DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-s12-05

Exercices calculs et automatismes

21 Répétition d'épreuves indépendantes

Une personne lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 puis une pièce équilibrée trois fois de suite et enfin tire une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules vertes.
Quelle est la probabilité qu'il obtienne dans cet ordre : le nombre 3 puis PILE, FACE, PILE puis une boule verte ?

22 Épreuve de Bernoulli (1)

On tire au sort une boule dans une urne et on note sa couleur. Dans quel(s) cas ci-dessous cette expérience aléatoire est-elle une expérience de Bernoulli ?

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a L'urne contient 10 boules : 3 jaunes, 2 vertes et 5 orange.
b L'urne contient 20 boules : 13 jaunes et 7 orange.
c L'urne contient 20 boules rouges numérotées : 10 avec des nombres pairs et 10 avec des nombres impairs.
d L'urne contient une seule boule jaune.

23 Épreuve de Bernoulli (2)

On tire au sort une boule dans une urne et on regarde si la boule est jaune ou non. Dans quel(s) cas ci-dessous cette expérience aléatoire est-elle une expérience de Bernoulli ?

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a L'urne contient 10 boules : 3 jaunes, 2 vertes et 5 orange.
b L'urne contient 20 boules : 13 jaunes et 7 orange.
c L'urne contient 20 boules rouges numérotées : 10 avec des nombres pairs et 10 avec des nombres impairs.
d L'urne contient une seule boule.

24 Loi de Bernoulli

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

Toute variable aléatoire ne prenant que deux valeurs suit une loi de Bernoulli. ☐ ☐

25 Schéma de Bernoulli

Méthode. Comment faire pour justifier qu'une succession d'épreuves est un schéma de Bernoulli ?

26 Loi binomiale (1)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$. La variable aléatoire de E donnant le nombre d'échecs :

a ne suit pas une loi binomiale.
b suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}2$.
c suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
d suit la loi binomiale de paramètre $n = 0{,}2$ et $p = 10$.

27 Loi binomiale (2)

On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$. Calculer $p(Y = 1)$.

28 Loi binomiale (3)

On considère une variable aléatoire T suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}9$.
Calculer $p(T = 1)$ en donnant la réponse sous forme d'écriture scientifique.

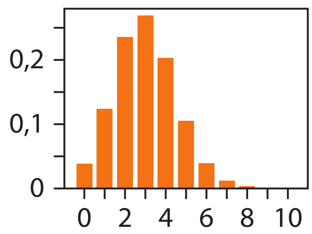
29 Espérance de la loi binomiale (1)

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}63$. Quelle est l'espérance de X ?

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a 63 b 126 c 200 d 630

30 Espérance de la loi binomiale (2)



On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale représentée par le diagramme en barres ci-dessus.
Quelle est son espérance ?

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a 8 b 3 c 0,26 d 10

31 Intervalle de fluctuation

En tabulant $p(X \leqslant k)$ pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale, on obtient le tableau ci-contre.

X	Y1
0	0.0016
1	0.0142
2	0.0617
3	0.1727
4	0.3519
5	0.5643
6	0.7548
7	0.8868
8	0.9578
9	0.9876
10	0.9972

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? V F

a) L'intervalle [1 ; 9] est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. ☐ ☐

b) L'intervalle [1 ; 9] est le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 %. ☐ ☐

Exercices d'application

Succession d'épreuves, indépendantes ou non

Méthode 1 p. 369

32 Une urne contient 20 boules de quatre couleurs différentes : 7 rouges, 10 vertes, 2 jaunes et 1 bleue.
On tire deux boules sans remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.
1. Cette succession de deux épreuves est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. La représenter par un arbre.
3. a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
b) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule jaune (sans tenir compte de l'ordre du tirage).
c) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.
d) Déterminer la probabilité que la première boule soit verte sachant que la deuxième est bleue.

33 Le samedi soir, Laura et Hitomi vont au cinéma, au concert ou au théâtre sans jamais faire la même activité deux samedis de suite. Le choix entre les deux activités possibles pour le samedi suivant est équiprobable.
1. On considère l'expérience aléatoire dont le résultat est l'activité faite par Laura et Hitomi un samedi.
Expliquer pourquoi la succession de cette expérience aléatoire les trois semaines à venir n'est pas une succession d'épreuves indépendantes.
2. Représenter cette succession de trois épreuves par un arbre sachant que samedi dernier, elles sont allées au théâtre.
3. Déterminer la probabilité qu'elles aillent deux fois au cinéma au cours des trois prochains samedis.

34 Dans un jeu télévisé, on tire au sort des boules sans remise parmi 20 : 17 boules blanches numérotées, qui donnent le droit de deviner un mot, et 3 boules noires, qui font passer la main à l'équipe adverse.
On considère la succession des trois premiers tirages de boules dans ce jeu selon qu'elles sont noires ou non.
1. Est-ce une succession de trois épreuves indépendantes ?
2. Représenter la situation par un arbre.
3. Quelle est la probabilité de devoir passer la main exactement une fois sur les trois premiers tirages ?

35 Une urne contient 100 boules de cinq couleurs différentes : 23 blanches, 12 grises, 9 noires, 45 orange et 11 violettes.
On tire trois boules avec remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.
1. Expliquer pourquoi cette succession de trois épreuves est une succession d'épreuves indépendantes.
2. Donner l'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule grise puis une boule violette.

36 On lance cinq fois successivement un dé équilibré à 4 faces dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
1. Cette succession de cinq épreuves est-elle une succession de cinq épreuves indépendantes ?
2. Déterminer l'univers associé à cette succession de cinq épreuves.
3. On suppose que ce dé est truqué de sorte que $p(1) = 0{,}4$ et les autres issues sont équiprobables de probabilité 0,2.
Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre 1-3-1-2-4.

37 Le programme de la salle de sport d'Audrey est le suivant aux heures où elle peut s'y rendre :
• lundi : pilate une semaine sur quatre/*step* deux semaines sur quatre/musculation une semaine sur quatre ;
• mardi : zumba deux semaines sur cinq/*cycling* trois semaines sur cinq ;
• mercredi : fitness une semaine sur six/yoga deux semaines sur six/tai chi trois semaines sur six.

On admet que les activités sont indépendantes d'un jour sur l'autre. Audrey se rend à la salle de sport trois jours de suite du lundi au mercredi.
1. Déterminer l'univers associé à la succession des trois épreuves consistant à regarder l'activité proposée chacun de ces trois jours.
2. Calculer la probabilité qu'Audrey fasse ses trois activités préférées : pilate, *cycling* et yoga.

