taille d'une femme de cette population soit inférieure ou égale à 155 cm, ou supérieure ou égale à 175 cm.
2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'événement $|H - 180| \geqslant 10$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.

73 La consommation d'eau quotidienne en litres d'une ou un français pris au hasard dans la population est donnée par une variable aléatoire C d'espérance $E(C) = 150$ et de variance $V(C) = 900$.
1. a) Justifier que
$p(|C - 150| \geqslant 60) \leqslant 0{,}25$.
b) Interpréter ce résultat dans les termes de l'énoncé.
2. Justifier que la probabilité que l'écart entre C et 150 soit strictement inférieur à 90 litres est supérieure à 0,85.

74 Le nombre de messages envoyés quotidiennement par Kian via son smartphone est donné par une variable aléatoire M d'espérance $E(M) = 50$ et d'écart-type $\sigma(M) = 10$.
1. Minorer la probabilité que l'écart entre M et $E(M)$ soit inférieur à deux écarts-type.
2. a) Majorer la probabilité que Kian envoie soit 10 messages ou moins, soit 90 messages ou plus, par jour.
b) Sachant que $p(M \leqslant 10) = 0{,}01$, majorer la probabilité qu'il envoie 90 messages ou plus par jour.

75 Lycia est en 1re année de classe préparatoire. Les étudiants de 2e année ont dit que le nombre de feuilles utilisées pour les cours de maths dans l'année suit une loi F d'espérance 1 250 et d'écart-type 80. À la rentrée, Lycia a acheté deux paquets de feuilles :
- un paquet de 1 000 feuilles qu'elle ouvrira en premier ;
- un deuxième paquet de 500 feuilles.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, peut-elle être sûre « à au moins 90 % » d'utiliser au moins toutes les feuilles du plus gros paquet mais qu'elle n'ait pas besoin d'acheter un troisième paquet de feuilles pour cette année ?

76 Yolaine vient d'emménager dans son immeuble et a invité ses 45 voisins à un goûter. Elle a lu sur des forums qu'il y a une chance sur cinq qu'un ou une voisine se présente à ce genre d'événement. On suppose par ailleurs l'indépendance des venues des différents voisins.
1. Quelle loi suit la variable aléatoire X donnant le nombre de voisins qui se présenteront effectivement pour le goûter ?
2. Yolaine estime que la quantité de nourriture qu'elle a achetée pour le goûter conviendra si entre 7 et 11 voisins se présentent.
a) Écrire la phrase en remplaçant k par le plus grand entier possible : « la quantité de nourriture sera trop ou pas assez importante si $|X - 9| \geqslant k$. »
b) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à cet événement puis l'interpréter dans les termes de l'énoncé.
c) Calculer $p(7 \leqslant X \leqslant 11)$ avec la loi binomiale puis discuter la majoration obtenue à la question **2. b)**.

77 Une lanceuse de fléchettes met dans « le mille » 60 % du temps et on suppose que tous ses lancers sont indépendants.
1. Quelle loi suit la variable M donnant le nombre de lancers dans « le mille » sur 20 tentatives ?
2. a) Quand on lui demande combien elle pense mettre de lancers dans le mille, elle répond « moins de 15 mais plus de 9 ».
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donner une minoration de la probabilité qu'elle ait raison.
b) Calculer $p(9 < M < 15)$ en utilisant la loi binomiale puis discuter la minoration obtenue à la question **2. a)**.

78 Lorsqu'il va à la piscine, la distance parcourue à la nage par Mathieu (en mètres) est donnée par une variable aléatoire D d'espérance 1 000 et d'écart-type 100.
1. Justifier le fait que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne donne aucune information sur la probabilité que Mathieu parcoure 900 m ou moins, ou 1 100 m ou plus.
2. Ben a parié avec Nat que Mathieu parcourrait entre 750 et 1 250 m exclu lors de sa prochaine séance de piscine. A-t-il pris un très gros risque ?

Somme de variables aléatoires et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

79 À la fête foraine, toutes les attractions se payent en jetons et certains stands de jeux permettent de gagner des jetons.
On considère deux stands :
- le premier propose un jeu dont le gain en jetons est positif et est donné par une variable aléatoire G_1 d'espérance 0,3 et de variance 0,41 ;
- le deuxième propose un jeu dont le gain en jetons est positif et est donné par une variable aléatoire G_2 d'espérance 0,25 et de variance 0,587 5.

On joue successivement à ces deux jeux que l'on suppose indépendants et on note G le nombre de jetons obtenus au total.
1. Donner l'espérance et la variance de G.
2. a) Majorer $p(|G - 0{,}55| \geqslant 2{,}45)$.
b) Interpréter concrètement cette majoration.

Coup de pouce Que peut-on dire de l'événement $G \leqslant -1{,}9$?

80 Isshane participe à une course de régularité pour les sélections dans un club de handball : il doit faire deux fois le tour du lac et on estime qu'il est au niveau si il met entre 4 min 30 et 5 min 30 (exclu) pour boucler les deux tours.
On appelle T_1 et T_2 les temps, en secondes, réalisés au premier et second tour du lac et on suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes.
D'après les statistiques relevées après plusieurs mois d'entraînement, on considère que ces deux variables aléatoires ont 150 pour espérance et 8 pour écart-type.
1. Donner l'espérance et la variance de $T = T_1 + T_2$.
2. a) Quelle inégalité doit vérifier $|T - 300|$ pour que l'objectif fixé soit réalisé ?
b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que peut-on dire de la probabilité qu'Isshane réalise l'objectif fixé ?

Exercices d'application

81 On considère une usine fabriquant des montres à aiguilles, sans trotteuse. Les deux aiguilles sont fabriquées indépendamment. La variable aléatoire donnant la masse de l'aiguille en grammes est :

• H pour les heures, et a pour espérance 3 et pour écart-type 0,15 ;

• M pour les minutes, et a pour espérance 2 et pour écart-type 0,1.

1. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire A donnant la masse totale des deux aiguilles.

2. Pour que la montre soit bien équilibrée, la masse des deux aiguilles doit être comprise entre 4,4 g et 5,6 g (exclus). Que peut-on dire de la probabilité que ce soit le cas ?

Utiliser l'inégalité de concentration

Méthode 6 p. 413

82 Un objet a été fabriqué dans une usine de précision de sorte qu'il mesure très exactement 9,5 cm.
Lorsqu'une personne mesure cet objet, on considère que la variable aléatoire X donnant le résultat de la mesure en cm a pour espérance $E(X) = 9{,}5$ et pour variance $V(X) = 0{,}04$.
On fait mesurer indépendamment cet objet à 35 élèves d'une même classe.

1. Majorer la probabilité que la moyenne M des mesures effectuées diffère de 9,5 de 0,5 cm ou plus.

Coup de pouce On introduira les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{35}$ donnant les résultats des 35 mesures et M leur variable aléatoire moyenne.

2. a) Minorer $p(|M - 9{,}5| < 0{,}2)$.
b) Interpréter concrètement cette minoration.

83 En se basant sur les statistiques des dernières années, on considère que la loi de la variable aléatoire B donnant le nombre de buts marqués par le joueur de football Lionel Messi lors d'un match est donnée ci-dessous.

b_i	0	1	2	3	4
$p(B = b_i)$	0,41	0,35	0,17	0,06	0,01

1. Calculer l'espérance et la variance de B.

2. Sur une saison de 50 matchs, on considère B_i le nombre de buts marqués lors du i-ème match (on suppose que tous les B_i sont indépendants) et $M = \dfrac{B_1 + \ldots + B_{50}}{50}$.

a) Majorer $p(|M - 0{,}91| \geqslant 1{,}09)$.
b) Interpréter ce résultat dans les termes de l'énoncé.

84 Nicolette est factrice et distribue le courrier de 2 500 logements. Elle a constaté que le nombre de logements ayant du courrier lors d'une tournée suit la loi binomiale de paramètres $n = 2\,500$ et $p = 0{,}6$.
Pour les besoins d'une enquête, Nicolette relève pendant 200 tournées supposées indépendantes le nombre de logements pour lesquels elle dépose du courrier.

1. Soit X_i le nombre de logements ayant du courrier lors de la tournée n° i. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour tout i entre 1 et 200.

2. a) Soit $M = \dfrac{X_1 + \ldots + X_{200}}{200}$. Majorer la probabilité que M ne soit pas dans $]1\,400 ; 1\,600[$.
b) Interpréter concrètement cette majoration.