38 Le 01/09/19 ont eu lieu les matchs de football Reims-Lille à 15 h, Strasbourg-Monaco à 17h et Marseille-Saint Étienne à 21h, pour le compte de la 4e journée de ligue 1. Avant le premier match, un site de paris en ligne annonçait les probabilités suivantes pour les trois matchs :
• victoire de Reims : 34 % /victoire de Lille : 32 %/match nul : 34 % ;
• victoire de Strasbourg : 40 %/victoire de Monaco : 34 %/ match nul : 26 %;
• victoire de Marseille : 55 %/victoire de Saint-Étienne : 22 %/match nul : 23 %.
1. Expliquer en quoi le fait que les cotes soient données avant le début du premier match permet de penser que le site de paris considère que les résultats de ces trois matchs sont indépendants.
2. On admet que les résultats de ces trois matchs sont en effet indépendants. Donner l'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes.
3. En déduire la probabilité qu'avait attribué ce site au résultat finalement obtenu de cette succession d'épreuves c'est-à-dire victoire de Reims, match nul et victoire de Marseille.

Épreuve et loi de Bernoulli

39 Dans un lycée, 71 % des élèves de Première ont choisi la spécialité mathématiques.
On tire au sort un élève de Première dans ce lycée et on regarde s'il a opté pour la spécialité mathématiques ou non. Expliquer en quoi cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli, préciser à quoi peut correspondre un succès puis donner la probabilité p d'un succès.

40 En 2018, 87,9 % des TGV sont arrivés à l'heure (source SNCF).
1. Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire correspondant au fait de prendre un TGV et de regarder s'il est à l'heure ou non à l'arrivée est une épreuve de Bernoulli.
2. Préciser la probabilité p d'un succès (pour 2018).

41 Fiona joue à Pierre-Feuille-Ciseau. Expliquer pourquoi le choix de son adversaire (pierre, feuille ou ciseaux) à ce jeu n'est pas assimilable à une épreuve de Bernoulli.

42 « Inventer » une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est 0,3.

43 **1.** Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce et à regarder si elle tombe sur PILE est une épreuve de Bernoulli.
2. Donner la probabilité d'un succès « obtenir PILE » dans le cas où la pièce est équilibrée.
3. Donner la probabilité d'un succès « obtenir PILE » dans le cas où la pièce a deux fois plus de chance de tomber sur FACE que sur PILE.

44 On considère une pièce truquée de sorte qu'elle ait deux chances sur trois de tomber sur PILE.
On lance une seule fois cette pièce et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de FACE obtenu.
Justifier que X suit la loi de Bernoulli et préciser la valeur de p.

45 **1.** On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on considère la variable aléatoire X donnant le chiffre des dizaines du résultat obtenu. Justifier que X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p.
2. On lance deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à huit faces numérotées de 1 à 8. On considère la variable aléatoire Y donnant le chiffre des dizaines de la somme des deux nombres obtenus.
Préciser la loi de Y.

46 On considère la fonction **Python** ci-dessous. Algo

```
def bernoulli1():
    if random.random() <=0.63:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

Justifier que la variable aléatoire X donnant la valeur renvoyée par la fonction `bernoulli1` suit une loi de Bernoulli et donner le paramètre de cette loi.

47 On considère la fonction **Python** ci-dessous. Algo

```
def bernoulli2():
    if random.random() <=0.41:
        x=0
    else:
        x=1
    return x
```

Justifier que la variable aléatoire X donnant la valeur renvoyée par la fonction `bernoulli2` suit une loi de Bernoulli et donner le paramètre de cette loi.

48 Écrire une fonction **Python** `bernoulli` de paramètre p flottant entre 0 et 1 et renvoyant 0 ou 1 de sorte que la fonction simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et renvoie sa valeur. Algo

Exercices d'application

Schéma de Bernoulli

Méthode 2 p. 371

49 Quand elle joue avec son bilboquet, Samira arrive à planter la boule sur le socle avec une probabilité 0,78.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 3 « lancers » de bilboquet à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.

b) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

50 La probabilité qu'un appel aux pompiers soit injustifié est 0,19.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de quatre appels aux pompiers, selon qu'ils sont injustifiés ou non, à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'exactement deux des quatre appels soit injustifiés.

b) qu'au moins un appel soit justifié.

51 Lorsqu'il fait ses devoirs, Ismaël n'éteint jamais son téléphone.

Quand il reçoit un message, il y a deux chances sur trois qu'il le regarde, indépendamment du fait qu'il ait regardé ou non les messages précédents.

Pendant tout le temps qu'il a consacré à ses devoirs, il a reçu 4 messages.

1. Justifier que cette situation est assimilable à un schéma de Bernoulli en spécifiant à quel événement correspond un succès.

2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité qu'il ait regardé au moins 3 messages.

Loi binomiale, définition et calcul de $p(X = k)$

Méthode 3 p. 373

52 On donne le tableau ci-dessous dans lequel les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.

k	$\binom{4}{k}$	$0{,}42^k$	$0{,}58^k$
0	1	1	1
1	4	0,42	0,58
2	6	0,176	0,336
3	4	0,074	0,195
4	1	0,031	0,113

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}42$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}58$.

À l'aide de ce tableau, donner des valeurs approchées de :

a) $p(X = 1)$ **b)** $p(X = 2)$.

c) $p(Y = 1)$ **d)** $p(Y = 2)$.

53 On donne le tableau ci-dessous dans lequel les valeurs sont arrondies à 10^{-2}.

k	$\binom{10}{k}$	$0{,}34^k$	$0{,}66^k$
0	1	1	1
1	10	0,34	0,66
2	45	0,12	0,44
3	120	0,04	0,29
4	210	0,01	0,19
5	252	0	0,13
6	210	0	0,08
7	120	0	0,05
8	45	0	0,04
9	10	0	0,02
10	1	0	0,02

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}34$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n=10$ *et* $p = 0{,}66$.

À l'aide de ce tableau, donner des valeurs approchées de :

a) $p(X = 2)$. **b)** $p(X = 4)$. **c)** $p(Y = 9)$. **d)** $p(Y = 2)$.

54 À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est $\frac{18}{37}$.

On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Quelle loi suit X ? Justifier.

2. Calculer la probabilité de gagner neuf parties.

55 À l'arrivée d'un train Paris-Toulon dont le départ a eu lieu à 7 h 07 du matin, on demande à 10 passagers tirés au hasard s'ils ont dormi ou non durant le voyage et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes ayant dormi parmi eux.

Pour un train partant à cette heure, on considère que la probabilité qu'un passager s'endorme est 0,68.

On considère par ailleurs que les endormissements des uns et des autres sont indépendants.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.

2. Calculer $p(X = 8)$, $p(X = 9)$ et $p(X = 10)$.

3. Quelle est la probabilité que 8 personnes ou plus se soient endormies parmi les 10 ?

56 On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

1. Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.

2. Calculer $p(M = 10)$, $p(M = 11)$ et $p(M = 12)$.

3. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année scolaire.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

Méthode 4 p. 373

57 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}78$. Calculer :
a) $p(X < 75)$. **b)** $p(X > 79)$.
c) $p(X \geqslant 74)$. **d)** $p(73 < X \leqslant 81)$.

58 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 27$ et $p = 0{,}32$. Calculer :
a) $p(Y < 8)$. **b)** $p(Y \geqslant 13)$.
c) $p(7 < Y < 14)$. **d)** $p(9 < Y)$.

59 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0{,}44$. Calculer :
a) $p(Z > 16)$. **b)** $p(10 < Z \leqslant 18)$.
c) $p(13 \leqslant Z \leqslant 20)$. **d)** $p(13 < Z < 20)$.

60 On considère une variable aléatoire T qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 789$ et $p = 0{,}04$. Calculer :
a) $p(T \in [27\,;32])$. **b)** $p(T \in [30\,;789])$.
c) $p(T \in [0\,;40[)$. **d)** $p(T \in]19\,;41])$.

61 La probabilité de gagner à un jeu de grattage est de 0,1. On considère 1 000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats (« gagné » ou « perdu ») sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1 000 joueurs.
Déterminer la probabilité qu'il y ait :
a) plus de 100 gagnants ;
b) moins de 85 gagnants ;
c) entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants ;
d) entre 90 (exclu) et 110 (exclu) gagnants.

62 Dans une population, la proportion de personnes végétariennes est de 12 %.
On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 250 repas à des personnes issues de cette population prévoit 32 repas végétariens.
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?

63 En France, la proportion de personnes utilisant un fauteuil roulant est estimée à environ 2 %.
On suppose que la population française est suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Dans un train, dont les 1 250 places ont été réservées, il est prévu 30 places pouvant accueillir les personnes en fauteuil roulant.
Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places pour les personnes en fauteuil roulant ?

Espérance, variance et écart-type par le calcul

64 **1.** On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}83$.
Calculer l'espérance, la variance puis l'écart-type de X.
2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}79$.

65 Écrire une fonction **Python** nommée `param_binom` de paramètres n et p et qui renvoie la liste composée, dans cet ordre, de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p. Algo

Coup de pouce `math.sqrt(x)` donne $\sqrt{x}$.

66 On considère deux jeux dans lesquels soit on perd, soit on gagne 4 €.
Précisément :
- le jeu n° 1 coûte 2 € et la probabilité de gagner est 0,1 ;
- le jeu n° 2 coûte 1 € et la probabilité de gagner est 0,05.

Comme elle dispose de 20 €, Sineha prévoit d'acheter :
soit 10 tickets du jeu n° 1 (option 1),
soit 20 tickets du jeu n° 2 (option 2). On appelle X le nombre de tickets gagnants avec l'option 1 et Y avec l'option 2.
1. Montrer que $E(X) = E(Y)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.
2. a) Calculer $\sigma(X)$ puis $\sigma(Y)$.
b) Interpréter ces deux écarts-types.

67 On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(X) = 43{,}2$ et $V(X) = 27{,}648$.
1. Montrer que $1 - p = 0{,}64$.
2. En déduire p puis n.

68 On considère une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et p inconnu et vérifiant $\sigma(Y) = 1{,}5$.
Déterminer la ou les valeurs possibles pour p.

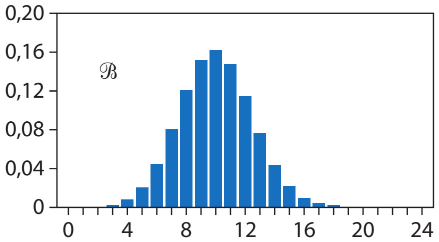
69 On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(Z) = 2$ et $0{,}15 \leqslant p \leqslant 0{,}16$.
1. Donner un encadrement de n puis en déduire sa valeur.
2. En déduire p.

Exercices d'application

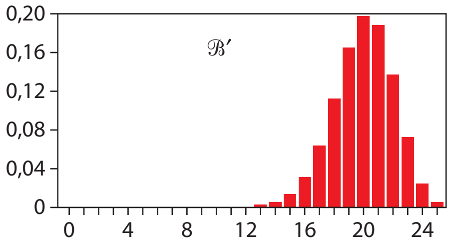
Espérance, variance et écart-type : aspect graphique

Méthode 5 p. 375

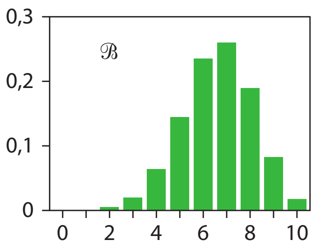
70 On donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une loi binomiale $\mathscr{B}$ de paramètres n inconnu et $p = 0,4$.



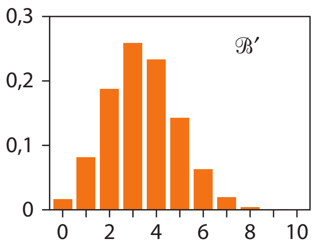
1. a) Soit X suivant la loi $\mathscr{B}$.
On admet que $E(X) \in \mathbb{N}$. Donner une valeur possible pour $E(X)$.
b) En déduire une valeur possible pour n.
2. On donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une loi binomiale $\mathscr{B}'$ de même paramètre n que $\mathscr{B}$ (mais p différent).
Comparer les écarts-types associés aux lois $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.



71 On donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une loi binomiale $\mathscr{B}$ de paramètres $n = 10$ et p inconnu.



1. Parmi les trois réels ci-dessous, lequel est susceptible d'être la valeur de p ?
a) 0,66 **b)** 0,16 **c)** 0,87
2. On donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une loi binomiale $\mathscr{B}'$ de même paramètre n que $\mathscr{B}$ (mais p différent).



Juana affirme que les écarts-types associés aux lois $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont les mêmes. Pourquoi ?

Vérification du respect d'un seuil

Méthode 6 p. 377

72 Quand Munir va faire ses courses, il prévoit toujours la même liste de 30 articles.
Malheureusement, pour chaque article, indépendamment les uns des autres, il a remarqué que la probabilité que l'article soit en rayon est 0,9.
Peut-il être « sûr », au seuil de 99 % de trouver :
a) moins de 28 articles ?
b) au moins 23 articles ?
c) entre 21 et 29 articles ?

73 On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,67$.
1. L'intervalle [2 ; 24] est-il un intervalle de fluctuation associé à X au seuil de 0,95 ?
2. L'intervalle [13 ; 26] est-il un intervalle de fluctuation associé à X au risque de 1 % ?

74 Une athlète de haut niveau finit toujours ses entraînements quotidiens par un « 100 m ». Elle a remarqué que la probabilité qu'elle le court en moins de 13 secondes est 0,94 indépendamment de son temps les autres jours.
Sur 61 entraînements, peut-elle être sûre au seuil de 95 % de courir :
a) entre 53 et 60 « 100 m » en moins de 13 secondes ?
b) moins de 59 « 100 m » en moins de 13 secondes ?
c) plus de 53 « 100 m » en moins de 13 secondes ?
d) au moins 4 « 100 m » en plus de 13 secondes ?

Vérification qu'un intervalle est un intervalle de fluctuation centré

Méthode 7 p. 377

75 On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 109$ et $p = 0,24$.
1. L'intervalle [18 ; 35] est-il un intervalle de fluctuation centré associé à X au seuil 95 % ?
2. L'intervalle [15 ; 38] est-il un intervalle de fluctuation centré associé à X au risque de1 % ?

76 On considère la variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 49$ et $p = 0,31$.
1. L'intervalle [9 ; 21] est-il un intervalle de fluctuation centré associé à Y au seuil 95 % ?
2. a) L'intervalle [10 ; 21] est-il un intervalle de fluctuation centré associé à Y au seuil 90 % ?
b) Sans calcul, l'intervalle [9 ; 22] est-il un intervalle de fluctuation centré associé à Y au risque de10 % ?

Successions d'épreuves

77 On considère la liste Python L suivante. Algo