85 Lorsqu'il tire en match (hors lancers francs), le nombre de points marqués par le basketteur Kawhi Leonard est donné par une variable aléatoire X dont la loi est donnée ci-contre.

x_i	0	2	3
$p(X = x_i)$	0,508	0,388	0,104

1. Calculer l'espérance et la variance de X.

2. a) Sur 1 700 tirs effectués, majorer la probabilité que la moyenne des points marqués par tir soit dans $[0 ; 1] \cup [1{,}176 ; 3]$.
b) Interpréter cette probabilité en termes de nombre total de points marqués sur 1 700 tirs effectués.

86 On considère un jeu dont le gain algébrique en euros est donné par une variable aléatoire G de loi suivante.

g_i	-2	-1	5
$p(G = g_i)$	0,8	0,15	0,05

1. Calculer l'espérance et la variance de G.

2. On considère les 1 000 premières personnes ayant joué à ce jeu durant une semaine. Minorer la probabilité que le gain algébrique moyen sur ces 1 000 personnes soit dans $]-1{,}7 ; -1{,}3[$.

3. L'organisateur de ce jeu affirme que, pour 1 000 parties jouées, il est sûr au seuil de 90 % de gagner entre 1 300 et 1 700 € (exclus). Que peut-on en penser ?

87 Par hypothèse, lors d'une naissance la probabilité que l'enfant soit une fille ou un garçon est la même. On considère 2 180 000 naissances supposées indépendantes et on note E_i la variable aléatoire égale à 1 si le i-ème enfant est une fille et 0 sinon.

1. Déterminer $E(E_i)$ et $V(E_i)$.

2. Que représente concrètement la variable aléatoire $M = \dfrac{E_1 + E_2 + \ldots + E_{2180000}}{2180000}$?

3. Déterminer une minoration de la probabilité de l'événement $M \in]0{,}49 ; 0{,}51[$.

4. En France, de 2016 à 2018, il y a eu 2,18 millions de naissances et la proportion de filles dans ces naissances est inférieure à 0,49 (Source : INSEE). Commenter ce résultat à partir de la réponse à la question **3.** et de l'hypothèse d'équiprobabilité de l'énoncé.

88 Dans un avion, chaque personne est autorisée à mettre en soute un bagage de 23 kg ou moins, sans pénalité.
Une compagnie aérienne a compilé la masse de tous les bagages enregistrés sur une année et a constaté que la masse d'un bagage est donnée en kg par une variable aléatoire B d'espérance $E(B) = 22$ et d'écart-type $\sigma(B) = 0{,}4$.
1. Sur un avion de 500 passagers supposés indépendants, on appelle B_i la masse de bagage du passager n° i et M la variable aléatoire donnant la moyenne des masses des bagages des 500 passagers.
a) Exprimer M en fonction des B_i.
b) Minorer la probabilité que $M \in \,]21{,}5\,;22{,}5[$
2. Si la masse totale de bagages est inférieure ou égale à 10,5 tonnes alors l'avion embarque des bagages d'un autre vol et si la masse totale de bagages est supérieure ou égale à 11,5 tonnes alors une partie des bagages de l'avion est envoyée sur un autre vol.
Majorer la probabilité que cet avion contienne des bagages d'un autre vol ou ne contienne pas les bagages de tous ses passagers.

Utiliser la loi des grands nombres

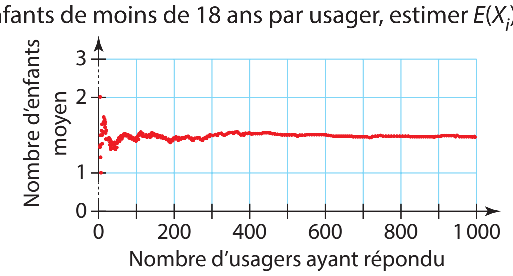
Méthode 7 p. 413

89 On considère un jeu dont le gain algébrique en euros est donné par une variable aléatoire G de loi suivante.

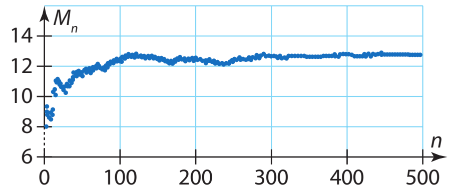
g_i	−2	−1	0	10
$p(G = g_i)$	0,33	0,44	0,22	0,01

De quelle valeur va se rapprocher la moyenne des gains d'un nombre important de joueurs jouant de manière indépendante ?

90 Au guichet d'une administration, on doit remplir un questionnaire sur lequel figure le nombre d'enfants de moins de 18 ans dans le foyer.
On appelle $X_1, \ldots, X_{1000}$ les variables aléatoires donnant les réponses des 1 000 premiers usagers et on suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et de même loi.
En utilisant le graphique donnant l'évolution de la moyenne d'enfants de moins de 18 ans par usager, estimer $E(X_i)$.



91 On considère un échantillon de variables aléatoires X_i et $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne des n premières variables aléatoires dont l'évolution est donnée par le graphique.

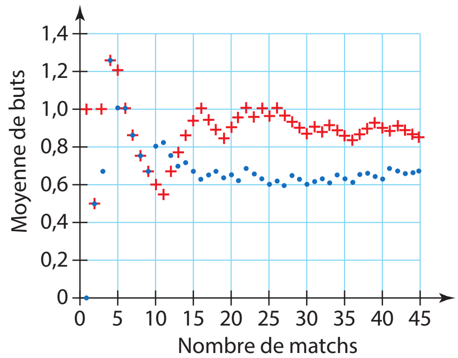


Parmi les deux lois suivantes, laquelle est celle des variables aléatoires X_i ?

a_i	8	12	24
$p(A = a_i)$	0,5	0,25	0,25

b_i	5	7,5	15
$p(B = b_i)$	0,1	0,7	0,2

92 En se basant sur les statistiques des dernières années, on considère que la loi de la variable aléatoire B donnant le nombre de buts marqués par la joueuse de football Megan Rapinoe lors d'un match suit une loi d'espérance 0,64 et d'écart-type 0,84.
On donne ci-dessous deux nuages de points dont l'un est une simulation de l'évolution de la moyenne de buts marqués par match par Megan Rapinoe lors d'une saison de 45 matchs à partir de la loi de B.



Est-ce le nuage en croix rouges ou le nuage en points bleus ?

93 Algo On considère une variable aléatoire X simulée par une fonction `va_X` sans paramètre.
1. Que renvoie la fonction **Python** `ech` ci-dessous ?

```
def ech(n) :
    return[va_X() for i in range(n)]
```

2. Les instructions `sum(ech(1000))/1000` et `sum(ech(10000))/10000` renvoient respectivement 2,11 et 2,093.
Que peut-on conjecturer pour la variable aléatoire X ?

Exercices d'entraînement

Problèmes et variables aléatoires

94 Lors d'un test de culture générale, un QCM propose 25 questions indépendantes et Tess y répond au hasard. Chaque question présente 5 réponses dont une seule est correcte.
Une bonne réponse rapporte 2 points et une mauvaise en fait perdre 0,5.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses et Y celle donnant le nombre de mauvaises réponses.
1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.
2. a) Exprimer Y en fonction de X.
b) Calculer $E(Y)$.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de points à la fin du QCM.
a) Exprimer Z en fonction de X et Y.
b) Quelle est la moyenne de points obtenus que pourrait espérer Tess si elle répétait un grand nombre de tels QCM?

95 Les parents de Lubin lui ont donné 200 euros d'argent de poche pour l'année.
De plus, tous les mois, son père lance une pièce et s'il fait PILE, il lui donne 10 euros en plus.
Sinon il ne lui donne rien de plus.
1. Quel montant annuel maximal peut-il obtenir ?
2. X est la variable aléatoire donnant le nombre de PILE que son père obtient sur l'année et Y celle donnant la somme d'argent de poche de Lubin sur l'année.
a) Sans justifier, préciser la loi suivie par X.
b) Exprimer Y en fonction de X.
c) En déduire $E(Y)$.
3. Calculer la probabilité que Lubin ait touché au moins 250 euros l'an dernier.

96 Un jeu en ligne a été programmé avec **Python**. **Algo**
Pour une mise de 5 euros, on peut gagner :
- 60 euros (sans prendre en compte la mise) avec une probabilité égale à 0,028 ;
- 10 euros avec une probabilité égale à 0,142 ;
- 6 euros avec une probabilité égale à 0,2 ;
- dans les autres cas, on perd.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu.
1. Écrire une fonction `jeu()` en **Python** simulant X.
2. Lorsque Thomas joue, il fait 5 parties.
Quelle commande peut-on écrire avec **Python** pour qu'il fournisse directement une liste de 5 gains ?
3. On note $(X_1 ; X_2 ; ... ; X_5)$ un échantillon de taille 5 de la loi suivie par X et $S = X_1 + X_2 + ... + X_5$.
a) Calculer $E(S)$.
b) En donner une interprétation.
c) Calculer une valeur approchée $\sigma(S)$ à 0,01 près.

97 X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x_i	-2	1	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{10}$

On considère un échantillon $(X_1 ; X_2 ; ... ; X_n)$ de taille n de la loi suivie par X ainsi que la variable aléatoire moyenne $M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$.
1. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$ en fonction de n.
2. Déterminer la valeur de n à partir de laquelle la variance de M_n devient inférieure à 0,05.

98 Une urne contient 15 boules : 5 boules sont rouges, 7 boules sont bleues, les autres sont blanches.
On tire au hasard une boule : si elle est bleue on gagne 2 euros, si elle est rouge on gagne 3 euros, sinon on ne gagne rien.
On la remet dans l'urne puis on en tire une deuxième : si elle est blanche on perd 2 euros, si elle est rouge on perd 5 euros, sinon on ne perd rien.
On la remet dans l'urne et on enlève 5 boules bleues de l'urne. Puis on tire au hasard une troisième boule : si elle est bleue on gagne 10 euros, sinon on ne gagne rien.
Z est la variable aléatoire donnant le gain algébrique final à ce jeu.
1. Proposer une décomposition de Z en somme de variables aléatoires dont on précisera les lois.
2. Calculer $E(Z)$ et interpréter ce résultat.
3. On crée un échantillon $(Z_1 ; Z_2 ; ... ; Z_n)$ de taille n de la variable Z et on considère la variable aléatoire $S_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$.
a) Que représente concrètement S_n ?
b) Exprimer $E(S_n)$ en fonction de n.
c) Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour espérer remporter plus de 100 euros ?

99 **Démo** X est une variable aléatoire sur un univers fini dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On se propose de démontrer que si a est un nombre réel, alors $E(aX) = aE(X)$ et $V(aX) = a^2 V(X)$.
On pose $Z = aX$.
1. Donner, dans un tableau, la loi de Z.
2. Calculer $E(Z)$ puis démontrer que $E(aX) = aE(X)$.
3. Sachant que la formule de la variance est donnée par $V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + ... + p_n (x_n - E(X))^2$, démontrer que $V(Z) = a^2 V(X)$.

100 Écrire un programme **Python** qui : Algo
• demande l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire X ainsi qu'un nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1,
• affiche l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la loi suivie par X.

101 X est une variable aléatoire d'espérance $\mu = 1236$ et d'écart-type $\sigma = 21{,}25$.
$(X_1 ; X_2 ; ... ; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi suivie par X.
Comment faut-il choisir n pour que l'écart-type de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ soit inférieur ou égal à 1 ?

102 Les gains de deux jeux sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes X et Y dont les lois sont données par les tableaux suivants, où m et t sont des réels.

x_i	0	1	m
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

y_i	-3	2	t
$p(Y = y_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

On joue consécutivement aux deux jeux.
1. On pose $m = 2$ et $t = 3$.
a) Calculer $E(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$ à 0,01 près.
b) Est-il avantageux de jouer dans ces conditions ?
2. a) À quelle condition sur m et t est-il avantageux de jouer ?
b) Proposer quatre couples de nombres $(m ; t)$ avec m et t positifs pour lesquels il n'est pas avantageux de jouer.

103 NSI La numération binaire ne comporte que deux chiffres : 0 ou 1 (que l'on appelle bit). C'est la numération utilisée en informatique où un octet est un nombre formé de 8 bits : par exemple 10001011 est un octet.
Lors de la transmission de données, des erreurs peuvent se produire et on suppose dans l'exercice que la probabilité d'un changement de 0 en 1 ou de 1 en 0 est égale à 0,002.
X est la variable aléatoire donnant le nombre d'erreurs lors de la transmission d'un octet.
On suppose que les transmissions de chaque bit dans un octet sont indépendantes.
1. a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) En déduire $E(X)$ et $\sigma(X)$.
2. On considère $(X_1 ; X_2 ; ... ; X_{1\,000\,000})$ un échantillon de taille 1 000 000 de la variable aléatoire X.
On pose $S = X_1 + X_2 + ... + X_{1\,000\,000}$ et $M = \dfrac{S}{1\,000\,000}$ la variable aléatoire moyenne associée.
a) Interpréter S dans le contexte de l'exercice.
b) Calculer le nombre de bits incorrects que l'on peut espérer lors d'une transmission de 1Mo.
c) Calculer $E(M)$ et $\sigma(M)$.

Utiliser un échantillon dans le cadre d'un prélèvement

Méthode 8 p. 414

104 Dans une entreprise comportant 1 500 salariés, on prélève un échantillon de 10 personnes.
Le salaire moyen mensuel dans l'entreprise est de 1 870 euros et l'écart-type est de 223 euros.
On note S la somme des salaires de ces 10 personnes.
1. Expliquer pourquoi ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise de 10 personnes dans l'entreprise ?
2. Dans ces conditions, déterminer $E(S)$ et $\sigma(S)$.

105 En France en 2018, 66 % des personnes de plus de 15 ans ont pratiqué une activité sportive dans l'année. (Source : injep.fr)

On interroge 200 personnes en France. On note X_i la variable aléatoire donnant 1 si la i-ème personne répond qu'elle a fait du sport dans l'année et 0 sinon. Au vu de la taille de la population française, on peut considérer que la liste $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_{200})$ est assimilable à un échantillon de variables aléatoires.
1. Quelle est la loi suivie par $S = X_1 + X_2 + ... + X_{200}$?
2. Déterminer $E(S)$ et $\sigma(S)$.
3. Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre de personnes pratiquant une activité physique dans cet échantillon.

106 Une loterie comporte un très grand nombre de billets valant chacun 1 euro. Sans prendre en compte la mise, 0,1 % des billets permettent de gagner 100 euros, 1 % permettent de gagner 50 euros, 2 % permettent de gagner 10 euros et les autres sont perdants.
Manon, qui est la première à choisir ses billets, en prend 3 au hasard.
X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique d'un ticket.
S est la variable aléatoire donnant le gain algébrique de Manon.
1. Donner un argument permettant de considérer que les 3 billets de Manon sont le résultat d'un tirage avec remise.
2. Sous cette condition, donner la loi de X et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. En déduire le gain que pourrait espérer en moyenne Manon en tirant 3 billets et l'écart-type de S.

Exercices d'entraînement

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev

107 Sur l'emballage d'une lampe de type LED, on peut lire que sa durée de vie moyenne est de 30 000 heures.
Par ailleurs, les études ont montré que la variance de la variable aléatoire D donnant sa durée de vie est 4 000 000.
1. Majorer $p(|D - 30\,000| \geqslant 5\,000)$.
2. On admet que pour tout réel $t < 30\,000$, on a $p(D \leqslant 30\,000 - t) = p(D \geqslant 30\,000 + t)$.
a) Montrer l'égalité $p(D \geqslant 35\,000) = \dfrac{p(|D - 30\,000| \geqslant 5\,000)}{2}$.
b) Peut-on dire qu'il y a au moins 10 % de chance que cette ampoule dure 35 000 heures ou plus ?

108 La probabilité qu'un atome se désintègre pendant sa période de demi-vie est 0,5.
On considère 4×10^{24} atomes du même isotope et on appelle X le nombre de ces atomes qui sont désintégrés après une période de demi-vie.
1. a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ? On supposera que les désintégrations d'atomes sont indépendantes les unes des autres.
b) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
2. On s'intéresse à la probabilité que le nombre d'atomes désintégrés soit égal à 2×10^{24} à $\pm\, 10^{13}$ atomes près.
a) Essayer de déterminer la probabilité $p(2 \times 10^{24} - 10^{13} \leqslant X \leqslant 2 \times 10^{24} + 10^{13})$ à l'aide de la calculatrice en utilisant la loi binomiale. Que remarque-t-on ?
b) Minorer $p(|X - 2 \times 10^{24}| < 10^{13} + 1)$.
c) Conclure.