```
L=[random.randint(2,i+3) for i in range(1,4)]
```

1. Expliquer pourquoi cette ligne de code permet de simuler une succession de trois épreuves indépendantes.

Coup de pouce `random.randint(a,b)` renvoie un entier au hasard entre *a* et *b*.

2. Donner l'univers associé à cette succession d' épreuves.
3. Calculer la probabilité de l'événement « `L=[2,3,4]` ».

78 À l'arrêt du bus amenant Kajanan au lycée, le panneau indique le temps d'attente 0 minute pendant 15 secondes (quand le bus est à l'arrêt pour embarquer les passagers) et 1, 2, 3, 4 ou 5 minutes le reste du temps, chacune pendant 60 secondes.
1. On considère l'épreuve consistant à se présenter à cet arrêt de bus et à regarder le temps d'attente indiqué en minutes. Déterminer les probabilités des différentes issues.
2. On s'intéresse à la succession de cette épreuve chaque jour d'une semaine (du lundi au vendredi), que l'on suppose indépendante d'un jour à l'autre.
a) Donner l'univers associé à cette répétition de cinq épreuves.
b) Calculer la probabilité que Kajanan doive attendre 2 minutes lundi, 4 mardi, 3 mercredi, 3 jeudi et 0 vendredi. Arrondir à 10^{-6}.

79 Dans le jeu télévisé Fort-Boyard, Algo
une certaine année, le taux de réussite à l'épreuve :
- de la chambre froide est 70 %
- de la balance est 65 %
- du roi du silence est 38 %
- du train fantôme est 59 %.

Une équipe commence le jeu par ces 4 épreuves dans cet ordre (on suppose que les résultats sont indépendants).
1. Quelle est la probabilité que l'équipe réussisse toutes les épreuves sauf la deuxième ?
2. Quelle est la probabilité que l'équipe réussisse les deux premières épreuves et manque les deux suivantes ?
3. Le présentateur annonce que la probabilité que l'équipe réussisse un « sans-faute » sur les 5 premières épreuves est de 7 %. Quel est le taux de réussite à la cinquième épreuve (non connue ici) ? Arrondir au % près.
4. Quelles sont les valeurs présentes dans la liste `L` de l'algorithme ci-dessous (où `alea()` renvoie un réel aléatoire entre 0 et 1) pour qu'il simule ces 5 épreuves selon qu'elles sont réussies ou non ?

```
L=[...]
Pour i dans L
   Si alea()⩽i
      Afficher "Succès à l'épreuve"
   Sinon
      Afficher "Échec à l'épreuve"
   Fin si
Fin pour
```

80 Pour aller au travail, Mathilde prend d'abord un bus devant chez elle : la probabilité qu'elle ait le bus de 7 h 15 est de 0,75 et celui de 7 h 20 est de 0,25.
Ensuite, elle prend le métro soit à 7 h 30 soit à 7 h 35 : la probabilité qu'elle prenne le métro à 7 h 30 est de 0,9 si elle a eu le bus de 7 h 15, et de 0,3 si elle a eu celui de 7 h 20.
Enfin, si elle a eu le métro de 7 h 30, elle arrive toujours à l'heure au travail et si elle a eu le métro de 7 h 35, elle arrive à l'heure avec une probabilité de 0,85.
1. Représenter cette situation par un arbre (utiliser des événements B 7h15, B 7h20, M 7h30, M 7h35 et T).
2. Calculer la probabilité que Mathilde arrive à l'heure.
3. Si Mathilde se lève *n* minutes plus tôt qu'actuellement, elle augmente sa probabilité d'avoir le bus de 7 h 15 de $\frac{n}{100}$.
Combien de minutes plus tôt doit-elle se lever pour que la probabilité qu'elle soit à l'heure soit d'au moins 0,98 ?

Loi binomiale

81 On considère une fonction Démo Algo
Python `bernoulli` de paramètre `p` telle que `bernoulli(p)` renvoie 1 avec une probabilité *p* et 0 avec une probabilité 1 – *p*.
Justifier que la fonction ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\ ;p)$.

```
def binomiale(n,p) :
   L=[bernoulli(p) for i in range(n)]
   return sum(L)
```

On admettra que les valeurs renvoyées par `bernoulli(p)` sont indépendantes.

Coup de pouce `sum(L)` renvoie la somme des valeurs des éléments de la liste L.

82 Lors d'une communication électronique, NSI
tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits. Une suite de 8 bits est appelée octet. Par exemple, 10010110 est un octet.
On se place dans le cas où l'on envoie successivement 8 bits qui forment un octet, on suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des autres bits et on admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.
1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement deux bits de l'octet soient mal transmis.
3. Que peut-on penser de l'affirmation suivante : « La probabilité que le nombre de bits mal transmis de l'octet soit au moins égal à trois est négligeable » ?

D'après Bac.

Exercices d'entraînement

83 Dans une usine, les produits passent deux tests indépendants.
La probabilité qu'un produit défectueux passe le premier test est 0,12 et la probabilité qu'il passe le deuxième test est 0,08.
Un produit qui passe les deux tests est mis en vente, les autres sont détruits.
1. Quelle est la probabilité qu'un produit défectueux soit mis en vente ?
2. Sur 100 produits défectueux indépendants les uns des autres, quelle est la probabilité qu'au moins trois soient mis en vente ? Justifier.

84 On considère le programme **Python** ci-dessous. Algo