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration « sans symétrie »

109 Soit X une variable aléatoire suivant une loi d'espérance $E(X) = 8$ et de variance $V(X) = 1$.
1. a) Expliquer pourquoi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne permet pas de majorer directement $p(X \in\,]-\infty\,;6] \cup [12\,;+\infty[)$.
b) Montrer que $p(X \in\,]-\infty\,;6] \cup [12\,;+\infty[) \leqslant p(|X - 8| \geqslant 2)$.
c) En déduire une majoration de $p(X \in\,]-\infty\,;6] \cup [12\,;+\infty[)$.
2. a) Expliquer pourquoi l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne permet pas de minorer directement $p(X \in\,]5\,;13[)$.
b) Montrer que $p(X \in\,]5\,;13[) \geqslant p(|X - 8| < 3)$.
c) En déduire une minoration de $p(X \in\,]5\,;13[)$.

110 Lorsque la batterie d'un certain modèle de téléphone est entièrement chargée, son autonomie est donnée en heures par une variable aléatoire A d'espérance $E(A) = 11{,}2$ et de variance $V(A) = 4$.
Déterminer une minoration de la probabilité que le smartphone puisse être utilisé plus de 7 heures après une charge.

111 Bogdan boit généralement 10 verres d'eau par jour. Compte tenu de la capacité du verre, on considère que la quantité bue au i-ème verre en ml est donnée par une variable aléatoire X_i d'espérance $E(X_i) = 95$ et d'écart-type $\sigma(X_i) = 5$ et on admet que ces variables aléatoires sont indépendantes.
1. On appelle $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$ et $M = \dfrac{S}{10}$.
Justifier $p(S \geqslant 1000) \leqslant p(|M - 95| \geqslant 5)$.
2. En déduire une majoration de la probabilité que Bogdan boive au moins un litre d'eau par jour à l'aide de l'inégalité de concentration.

112 Un groupe musical va sortir un nouvel album en trois formats :
- téléchargement à 10 € ;
- CD à 15 € ;
- vinyl à 25 €.

Lors d'un achat, les probabilités d'achat des différents formats sont consignées dans le tableau ci-dessous, d'après une étude marketing.

Format	Téléchargement	CD	Vinyl
Probabilité	0,78	0,19	0,03

1. On appelle X la variable aléatoire donnant le prix payé par un acheteur. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Majorer la probabilité que la moyenne des 2 000 premières ventes soit inférieure à 11 €.

Déterminer la taille d'un échantillon

Méthode 9 p. 415

113 Amir distribue tous les jours des prospectus à la sortie du métro.
Les variables aléatoires X_i donnant le nombre de prospectus distribués le i-ème jour sont indépendantes et de même loi d'espérance 250 et de variance 100.
Au bout de combien de jours peut-il être sûr au risque de 5 % d'avoir distribué en moyenne entre 245 et 255 prospectus (exclus) par jour ?

114 Au casino, quand quelqu'un parie un euro sur ROUGE ou NOIR, la variable aléatoire donnant son gain algébrique présente la loi suivante.

g_i	-1	1
$p(G = g_i)$	$\dfrac{19}{37}$	$\dfrac{18}{37}$

1. Déterminer $E(G)$ et $V(G)$.
2. On admet que les joueurs ne peuvent miser qu'un euro. Au bout de combien de joueurs ayant misé, le casino peut-il être sûr au seuil de 95 % que le gain moyen par joueur est dans $\left]E(G) - \dfrac{1}{37}\,;E(G) + \dfrac{1}{37}\right[$?

115 Pour se rendre au travail, Audrey prend le métro. La variable aléatoire T donnant son temps de trajet en minutes a pour espérance $E(T) = 6$ et pour écart-type $\sigma(T) = 0{,}25$.
Au bout de combien de trajets de métro peut-elle être sûre au risque d'erreur de 2 % d'avoir mis en moyenne entre 5 minutes 45 et 6 minutes 15 pour se rendre au travail ?

116 Compte tenu de l'âge, de la corpulence et de l'activité physique d'Adem, son médecin lui a dit qu'il avait besoin de 2 900 à 3 100 calories par jour en moyenne.
L'apport calorique journalier d'Adem suit une loi d'espérance 3 000 et d'écart-type 50, au bout de combien de jours peut-il être sûr, au seuil de 99 %, de respecter les préconisations de son médecin ?

117 On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,6.
1. On lance n fois cette pièce et on appelle X_i la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus au i-ème lancer.
a) Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli.
b) Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. On cherche à déterminer un nombre de lancers à partir duquel on est sûr au seuil de 95 % qu'il y a plus de PILE que de FACE.
a) On appelle M_n la variable aléatoire donnant la moyenne des n premiers X_i. Quel est le plus grand intervalle I de la forme $]0{,}6 - \delta\,;0{,}6 + \delta[$ tel que $M_n \in \mathrm{I}$ implique qu'il y ait eu plus de PILE que de FACE ?
b) À l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer à partir de combien de lancers on peut être sûr au seuil de 95 % que $M_n \in \mathrm{I}$. On appellera n_0 ce nombre de lancers.
c) En utilisant la loi binomiale, calculer la probabilité qu'il y ait plus de PILE que de FACE quand on lance n_0 fois cette pièce. Commenter.

Déterminer δ ou V

118 On considère une variable aléatoire X d'espérance 10 et de variance 4.
1. Trouver $\delta > 0$ tel que $\dfrac{V(X)}{\delta^2} \leqslant 0{,}02$.
2. En déduire sans calcul que pour ces valeurs de δ, on a $p(|X - 10| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}02$.

119 On considère une variable aléatoire Y. Déterminer les valeurs de δ en fonction de $V(Y)$ assurant que :
a) $p(|Y - E(Y)| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}01$.
b) $p(|Y - E(Y)| < \delta) > \dfrac{8}{9}$.

120 Un joueur de rugby s'entraîne à tirer des pénalités. On considère que la variable aléatoire X donnant le nombre de pénalités réussies sur les 100 tentées suit une loi d'espérance 70 et de variance inconnue.
Sachant que la probabilité qu'il réussisse entre 0 et 60 ou entre 80 et 100 pénalités est supérieure à 0,1, déterminer une minoration de $V(X)$.

121 Le nombre de jours ensoleillés par an dans une destination touristique est donné par une variable aléatoire S d'espérance $E(S) = 300$ et d'écart-type $\sigma(S) = 10$.
Une agence de voyage crée une publicité promettant plus de a jours de soleil cette année au risque d'erreur de 1 %.
1. Trouver un nombre δ assurant que $p(|S - 300| < \delta) \geqslant 0{,}99$.
2. En déduire un nombre a qui convient pour la publicité.

Travailler le Grand Oral

122 Histoire des sciences
1. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev porte le nom de deux mathématiciens : Irénée-Jules Bienaymé et Pafnouti Tchebychev. Quelle est la contribution de chacun de ces deux mathématiciens à cette inégalité ?
2. Beaucoup de propriétés ou théorèmes ont été conjecturés et démontrés par des personnes différentes, parfois avec un grand intervalle de temps entre les deux.
En trouver quelques exemples célèbres et les présenter lors d'un exposé de quelques minutes.

123 Le 4 novembre 2019, le site arretsurimages.net titre un de ces articles « Présidentielles : de l'absurdité du sondage précoce ».
1. En étudiant les sondages publiés plusieurs mois (voire années) avant une élection présidentielle ayant eu lieu (par exemple celle de 2017), discuter du titre de cet article.
2. Quelles autres raisons que le temps avant l'élection peuvent influencer le résultat d'un sondage ?
3. Organiser les réponses aux deux questions précédentes afin d'en faire un exposé de quelques minutes durant lequel vous projetterez au moins un graphique que vous commenterez.

Exercices bilan

124 Somme de variables aléatoires

Quand il lance une impression d'une page, l'imprimante de Bob prend une, deux ou trois feuilles de manière aléatoire avec pour probabilités respectives 0,90 ; 0,08 et 0,02.
Bob lance 10 impressions d'une page sur l'imprimante.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de feuilles prises par l'imprimante lors d'une impression et S la variable aléatoire donnant le nombre total de feuilles prises par l'imprimante pour les 10 impressions indépendantes.
1. Donner la loi de X et proposer une décomposition de S sous la forme d'une somme de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une même loi.
2. Déterminer le nombre moyen de feuilles que l'imprimante prend lorsque Bob lance 10 impressions.
3. Calculer $\sigma(S)$ à 0,01 près.