```python
import random
L=[random.randint(1,10) for i in range(5)]
for a in L:
   if a < 7:
        print("succès")
   else:
        print("échec")
```

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le programme affiche succès.
Quelle est la loi de X ? Justifier.
2. Modifier le programme de sorte que plutôt que d'afficher succès ou échec, le programme créé une liste T telle que :
• `T[i]=1` si `L[i]<7` ;
• `T[i]=0` sinon.
Par exemple, si `L=[9,7,3,1,8]` alors `T=[0,0,1,1,0]`.

Utiliser l'expression de $p(X = 0)$ ou $p(X = k)$

85 On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0{,}25$.
1. Pour quelle valeur de n a-t-on $p(X = n) \approx 9{,}5 \times 10^{-7}$.
2. Pour quelle valeur de n a-t-on $p(X = 0) \approx 0{,}0001$?

86 On considère une variable aléatoire Y qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0{,}44$.
1. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p(Y = 0) < 10^{-5}$.
2. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p(Y \geqslant 1) > 0{,}99$.

87 On considère une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n inconnu et $p = 0{,}89$.
1. Déterminer la plus grande valeur de n pour laquelle $p(Z = n) > 0{,}01$.
2. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $p(Z < n) > 0{,}75$.

88 Une conceptrice de jeu vidéo est en train de créer un niveau dans lequel elle met n fois le même obstacle.
Les tests ont montré que la probabilité qu'un joueur dépasse cet obstacle sans le toucher est 0,95.
Combien d'obstacles pourra-t-elle mettre au maximum dans ce niveau si elle souhaite qu'un joueur ait plus de 50 % de chance de finir le niveau sans toucher l'obstacle ?

89 Au loto, la probabilité d'obtenir le plus gros gain lors d'un tirage est $\dfrac{1}{19\,068\,840}$.
1. Combien de fois faut-il jouer au loto pour avoir au moins 1 % de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?
2. À raison de trois tirages par semaine, combien d'années faudrait-il jouer pour avoir au moins 1 % de chance de gagner au moins une fois le plus gros gain ?

Comparaisons de lois binomiales

90 On considère deux jeux de grattage rapportant 0 ou 10 € :
• un ticket du premier jeu coûte 5 € et la probabilité de gagner est 0,45.
• un ticket du deuxième jeu coûte 2 € et la probabilité de gagner est 0,18.
1. Quel jeu faut-il privilégier pour « gagner » le plus d'argent si l'on joue un grand nombre de fois ?
2. Avec 100 €, combien de tickets de chaque jeu peut-on acheter ?
3. On considère les variables aléatoires G_1 donnant le nombre de tickets gagnants quand on en achète 20 du premier jeu et G_2 donnant le nombre de tickets gagnants quand on en achète 50 du deuxième jeu.
a) Calculer $E(G_1)$ et $E(G_2)$ puis interpréter ces valeurs dans des termes concrets.
b) Est-il plus « risqué » d'acheter 20 tickets du premier jeu ou 50 tickets du deuxième ?
c) Vaut-il mieux acheter 20 tickets du premier jeu ou 50 tickets du deuxième si l'on souhaite au moins rentrer dans ses frais ?

91 Zack doit choisir un nouveau bassiste pour son groupe de rock dont le prochain concert est dans 30 jours. Il auditionne deux bassistes :
• Tristane qui annonce pouvoir faire 20 répétitions mais dont la réputation prétend qu'elle ne se présente pas aux répétitions 40 % du temps ;
• Rob qui annonce pouvoir faire 15 répétitions mais dont la réputation prétend qu'il ne se présente pas aux répétitions 20 % du temps.
On admet l'hypothèse d'indépendance sur les présences aux répétitions d'un jour à l'autre et on appelle T et R les variables aléatoires donnant le nombre de répétitions assurées respectivement par Tristane et Rob dans le cas où ils sont choisis.

Déterminer lequel des deux bassistes choisir pour intégrer le groupe de Zack dans chacun des cas suivants :
a) Tristane et Rob ont besoin d'au moins 10 répétitions pour être au point pour le concert.
b) Tristane et Rob ont besoin d'au moins 15 répétitions pour être au point pour le concert.

92 Dans un jeu vidéo de danse, Medhi hésite entre deux épreuves proposées par le jeu :
• épreuve 1 : on propose 10 postures (indépendantes) et la probabilité de réussir chaque posture 0,5 ;
• épreuve2 : on propose 50 postures (indépendantes) et la probabilité de réussir chaque posture 0,9.
1. Quelle épreuve doit-il choisir si l'épreuve est validée si l'on manque 3 postures ou moins ?
2. Même question si l'épreuve est validée si l'on manque 7 postures ou moins ?

Déterminer un entier k avec $p(X \leqslant k)$

Méthode 8 p. 378

93 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 54$ et $p = 0{,}45$.
Déterminer le plus petit entier k tel que :
a) $p(X \leqslant k) \geqslant 0{,}005$. **b)** $p(X \leqslant k) > 0{,}995$.

94 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}71$.
Déterminer le plus petit entier k tel que :
a) $p(Y \leqslant k) \geqslant 0{,}025$. **b)** $p(Y \leqslant k) > 0{,}975$.

95 Soit F la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus lorsque l'on lance 20 fois la même pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,36.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[0 ; k]$ avec k entier tel que $p(F \in [0 ; k]) \geqslant 0{,}95$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire :
On peut être sûr au seuil de 95 % que la fréquence de FACE obtenus sera inférieure ou égale à … %.

96 On considère une fonction **Python** `proba_binomiale` telle que `proba_binomiale(n,p,k)` renvoie $p(X = k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p. **Algo**
1. Compléter la fonction `cumul_binomiale` ci-dessous de sorte que `cumul_binomiale(n,p,k)` renvoie $p(X \leqslant k)$ où X suit la loi binomiale de paramètre n et p.

```
def cumul_binomiale(n,p,k) :
    proba=…
    for i in range(…):
        proba=…
    return proba
```

2. Compléter la fonction `seuil_binomiale` ci-dessous de sorte que `seuil_binomiale(n,p,s)` renvoie le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant s$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def seuil_binomiale(n,p,s) :
    i = 0
    while cumul_binomiale(n,p,…) < s :
        i = …
    return i
```

Déterminer un entier k avec $p(X \geqslant k)$

Méthode 9 p. 379

97 Soit X qui suit la loi $\mathcal{B}(45 ; 0{,}78)$. Déterminer le plus grand k tel que :
a) $p(X \geqslant k) > 0{,}9$. **b)** $p(X \geqslant k) \geqslant 0{,}05$.

98 Soit Y qui suit la loi $\mathcal{B}(80 ; 0{,}125)$.
1. Déterminer le plus grand entier k tel que $p(Y \geqslant k) > 0{,}99$.
2. Déterminer le plus petit entier k' tel que $p(Y \geqslant k') \leqslant 0{,}02$.

99 Soit J la variable aléatoire donnant le nombre de boules jaunes obtenues lorsque l'on tire 40 fois avec remise une boule dans une urne en contenant 7 jaunes et 13 vertes.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[k ; 40]$ avec k entier tel que $p(J \in [k ; 40]) \geqslant 0{,}99$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire :
On peut être sûr au seuil de 99 % que la fréquence de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à … %.

Exercices d'entraînement

Déterminer un intervalle de fluctuation centré

Méthode 10 p. 379

100 Soit X qui suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}12)$ et $\alpha = 0{,}05$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X.

101 Soit Y qui suit la loi $\mathcal{B}(200\,;0{,}3)$ et $\alpha = 0{,}01$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au risque de α associé à Y.

102 Algo
Soit P la variable aléatoire donnant le nombre de nombres pairs obtenus lorsque l'on lance 25 fois la commande **Python** `random.randint(1,11)`.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à P.
2. En déduire sans calcul un encadrement de la fréquence de nombres pairs obtenus au risque de 5 %.

Problèmes de seuil

103 Dans un lycée, 237 élèves ont réservé un repas à la cantine. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, 7 % du temps il ne mange pas à la cantine.
1. Le personnel de la cantine ne voulant pas gâcher de nourriture souhaite savoir quel est le nombre minimal k de repas à préparer tout en restant sûr à au moins 95 % que tous les élèves se présentant auront un repas. Déterminer k.
2. Même question avec un risque que certains élèves n'aient pas de repas inférieur à 1 %.

104 Dans une équipe de football, un défenseur discute d'une clause dans son contrat : il aura une prime s'il reçoit n cartons jaunes ou moins sur les 38 matchs de la saison. Il a remarqué que la probabilité qu'il prenne un carton jaune lors d'un match est de 0,15.
1. En admettant que les cartons jaunes reçus d'un match à l'autre soient indépendants, quelle doit être la plus petite valeur de n pour qu'il soit sûr au seuil de 99 % de toucher cette prime ?
2. Même question avec un risque de ne pas recevoir la prime inférieur à 10 %.

105 À l'élection présidentielle de 2017, François Fillon a obtenu 20,01 % des suffrages exprimés au 1er tour.
On considère un sondage sur 1 000 personnes (supposément indépendantes) réalisé avant cette élection et F la variable aléatoire donnant la fréquence d'intention de vote pour F. Fillon dans ce sondage.
1. Déterminer un intervalle de la forme $[0\,;f]$ le plus petit possible tel que $p(F \in [0\,;f]) \geqslant 0{,}99$.
2. En 2016, la plupart des sondages créditent F. Fillon d'au moins 25 % d'intention de vote puis, à partir de février 2017, ils le créditent d'entre 17 % et 21 % d'intention de vote. Que peut-on en penser ?

106 Enseignement scientifique
Dans un organisme vivant, il y a un atome de carbone 14 pour 10^{12} atomes de carbone 12.
Lorsque l'organisme meurt, son nombre d'atomes de carbone 12 reste constant alors que ses atomes de carbone 14, étant radioactifs, se désintègrent de sorte qu'après 11 460 ans, la probabilité qu'un atome de carbone 14 soit désintégré est 0,25.
On prélève 2 µg de matière contenant 100 000 atomes de carbone 14 (supposés indépendants) sur un organisme à sa mort.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre d'atomes de carbone 14 non désintégrés après 11 460 ans dans ce prélèvement.

Coup de pouce Commencer à tabuler avec un pas de 10 000 puis un pas de 1 000, etc.

2. Donner une approximation du nombre d'atomes de carbone 12 pour un atome de carbone 14 dans ce prélèvement après 11 460 ans.

Trouver n ou p

107 Une compagnie aérienne doit remplir un avion de 180 fauteuils. Comme elle sait que le taux de défection habituel (on suppose que les défections sont indépendantes les unes des autres) des personnes ayant acheté un billet est de 9 %, elle décide de mettre plus de 180 billets en vente.
1. Déterminer le nombre de billets à vendre pour être sûr au seuil de 95 % de ne pas vendre trop de billets (c'est-à-dire qu'il n'y aura pas plus de 180 personnes qui prendront finalement le vol).
2. Déterminer le nombre de billets à vendre pour qu'il y ait moins d'1 % de chance que trop de billets ait été vendus.

108 Une équipe d'ingénieurs travaille sur un nouveau modèle d'aspirateur-robot.
Des études statistiques ont montré qu'un appareil fonctionnant normalement pendant deux ans sera confronté à 15 000 obstacles.
Lorsqu'il rencontre un obstacle, l'aspirateur soit le détecte, soit se cogne avec une probabilité p : on considère qu'au bout de 3 000 chocs, l'aspirateur risque de tomber en panne.
Comme la garantie dure deux ans, l'équipe doit améliorer le système de détection des obstacles de sorte que la probabilité que l'aspirateur endure plus de 3 000 chocs sur cette période de garantie soit inférieure à 3 %.
Déterminer le plus grand p possible pour que ce soit le cas. Arrondir à 10^{-3}.

Tests d'hypothèses

109 La directrice d'une société de location de véhicules affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
Sous cette hypothèse, on considère les 600 premiers contrats signés l'année précédente et on appelle C le nombre de contrats de courte durée parmi tous ces contrats, supposés indépendants.
1. Décrire la loi de la variable aléatoire C.
2. En déduire un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à C.
3. 550 des 600 contrats étaient de courte durée.
a) Faire le lien avec la réponse à la question **2**.
b) Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?

D'après bac.

110 On fait l'hypothèse qu'un médicament contre une maladie est efficace à 90 %. C'est-à-dire qu'un patient recevant ce médicament a 90 % de chances de guérir.
Pour tester cette hypothèse, on prélève un échantillon de 400 patients ayant reçu ce médicament et on regarde s'ils sont guéris ou non.
1. Décrire la loi de la variable aléatoire G donnant le nombre de patients guéris dans l'échantillon si l'on suppose que ce médicament est bien efficace à 90 %.
2. En déduire un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à $\frac{G}{400}$, la variable aléatoire donnant la fréquence de patients guéris dans l'échantillon.
3. Dans l'échantillon, 87,5 % des patients ont guéri.
Peut-on remettre en cause l'hypothèse faite en début de question, au seuil de 95 % ?

111 Une entreprise *high tech* annonce un taux de défaut de 3 % de ses appareils.
Un grossiste commande 1 000 appareils à cette entreprise et on appelle X le nombre d'appareils défectueux sur les 1 000, que l'on suppose indépendants.
1. D'après l'entreprise *high tech*, donner le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 99 % associé à X de la forme $[0 ; a]$.
2. 39 des 1 000 appareils sont retournés au grossiste pour cause de défaut.
Que peut-on penser du taux de défaut de 3 % annoncé ?

112 **Histoire des sciences**
Le botaniste Gregor Mendel est considéré comme le père de la génétique. Lors d'une de ses expériences fondatrices sur les pois, il a testé 600 plants indépendants. Si sa théorie est exacte, la probabilité d'être homozygote pour chacun de ces plants est $\frac{1}{3}$.
On appelle X le nombre de plants homozygotes parmi ces 600 plants.
1. On se place dans la situation où la théorie de Mendel est correcte : la probabilité qu'un plant soit homozygote est $\frac{1}{3}$.
a) Quel nombre de plants homozygotes Mendel peut-il espérer obtenir ?
b) Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X.
c) Mendel a trouvé 201 plants homozygotes. Que peut-on en penser ?
2. En réalité, sa méthode de détermination des plants homozygotes n'étant pas totalement fiable, il aurait dû trouver 37 % d'homozygotes.
Reprendre les questions précédentes avec cette donnée.
3. Il existe une controverse au sujet des résultats de Mendel.
En utilisant les questions précédentes, expliquer pourquoi on a pu penser qu'ils étaient « trop beaux pour être vrais ».