125 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1)

Une entreprise vend des packs d'eau de 6 bouteilles. La loi de la variable aléatoire X donnant le volume d'eau en mL d'une bouteille a une espérance de 1 000 et une variance de 15. Les volumes d'eau de chaque bouteille sont supposés indépendants. Z est la variable aléatoire donnant le volume d'eau en mL dans un pack de 6 bouteilles.
1. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité que le pack d'eau contienne entre 5,950 L et 6,050 L (exclus).
3. On suppose que la probabilité qu'un pack d'eau contienne entre 5,950 L et 6,050 L est égale à 0,98.
On prélève 200 packs d'eau sur l'ensemble de la production. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
N est la variable aléatoire donnant le nombre de packs qui contiennent entre 5,950 L et 6,050 L dans le prélèvement.
a) Donner la loi suivie par N. Justifier.
b) Calculer $p(N \geqslant 194)$ au millième près.
c) Calculer $E(N)$ et interpréter ce résultat.

126 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (2)

Albane et Thomas vont participer à un quiz télévisé de 100 questions portant sur l'économie et la géographie. Albane répondra aux 50 questions d'économie et Thomas aux 50 questions de géographie. Après plusieurs semaines d'entraînement, on constate que le score obtenu aux questions est donné par une variable aléatoire :
- A, d'espérance 44 et d'écart-type 3 pour celles d'économie ;
- T, d'espérance 42 et d'écart-type 4 pour celles de géographie.

1. D'Albane ou de Thomas, qui fait preuve du plus de régularité ? Justifier.
2. a) Donner un argument permettant de penser que les variables aléatoires A et T sont indépendantes.
b) Donner l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $S = A + T$.
3. a) Minorer $p(|S - 86| < 15)$.
b) Pour gagner un lot, il faut répondre correctement à au moins 72 questions. Que peut-on penser de la probabilité qu'Albane et Thomas gagne un lot ?

127 Inégalité de concentration, loi des grands nombres et simulation

Algo

1. a) Donner $E(X)$ et $V(X)$ pour la variable aléatoire X donnant le résultat du lancer d'un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4.
b) En utilisant l'inégalité de concentration, déterminer combien de lancers d'un dé équilibré à 4 faces on peut faire pour s'assurer au seuil de 95 % que la moyenne des résultats des lancers est dans l'intervalle]2,45 ; 2,55[.

> **Coup de pouce** On pourra introduire un échantillon $(X_1 ; X_2 ; \ldots ; X_n)$ de X et $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

2. En « fouillant » dans le code d'un jeu en ligne devant simuler le lancer d'un dé à 4 faces, Ed a constaté que cette simulation était effectuée par la fonction **Python** `de4` ci-dessous.

```python
def de4() :
    a=random.random()
    if a<=0.25 :
        r=1
    if a>0.25 and a<=0.5 :
        r=2
    if a>0.5 and a<=0.75 :
        r=3
    if a>0.65:
        r=4
    return r
```

a) Expliquer pourquoi cette fonction ne simule pas correctement le lancer d'un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4.
b) Donner la loi de la variable aléatoire Y donnant la valeur de retour de cette fonction.
c) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. On considère la liste `L` définie par :
`L=[de4() for i in range(n)]`.
Sous quelle condition peut-on considérer que cette liste `L` donne un échantillon de taille n de la variable aléatoire Y ?
Dans la suite, on considère que cette condition est vérifiée.
4. On considère la variable `moyenne` définie par `moyenne=sum(L)/n`.

> **Coup de pouce** `sum(L)` donne la somme des éléments de la liste `L`.

a) De quelle valeur doit être proche `moyenne` si `n` est grand ?
b) Pour 10 000 lancers, est-il « relativement probable » que la valeur de la variable `moyenne` soit dans l'intervalle]2,55 ; 2,65[?
c) En déduire une méthode permettant de mettre en évidence le fait que la fonction ne fonctionne pas correctement sans visualiser son code.

Variables aléatoires

$X + Y$ et aX

Linéarité de l'espérance

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(aX) = aE(X)$

Propriété de la variance

- Si X et Y sont indépendantes $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(aX) = a^2\, V(X)$

Loi binomiale

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale peut être décomposée comme somme de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli.

Échantillon

- C'est la liste $(X_1\,;X_2\,;..\,;X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
- $S_n = X_1 + X_2 +...+ X_n$ est la variable aléatoire somme.
- $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ est la variable aléatoire moyenne.

Caractéristiques d'un échantillon de X

$E(S_n) = nE(X)$ et $V(S_n) = nV(X)$

$E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Avec $E(X) = \mu$, $V(X) = V$ et $\sigma(X) = \sigma$, on a :

- $p(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{\delta^2}$ et $p(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \dfrac{V}{\delta^2}$
- $p(|X - \mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ et $p(|X - \mu| < k\sigma) \geqslant 1 - \dfrac{1}{k^2}$

Inégalité de concentration

Avec $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = V$, on a :

- $p(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V}{n\delta^2}$
- $p(|M_n - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \dfrac{V}{n\delta^2}$

Loi (faible) des grands nombres

La moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire se rapproche de son espérance quand n devient grand.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de…	Méthode	Parcours d'exercices
Travailler avec $X+Y$ ou aX	1, 2	35, 38, 43, 44, 47, 94
Travailler avec un échantillon	3, 4, 8	49, 53, 56, 58, 60, 104, 105
Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev	5	72, 76, 79, 107, 112, 118
Utiliser l'inégalité de concentration	6, 9	82, 87, 111, 113, 114, 120
Comprendre et visualiser la loi des grands nombres	7	89, 90, 92

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-s13-06

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 128 à 132, X est une variable aléatoire d'espérance 5,62 et d'écart-type 0,04 et Y est une variable aléatoire d'espérance – 1,59 et d'écart-type 0,12. X et Y sont indépendantes.

	A	B	C	D
128 $E(5X) =$	5,62	28,1	0,62	140,5
129 $E(X+Y) =$	0,16	4,03	5,62	– 1,59
130 $V(X+Y) =$	0,16	0,016	7,21	4,03
131 Si $X_1, X_2, \dots X_{10}$ suivent la même loi que X alors $E\left(\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_{10}}{10}\right) =$	10	56,2	5,62	0,562
132 Pour quelle valeur de b a-t-on $E(X+bY)=0$?	3,53	0	3	$\dfrac{562}{159}$
133 Si $X_1\,;X_2\,;\dots;X_{35}$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(0{,}02)$ alors $X_1+X_2+\dots+X_{35}$ suit la loi :	$\mathcal{B}(0{,}7)$	$\mathcal{B}(35\,;0{,}70)$	$\mathcal{B}(0{,}02)$	$\mathcal{B}(35\,;0{,}02)$

Pour les exercices 134 à 136 X est une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 2. $(X_1\,;X_2\,;\dots;X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi suivie par X et $M=\dfrac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

	A	B	C	D
134 $p(\lvert X-10\rvert \geqslant 2)$ est majorée par :	0,5	0,6	0,2	0,8
135 $p(\lvert M-10\rvert < 0{,}2)$ est nécessairement supérieure à 0,95 pour $n =$	10	150	1 200	1 500
136 Quand n tend vers $+\infty$, la moyenne de l'échantillon est proche de :	0	10	2	20

137 Problème ouvert

Au tir à l'arc, il y a deux cibles, l'une est située à 30 mètres et l'autre à 50 mètres.
Anna a une probabilité égale à 0,4 de toucher la première cible et 0,1 de toucher la deuxième.
Lorsqu'elle s'entraîne, elle tire 20 flèches pour la première cible et 10 pour la deuxième.
Les tirs sont supposés indépendants.
Toucher la première cible rapporte 5 points et toucher la deuxième cible rapporte 20 points.
Quel nombre de points peut-elle espérer obtenir en moyenne sur un grand nombre d'entraînement ?

Coup de pouce Penser à la loi binomiale.

Méthode 2 p. 407 et Méthode 3 p. 409

138 Avec un programme

Algo

Le programme **Python** suivant simule l'obtention du gain algébrique d'un jeu.

```python
import random
def partie() :
    c=random.random()
    if c<=0.78 :
        gain=-4
    if c>0.78 and c<=0.96 :
        gain=5
    if c>0.96 :
        gain=100
    return gain
l=[partie() for i in range(10)]
gainfinal=sum(l)
print(gainfinal)
```

La commande `sum` permet de faire la somme de tous les éléments d'une liste.

1. La fonction `partie()` permet de simuler un jeu aléatoire. Soit X la variable aléatoire donnant le résultat obtenu à la fin de son exécution.
Donner la loi de X.

2. Combien de fois est utilisée la fonction `partie()` pour obtenir par somme le gain final à ce jeu ?

3. Quelle est la probabilité que l'affichage du programme soit -40 ?

4. On note S la variable aléatoire donnant le résultat final (affiché) de ce jeu.
a) Ecrire S sous la forme d'une somme de variable aléatoire suivant toutes la loi de X.
b) Quel gain moyen peut-on espérer à ce jeu lorsque l'on fait un grand nombre de parties ?

Méthode 4 p. 409 et Méthode 7 p. 413

139 Espérance et concentration

Le temps d'attente avant de recevoir sa commande dans un restaurant est donné (en secondes) par une variable aléatoire T d'espérance 600 et de variance 2 000.

1. Mia s'est rendue à ce restaurant une fois par semaine l'an dernier. Donner une minoration de la probabilité qu'elle ait attendu en moyenne entre 9 et 11 minutes (exclus) sur ses 52 visites (supposées indépendantes) ?

Coup de pouce Introduire une variable aléatoire pour chaque visite.

2. Le restaurant a embauché du personnel et chaque client attend maintenant une minute de moins qu'avant.
a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire T' donnant le nouveau temps d'attente.
b) Au bout de combien de clients supposés indépendants peut-on être sûr au seuil de 99 % que le temps d'attente moyen est compris entre 8 minutes 30 et 9 minutes 30 exclus ?

Méthode 1 p. 407, Méthode 6 p. 413 et Méthode 8 p. 414

140 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On considère un QCM de 50 questions et la variable aléatoire X donnant le nombre de réponses correctes à ce QCM pour quelqu'un répondant totalement au hasard.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X sachant que, pour chaque question, il y a quatre propositions dont une seule est correcte.

Coup de pouce Penser à une loi binomiale.

2. Une réponse correcte rapporte 2 points.
a) Exprimer la variable G donnant le nombre total de points gagnés en fonction de X.
b) Déterminer $E(G)$ et $V(G)$.

3. Une réponse incorrecte faisant perdre 0,5 point, on considère S la variable aléatoire donnant le score final quand on répond au hasard à ce QCM.
a) Justifier que $S = 2{,}5X - 25$.
b) En déduire $E(S)$ et $V(S)$.
c) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $p(|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75)$.
d) Justifier que $|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75 \Leftrightarrow S \geqslant 38$ puis interpréter l'inégalité obtenue dans la question précédente dans les termes de l'énoncé.
e) Déterminer la probabilité que le score soit supérieur ou égal à 38 à l'aide de la loi binomiale.

Coup de pouce $S \geqslant 38 \Leftrightarrow X \geqslant ...$

f) Commenter la majoration de $p(|S - 6{,}25| \geqslant 31{,}75)$ obtenue à la question **3. c)** à l'aide du résultat de la question **3. e)**.

Méthode 1 p. 407 et Méthode 5 p. 411

Exercices vers le supérieur

Les exercices 141 à 146 se suivent et ont pour ambition d'amener à la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

141 Variables aléatoires en tant que fonctions

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer une boule dans une urne qui contient 2 boules rouges, 3 boules vertes, 4 boules noires et 1 boule blanche, et à noter sa couleur.

a) Donner l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.

b) On considère le jeu consistant à tirer une boule dans cette urne et :

• on gagne 1 € si la boule est rouge ;

• on perd 2 € si la boule est blanche ;

• on ne gagne ou ne perd rien si la boule est d'une autre couleur.

On appelle G la fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à un élément ω de Ω, associe le gain au jeu énoncé.

Donner $G(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$

c) Comment appelle-t-on les fonctions du type de G dans le cadre des probabilités ? Donner sa loi.

2. On considère l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes et à noter son rang.

Par exemple, si on tire le valet de carreau, on note **valet**.

Rappel : dans un jeu de 32 cartes, il n'y a pas les cartes 2-3-4-5 et 6.

a) Donner l'univers Ω' associée à cette expérience aléatoire.

b) On considère le jeu consistant à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes et où un habillé (valet, dame ou roi) rapporte 10 points, un as 20 points et les autres cartes 0 point. Donner $V(\omega')$ pour tout $\omega' \in \Omega'$ où V est la variable aléatoire donnant la valeur de la carte obtenue.

142 Variables aléatoires, univers et espérance

MPSI

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω fini et dont la loi est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	x_1	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1		p_n

1. a) On considère A_i l'événement de Ω contenant tous les antécédents de x_i.

Que peut-on dire des événements A_i et $X = x_i$?

b) En déduire que $p_i = \sum_{\omega \in A_i} p(\omega)$ où $\sum_{\omega \in A_i} p(\omega)$ se lit « somme des p de ω pour tous les ω appartenant à A_i ».

2. Montrer que $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega))$.

143 Linéarité de l'espérance

MPSI

X et Y sont des variables aléatoires sur un univers Ω fini.

On admettra le résultat démontré dans l'exercice précédent :

$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega))$.

1. Écrire une égalité similaire pour $E(Y)$.

2. Écrire une égalité similaire pour $E(X + Y)$.

3. En déduire que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

144 Variables comparables et espérance

MPSI

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω fini. On dit que $X \leqslant Y$ si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$.

Montrer que si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

145 Inégalité de Markov

MPSI

Soit Ω un univers fini, X une variable aléatoire positive définie sur Ω (c'est-à-dire que $X(\omega) \geqslant 0$ pour tout $\omega \in \Omega$) et $\delta > 0$.

1. On considère Y la variable aléatoire définie par :

Andreï Markov

$$\begin{cases} Y(\omega) = \delta \text{ si } X(\omega) \geqslant \delta \\ Y(\omega) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que $E(X) \geqslant E(Y)$.

2. a) Donner la loi de probabilité de Y en fonction de $p(X \geqslant \delta)$.

b) En déduire $E(Y)$.

3. En déduire l'inégalité de Markov selon laquelle $p(X \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{E(X)}{\delta}$.

146 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

MPSI

Soit Ω un univers fini, X une variable aléatoire définie sur Ω et $\delta > 0$.

On rappelle que la variance de X est donnée par $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

1. Justifier que l'on peut appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Z=(X - E(X))^2$.

2. En déduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

147 Écritures équivalentes

On se propose dans cet exercice de montrer que si X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ alors X peut s'écrire sous la forme d'une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout entier i entre 1 et n,on pose X_i la variable aléatoire donnant 1 si on obtient un succès à la i-ème répétition dans le schéma de Bernoulli associé et 0 sinon.

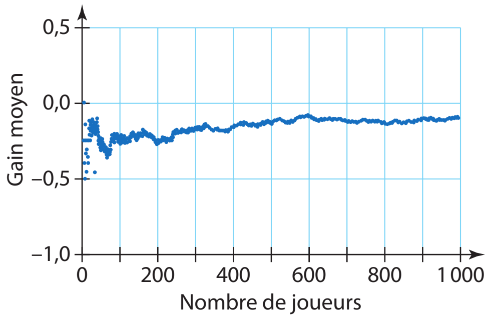
1. Quelle loi suivent les X_i ?

2. Expliquer pourquoi les variables aléatoires X_i sont indépendantes.

3. Proposer une écriture de X à partir de X_1 , X_2 , … et X_n permettant de prouver la propriété.

148 Jeu de couleurs

On considère un jeu consistant à tirer au hasard une boule dans une urne opaque : si la boule est noire, on perd 1 €, si elle est rouge, on gagne 2 €.
Le propriétaire du jeu tient secrète la composition de l'urne, tout juste sait-on qu'il y a 30 boules en tout et qu'il remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
Un « spectateur » observe les 1 000 premiers joueurs et dresse le graphique ci-dessous donnant l'évolution du gain algébrique moyen des joueurs à ce jeu.



Déterminer le nombre de boules de chaque couleur dans l'urne.

Pour les exercices 149 à 153 on utilisera la définition suivante.

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même univers Ω fini, X prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots$ et x_n et Y prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots$ et y_m (n et m entiers naturels).

On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout entier i ($1 \leqslant i \leqslant n$) et pour tout entier j ($1 \leqslant j \leqslant m$) les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

Autrement dit X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout entier i ($1 \leqslant i \leqslant n$) et pour tout entier j ($1 \leqslant j \leqslant m$) on a :

$$p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j).$$

149 Variables aléatoires indépendantes (1)

Une urne contient 8 tickets numérotés de 1 à 8.
On tire au hasard et avec remise deux tickets de l'urne.
S est la variable aléatoire donnant la somme des deux tickets et R est la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le résultat du premier ticket est supérieur ou égal à 5 et 0 sinon.