Travailler le Grand Oral

113 **Histoire des maths**
Dans une lettre de Pascal à Fermat, on trouve le problème suivant : deux joueurs misent chacun 32 pistoles (de sorte que le vainqueur gagne 64 pistoles) sur un jeu de type « pile ou face » en trois manches.
Pour une raison quelconque, la partie s'arrête après la première manche (gagnée par un des deux joueurs) : comment répartir équitablement les gains ?
En groupe, vous réfléchirez à la question.
Vous confronterez vos réponses entre-elles puis à celle proposée par Pascal.

114 Une expérimentation est lancée lors du championnat de basketball *G-league* 2019-2020.
Lorsqu'un joueur subira une faute durant un tir à 2 points, il ne tirera plus deux lancers-francs rapportant 1 point chacun mais un seul lancer-franc rapportant 2 points.
Mener un débat sur cette mesure.

Exercices bilan

115 La pêche à la ligne

A ▶ Épreuves non indépendantes

Le week-end, Michel va souvent à la pêche.
La probabilité qu'il y aille le samedi est 0,7 et la probabilité qu'il y aille le dimanche est :

- 0,3 s'il y est allé le samedi ;
- 0,9 s'il n'y est pas allé le samedi.

1. Expliquer pourquoi les deux épreuves consistant à regarder si Michel va à la pêche le samedi et le dimanche ne sont pas indépendantes.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré puis déterminer la probabilité qu'il aille au moins une fois à la pêche le week-end.

B ▶ Épreuves indépendantes

Lorsqu'il va pêcher, la probabilité qu'il aille pêcher :

- le sandre est de 0,4 ;
- la truite est de 0,35 ;
- le brochet est de 0,25.

Pour 10 parties de pêche successives supposées indépendantes, on s'intéresse au type de poisson (sandre S, truite T ou brochet B) que Michel est allé pêcher.
1. Donner l'univers Ω associé à cette succession de 10 épreuves indépendantes.
2. Quelle est la probabilité qu'il soit allé pêcher le sandre les cinq premières fois, la truite les deux suivantes et le brochet les trois dernières ?

C ▶ Loi binomiale

Michel a remarqué que 20 % des poissons qu'il pêche ne font pas la taille réglementaire et, dans ce cas, il doit les remettre à l'eau.
On considère la variable X donnant le nombre de poissons remis à l'eau quand il en pêche 50.
1. Sous quelle condition peut-on affirmer que X suit une loi binomiale ? En donner alors les paramètres.
Dans la suite on suppose que cette condition est vérifiée.
2. Soit $m = E(X)$.
Quelle est la probabilité qu'il doive remettre plus de m poissons à l'eau du fait d'une taille non réglementaire ?
3. Peut-il être sûr au seuil de 99 % qu'il devra remettre moins de 20 poissons à l'eau du fait d'une taille non réglementaire ?
4. Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre de poissons qu'il devra remettre à l'eau du fait d'une taille non réglementaire ?

116 Taux de satisfaction

Une agence de voyages annonce un taux de satisfaction de 98 %. Un organisme indépendant interroge 1 000 clients de cette société. On suppose tous ces clients indépendants et on appelle X le nombre de clients satisfaits dans l'échantillon.
1. Dans l'hypothèse où le taux de satisfaction donné par l'agence de voyage est correct, donner le plus petit intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 % de la forme $[a\,;\,1\,000]$ avec a entier.
2. Sur les 1 000 personnes interrogées, 974 ont déclaré être satisfaites. Peut-on douter du taux de satisfaction annoncé par l'agence, au seuil de 95 % ?

117 Gestion des réservations

Dans un magasin, 90 % des personnes ayant réservé un article en ligne viennent effectivement le chercher.
Ce magasin a reçu un stock de 500 *smartphones* qu'il permet de resérver sur son site Internet.
Combien de réservations supplémentaires peut-on accepter au maximum tout en restant sûr au seuil de 95 % de ne pas avoir plus de 500 personnes ayant réservé qui viennent effectivement chercher un *smartphone* ?

118 Choisir son podcast

Zoé écoute deux podcasts musicaux mensuels différents :

- dans le podcast 1, la probabilité qu'un titre joué lui plaise est 0,9 et le podcast est constitué de 10 titres (que l'on suppose indépendants) ;
- dans le podcast 2, la probabilité qu'un titre joué lui plaise est 0,75 et le podcast est constitué de 12 titres (que l'on suppose indépendants).

On appelle P_1 (respectivement P_2) la variable aléatoire donnant le nombre de titres joués lui plaisant dans le podcast 1 (respectivement podcast 2).
1. Justifier que dans les deux podcasts il y a en moyenne autant de titres qui plaisent à Zoé.
2. Calculer $p(7 \leqslant P_1 \leqslant 9)$ et $p(8 \leqslant P_2 \leqslant 11)$.
3. Lequel des deux podcasts doit-elle privilégier si elle souhaite entendre au moins 8 titres qui lui plaisent ?

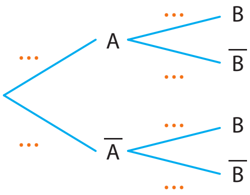
119 Probabililité de gagner

1. Combien de fois faut-il jouer à « pile ou face » avec une pièce équilibrée pour que la probabilité de n'obtenir aucune fois PILE soit inférieure à 10^{-9} ?
2. Même question pour une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir FACE est le quadruple de celle d'obtenir PILE.

Préparer le BAC L'essentiel

Succession d'épreuves non indépendantes

Tracer et utiliser un arbre.



Ou

Succession d'épreuves indépendantes

Lors de la répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité de $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)$ est : $p((x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)) = p(x_1)\times p(x_2)\times\ldots\times p(x_n)$.

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve est dite de Bernoulli si elle a deux issues : succès et échec.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

X suit une loi $\mathcal{B}(p)$ si $p(X=1)=p$ et $p(X=0)=1-p$.

Schéma de Bernoulli

Succession indépendante de la même épreuve de Bernoulli.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$

Le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

Intervalle de fluctuation

I est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ si $p(X\in \mathrm{I})\geqslant 1-\alpha$.

Intervalle de fluctuation centré

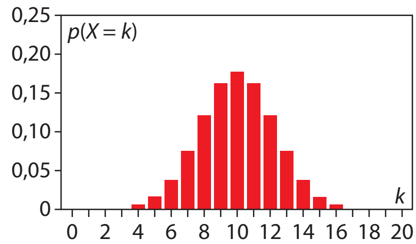
$[a\,;b]$ où a et b sont les plus petits entiers tels que :

$p(X\leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X\leqslant b)\geqslant 1-\dfrac{\alpha}{2}$ est

un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha$.