1. Calculer $p(S = 7)$ et $p(R = 1)$.
2. Calculer $p((S = 7) \cap (R = 1))$.
3. S et R sont-elles indépendantes ?

150 Variables aléatoires indépendantes (2)

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
X est la variable aléatoire prenant la valeur 2 si le résultat est pair et 0 sinon.
Y est la variable aléatoire prenant la valeur 5 si le nombre est 5 ou 6 et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

151 Variables aléatoires indépendantes (3)

Un jeu comporte 4 cartes et sur chacune d'elle est écrit A, B, U ou W.
On tire au hasard les 4 cartes sans remise de sorte à former un mot (qui peut ne pas avoir de sens).
X est la variable aléatoire donnant le rang de la première voyelle tirée et Y est la variable aléatoire prenant la valeur 10 si on a tiré les deux voyelles en premier et 0 sinon.
X et Y sont-elles indépendantes ?

152 Variance et indépendance

On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on appelle U (respectivement D) la variable aléatoire donnant le chiffre des unités (respectivement dizaines) du résultat obtenu.

1. U et D sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $V(U + D)$ et la comparer à $V(U) + V(D)$.

153 Espérance et indépendance MPSI

On lance deux dés équilibrés tétraédriques dont les 4 sommets sont numérotés de 1 à 4.
X est la variable aléatoire donnant le résultat du premier dé et Y celle donnant le résultat du deuxième.
On souhaite observer le produit des deux nombres obtenus : il s'agit donc du produit des deux variables aléatoires : XY.
Les résultats des deux dés étant indépendants, on admet que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. Donner la loi de probabilité de XY.
2. Déterminer $E(XY)$.
3. Comparer $E(XY)$ et $E(X) \times E(Y)$.

Information Plus généralement, on peut montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

154 Variance et Konig-Huygens Démo MPSI

On considère les prérequis suivants.
• la formule de Konig-Huygens pour calculer la variance d'une variable aléatoire Z :
$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$.
• la propriété :
Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.
Soit X et Y des variables aléatoires finies et indépendantes.
Démontrer que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Travaux pratiques

Algo — 55 min — Représenter Raisonner

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi binomiale

PYTHON
Script
lienmini.fr/maths-s13-07

Ouvrir l'interface **Python** à l'aide du lien ci-contre et executer le programme une première fois.
Ce script contient notamment la fonction `proba_binom(n,p,k)` renvoyant $p(X = k)$ pour X suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.
Dans la suite du TP, écrire les différentes fonctions et programmes demandés à la suite dans ce fichier.

A ▸ Premier exemple

Soit X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}55$.

1. Recopier et compléter par deux nombres entiers :
« Pour $n = 10$ et $p = 0{,}55$, on a $|X - np| \geqslant \sqrt{n} \iff 0 \leqslant X \leqslant$ ... ou ... $\leqslant X \leqslant 10$ »

2. Écrire l'instruction suivante dans la console de python en complétant les pointillés afin d'obtenir $p(|X - np| \geqslant \sqrt{n})$ pour $n = 10$ et $p = 0{,}55$:

```
sum([proba_binom(10,0.55,i) for i in […,…,…,…,…]])
```

puis noter le résultat affiché dans la console.

Coup de pouce Pour une liste `L`, `sum(L)` renvoie la somme des éléments de `L`.

B ▸ Calcul de $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n})$ et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit S_n suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1. a) Écrire et compléter la fonction `p1` ci-dessous afin qu'elle renvoie $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n})$.

```
def p1(n,p):
    return sum([proba_binom(n,p,i) for i in range(…) if abs(i-n*p)…])
```

Coup de pouce abs(x) renvoie la valeur absolue de x et math.sqrt(x) renvoie $\sqrt{x}$.

b) Exécuter le fichier binomiale.py et lancer `p1(10,0.55)` depuis la console puis contrôler le bon fonctionnement de la fonction `p1` en comparant le résultat obtenu à celui obtenu à la question A **2.**.

2. Justifier que $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}) \leqslant p(1 - p)$.

3. a) Calculer $p(1 - p)$pour $p = 0{,}55$.

b) Comparer la valeur ainsi obtenue à celle obtenue aux questions **A 2.** et **B 1. b)**.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne-t-elle une bonne majoration de $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n})$ dans ce cas où $n = 10$ et $p = 0{,}55$?

C ▸ Comparaison de $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n})$ et $p(1 - p)$

1. Écrire une fonction `p2` de paramètres `k` et `p` et renvoyant la liste des `p1(n,p)` pour tous les n entiers entre 10 et k.

2. La fonction `graph` est telle que `graph(k,p)` trace en rouge le nuage de points de coordonnées $(n\,; p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n}))$ pour tous les n entiers entre 10 et k et en bleu la droite d'équation $y = p(1 - p)$.

a) Lancer `graph(100,0.25)` depuis la console.
Que peut-on dire de la majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans ce cas ?

b) Utiliser la fonction `graph` avec d'autres valeurs de $k \geqslant 50$ et p.
Cela semble-t-il confirmer la situation observée à la question précédente ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de p les probabilités de la forme $p(|S_n - np| \geqslant \sqrt{n})$ semblent-elles les plus grandes ?

Algo · 50 min · Représenter · Modéliser · Raisonner

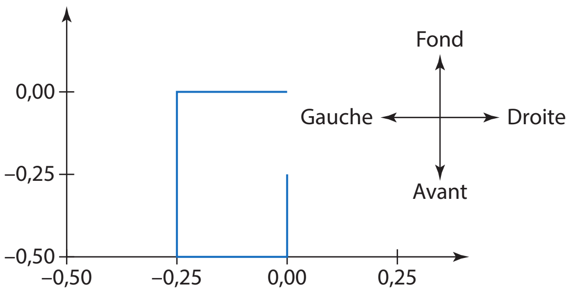
2 Marche aléatoire

On considère un robot aspirateur circulaire qui, à chaque seconde, se déplace aléatoirement de 25 cm dans une des quatre directions : avant de la pièce, fond de la pièce, gauche ou droite.
Le sol (vu de dessus) sur lequel est posé le robot est assimilé au plan muni d'un repère et on considère que :
- le centre du robot est à l'origine au départ ;
- le robot va vers la droite quand son abscisse augmente de 0,25 ;
- le robot va vers la gauche quand son abscisse diminue de 0,25 ;
- le robot va vers le fond de la pièce quand son ordonnée augmente de 0,25 ;
- le robot va vers l'avant de la pièce quand son ordonnée diminue de 0,25.

Soit les listes `X=[0]` et `Y=[0]` (au départ) qui vont contenir respectivement les abscisses et ordonnées successives du centre du robot.

1. a) Dans un repère, tracer la trajectoire du centre du robot si après 5 déplacements, on a `X =[0,0.25,0.25,0.25,0.5,0.75]` et `Y =[0,0,-0.25,-0.5,-0.5,-0.5]` (prendre 2 cm pour 0,25).

b) Quelles sont les listes `X` et `Y` correspondant au déplacement ci-dessous ?



2. a) Écrire une fonction **Python** `modif1` telle que, pour une liste `L`, `modif1(L)` renvoie la liste `L` à laquelle on a ajouté l'élément $a + 0{,}25$ où a est le dernier élément de `L`.

b) Écrire une fonction **Python** `modif2` telle que, pour une liste `L`, `modif2(L)` renvoie la liste `L` à laquelle on a ajouté l'élément $a - 0{,}25$ où a est le dernier élément de `L`.

c) Écrire une fonction **Python** `modif3` telle que, pour une liste `L`, `modif3(L)` renvoie la liste `L` à laquelle on a ajouté le dernier élément de `L`.

3. On propose de simuler le déplacement du robot à l'aide des instructions ci-contre.

```
a=random.randint(1,4)
if a==1 :
   X=modif1(X)
   Y=modif3(Y)
if a==2 :
   X=modif2(X)
   Y=modif3(Y)
if a==3 :
   X=modif3(X)
   Y=modif1(Y)
if a==4 :
   X=modif3(X)
   Y=modif2(Y)
```

a) Lorsque `random.randint(1,4)` donne un résultat égal à 1, cela correspond-il à un déplacement du robot vers l'avant, le fond, la gauche ou la droite ?

b) Associer de la même manière chaque valeur possible renvoyée par `random.randint(1,4)` à un déplacement du robot.

4. a) Ouvrir l'espace Python à l'aide du lien ci-contre.

PYTHON
Script
lienmini.fr/maths-s13-08

b) Exécuter le programme et le tester avec différentes valeurs (éventuellement assez élevées) pour le nombre de déplacements.

c) La croix rouge sur le graphique donne la dernière position du robot. S'éloigne-t-il beaucoup de son point de départ comparativement au nombre de déplacements ? Argumenter.

Coup de pouce On pourra considérer les variables aléatoires X_i (respectivement Y_i) prenant les valeurs 0,25 ; – 0,25 et 0 à ajouter à l'abscisse (respectivement l'ordonnée) du centre du robot au i-ème déplacement.

TICE — 40 min — Modéliser Calculer

3 Échantillons et écarts-types

A ▶ Observations

1. Ouvrir un tableur et y compléter les cellules A1, A2, B1 et B2 afin d'obtenir la feuille de calcul ci-contre.

	A	B
1	Espérance	2
2	Ecart-type	3

2. Écrire `=LOI.NORMALE.INVERSE(ALEA();$B$1;$B$2)` dans la cellule D1 : cette formule permet de simuler une variable aléatoire dont l'espérance est dans la cellule B1 et l'écart-type dans la cellule B2.

3. Recopier le contenu de la cellule D1jusqu'à la cellule D100 : on vient de simuler un échantillon de $n = 100$ variables aléatoires d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type $\sigma = 3$.

4. Écrire « Moyenne » dans la cellule C101 et compléter le contenu de la cellule D101 afin d'y afficher automatiquement la moyenne des valeurs de l'échantillon de la plage D1:D100.

5. Sélectionner la plage D1:D101 et la recopier jusqu'à la colonne GU incluse afin de simuler 200 échantillons de $n = 100$ variables aléatoires.

6. a) Saisir « Ecart-type » dans la cellule C102.

b) Dans la cellule D102, écrire une formule calculant l'écart-type s des moyennes des 200 échantillons.

Coup de pouce L'écart-type de valeurs présentes dans une plage de valeurs s'obtient avec ECARTYPEP(*plage*).

7. a) Comparer s et $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Que remarque-t-on ?

b) Modifier la valeur de σ dans la cellule B2.
L'observation faite à la question précédente semble-t-elle encore valable ?

c) Effacer le contenu des lignes 101 et 102 et étendre la plage D100:GU100 jusqu'à la ligne 400 puis reprendre les questions **4.**, **5.** (On pourra se contenter de la cellule D401 plutôt que la plage D1:D401) et **6.** avec la ligne 401 au lieu de la ligne 101.
L'observation faite à la question **7. a)** semble-t-elle se confirmer pour ces échantillons de taille $n = 400$?

8. a) Dans la cellule C403, écrire k et dans la cellule D403, écrire 1.

b) Dans la cellule D404, écrire `=NB.SI(D401:GU401;"<"&B1-D403*D402)` : cette formule donne le nombre de valeurs de la plage D401:GU401 qui sont strictement inférieures à $\mu - k \times s$ (c'est-à-dire inférieures à `B1-D403*D402`).

c) Dans la cellule D405, écrire une formule donnant le nombre de valeurs de la plage D401:GU401 qui sont strictement supérieures à $\mu + k \times s$.

d) Dans la cellule D406 écrire une formule donnant la proportion des 200 valeurs de la plage D401:GU401 qui sont dans l'intervalle $[\mu - k \times s ; \mu + k \times s]$.

e) Relancer plusieurs fois la simulation avec F9 : quelle proportion des échantillons semble avoir leur moyenne dans $[\mu - s ; \mu + s]$?

f) En modifiant la valeur de k dans la cellule D403, reprendre la question précédente avec les intervalles $[\mu - 2s ; \mu + 2s]$ et $[\mu - 3s ; \mu + 3s]$.

B ▶ Simulation

1. Dans un tableur, on saisit `=600*ALEA()+300` dans la cellule A1 et on admet que la variable aléatoire simulée par la commande `ALEA()` a pour espérance 0,5 et pour écart-type $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
Donner l'espérance μ et l'écart-type σ de la variable aléatoire simulée par `600*ALEA()+300`.

2. Si on recopiait la formule en A1 jusqu'à A300 et si on saisissait `=MOYENNE(A1:A300)` dans la cellule A301, de quelle valeur va être proche la valeur en A301 ? Vérifier avec le tableur.

3. On recopie la plage A1:A301 jusqu'à la colonne OJ incluse de sorte d'avoir 400 échantillons de $n = 300$ valeurs.

a) D'après la partie **A** de quelle valeur l'écart-type des moyennes de la page A301:OJ301 est-il proche ?

b) Vérifier sur le tableur.
(on pourra se contenter de la cellule D401 plutôt que la page D1:D401)

4 Étude de sondages

55 min

Modéliser
Calculer
Communiquer

Dans la vidéo le présentateur affirme que :
- lorsque l'on réalise un sondage, son résultat est donné avec une certaine marge d'erreur ;
- cette marge d'erreur devient plus petite lorsque le nombre de personnes interrogées augmente mais pas dans la même mesure.

VIDÉO
Échantillon
lienmini.fr/maths-s13-01

A ▶ Premier tour des élections présidentielles 2017 en France

Lors des élections présidentielles de 2017, le candidat F. Fillon a obtenu 20 % des voix au premier tour, ce qui l'a placé en 3e position.

1. On considère un sondage sur 1 000 personnes prises au hasard dans la population française avant cette élection.

a) On appelle X_i pour i entier entre 1 et 1 000 la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la i-ème personne interrogée déclare être favorable à F. Fillon et 0 sinon.

Sous quelle(s) hypothèse(s) peut-on dire que les variables aléatoires X_1 ; … ; $X_{1\,000}$ forment un échantillon ? En considérant son résultat à l'élection, quelle est alors la loi suivie par S, la somme de ces variables aléatoires X_i ?

b) Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à S.

c) En déduire la marge d'erreur associée à ce sondage en pourcentages.

d) Quelques mois avant l'élection, la plupart des sondages donnaient plus de 25 % d'intentions de votes à F. Fillon. Que penser de ces sondages ?

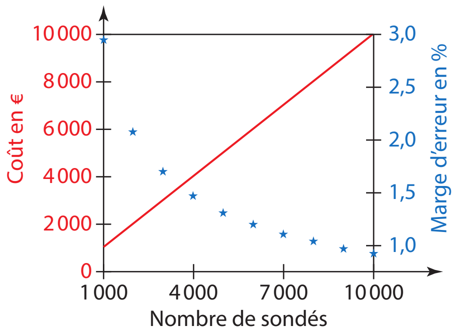
2. Reprendre les questions **1. b)** et **1. c)** dans le cas d'un sondage portant sur 10 000 personnes ?

B ▶ Deuxième tour des élections présidentielles 2017

E. Macron a remporté les élections présidentielles de 2017 avec 66,1 % des suffrages exprimés au second tour.

On s'intéresse à l'évolution de la marge d'erreur et du coût d'un sondage portant sur cette élection en fonction du nombre de sondés.

On donne le graphique ci-contre avec :
- en abscisse le nombre de sondés ;
- en ordonnées, le coût du sondage en € (à gauche) et la marge d'erreur en % (à droite).



1. a) D'après ce graphique, combien coûte un sondage par personne interrogée ?

b) En utilisant le graphique, justifier l'affirmation du présentateur de l'émission de la vidéo : « je multiplie par 2 la taille de l'échantillon mais je ne divise pas par 2 la marge d'erreur […] Ce n'est pas suffisant pour justifier le coût d'une étude sur un échantillon 2 fois plus grand. »

2. On donne ci-dessous les marges d'erreurs en % en fonction du nombre de sondés :

Nombre de sondés : x	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000
Marge d'erreur : y	2,9	2,1	1,7	1,5	1,3	1,2	1,1	1	1	0,9
$\dfrac{1}{\text{Marge d'erreur}^2}$: y'										

a) Compléter la dernière ligne du tableau puis placer les points de coordonnées $(x\,;y')$ dans un repère (choisir une échelle adaptée). Que remarque-t-on ?

b) Quelle conjecture peut-on faire sur la fonction f donnant l'**inverse du carré de la marge d'erreur** en fonction du nombre de sondés x ? Donner une estimation de $f(x)$ à l'aide du graphique.

c) En déduire une estimation de la marge d'erreur en % d'un sondage portant sur cette élection en fonction du nombre de sondés x. Quelle est la marge d'erreur pour 1 000 000 personnes sondées ?