Propriétés de X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$

- $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$
- $P(X=k)=\dbinom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$
- Représentation graphique



Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
Modéliser une succession d'épreuves	1	1, 33, 35, 78, 80
Travailler avec un schéma de Bernoulli ou la loi binomiale	2, 3, 4	3, 49, 5, 7, 54, 55, 57, 61, 63, 86
Utiliser l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale	5	9, 70, 71
Vérifier si un événement sera réalisé à un seuil donné	6, 7	11, 72, 73, 13, 75, 76
Déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation	8, 9, 10	15, 93, 17, 97, 99, 19, 100, 103, 109

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s12-06

QCM **Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 120 à 126 : Une urne contient 200 boules dont 50 sont roses.
On tire successivement et avec remise 10 fois dans cette urne et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de boules roses obtenues.

	A	B	C	D
120 Cette succession de 10 épreuves indépendantes est :	un schéma binomial.	un schéma de Bernoulli.	une loi binomiale.	une loi de Bernoulli.
121 X suit une loi :	de Bernoulli.	indépendante.	binomiale.	conditionnelle.
122 X suit la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$ avec :	$n = 200$ et $p = 50$.	$n = 50$ et $p = 200$.	$n = 10$ et $p = 0{,}2$.	$n = 10$ et $p = 0{,}25$.
123 À 10^{-3} près, $p(X = 3)$ vaut :	0,474	0,25.	0,776.	0,251.
124 La probabilité d'obtenir entre 1 et 4 boules roses (inclus) est environ :	0,678	0,532.	0,866.	0,72.
125 La représentation graphique associée à X est en forme de :	cloche centrée sur 2,5.	cloche centrée sur 10.	cloche centrée sur 50.	cloche inversée.
126 Un intervalle de fluctuation de X au seuil de 95 % est :	[0 ; 4]	[0 ; 5]	[1 ; 5]	[1 ; 6]
127 L'univers associé à une expérience aléatoire est {A ; B ; C} avec $p(A) = 0{,}1$, $p(B) = 0{,}3$ et $p(C) = 0{,}6$. Lorsqu'on répète 4 fois indépendamment cette expérience, $p((C\,;B\,;A\,;C))$ vaut	0,18	0,0108	0,018	0,00108
128 Dans une entreprise, il y a 20 employés *juniors* et 30 employés *seniors*. On en tire au sort 3 sans remise pour participer à une commission, quelle est la probabilité qu'il y ait 1 *junior* et 2 *seniors* à 10^{-4} près ?	0,4438	0,4439	0,432	Cela dépend du tirage.

129 Épreuves indépendantes ou non

Algo

Dans son téléphone, Naïma a 457 titres classés en deux catégories : 261 « métal » et 196 « électro ».
La lecture est aléatoire. On considère l'épreuve consistant à jouer un titre et à regarder s'il est « métal » (M) ou « électro » (E). On donnera les probabilités arrondies au millième.

A ▶ Le mode aléatoire joue les titres aléatoirement sans rejouer deux fois de suite le même titre.
1. La succession de trois de ces titres joués est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Représenter cette succession d'épreuves par un arbre.
3. a) Calculer la probabilité que le téléphone joue exactement deux titres électro.
b) Calculer la probabilité que le téléphone joue un titre métal ou moins.

B ▶ Le mode aléatoire joue les titres totalement aléatoirement (donc il peut jouer un titre deux fois de suite).
1. La succession de cinq de ces épreuves selon que le titre joué est « métal » ou « électro » est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?
2. Donner l'univers associé à cette succession de cinq épreuves.
3. Quelle est la probabilité que le téléphone joue, dans cet ordre, un titre « métal » puis trois titres « électro » puis un titre « métal » ?
4. Quelle est la probabilité que le téléphone ne joue que des titres électro, sauf le premier ? Sauf le deuxième ?
5. Quelle est la probabilité que le téléphone joue exactement un titre « métal » sur les 5 ? Entre deux et quatre titres « métal » inclus ?

Coup de pouce Introduire une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

6. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule cette succession de cinq épreuves et mettre les catégories des titres simulés dans une liste qu'elle renvoie.

```
def cinq_titres() :
    L=[]
    for i in range(…) :
        if random.randint(1,457)<=…:
            L.append("Métal")
        else:
            L.append("…")
    return L
```

Coup de pouce Se demander combien de fois on ajoute un titre à la liste et sous quel critère sur l'instruction `random.randint(1,457)`, on peut considérer que le titre simulé est « métal ».

Méthode 1 p. 369 Méthode 3 et Méthode 4 p. 373

130 Une urne

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher. On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne en remettant dans l'urne la boule tirée après chaque tirage.
1. Justifier que cette succession de tirages est un schéma de Bernoulli et le représenter par un arbre
2. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.
3. Quel est le plus petit entier naturel n pour lequel $q_n \geqslant 0{,}9999$?

Méthode 2 p. 371 Méthode 3 p. 373

D'après Bac Métropole, septembre 2019

131 Seuil et intervalle de fluctuation centré

Un grossiste en appareils électroniques assure que seulement 2 % des appareils qu'il vend ont des défauts.
Pour tester son affirmation, la responsable d'une grande surface tire au sort 1500 appareils parmi ceux livrés par ce grossiste, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise. On appelle D la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils avec défaut.
1. Dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte, la responsable de la grande surface peut-elle être sûre, au seuil de 90 %, d'avoir moins de 45 appareils avec défaut ?
2. a) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à D dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte.
b) Il y a 40 appareils avec défaut parmi les 1500. Cela remet-il en cause l'affirmation du grossiste ?

Coup de pouce Confronter le nombre d'appareils avec défaut obtenus et le nombre attendu.

Méthode 6 p. 377 Méthode 10 p. 379

132 Problème de seuil

D'après des études marketing, un certain livre n'est pas apprécié par 15 % de ses lecteurs.
Un club de lecture commande 236 exemplaires de ce livre pour ses membres auprès d'un libraire qui lui propose que si plus de k membres n'apprécient pas le livre, alors il fera une réduction de 5 % sur la commande.
Comment fixer la valeur minimale possible de k afin que le libraire soit sûr de ne pas avoir à faire la réduction, au risque d'erreur de 1 % ?

Coup de pouce Introduire une variable aléatoire X donnant le nombre de membres n'appréciant pas le livre puis traduire la contrainte par une probabilité sur X et k.

Méthode 9 p. 379

Exercices vers le supérieur

133 La bonne martingale ?

Au casino, Jamila joue à un jeu à quitte ou double c'est-à-dire que si elle joue x €, son gain algébrique est de $-x$ € si elle perd, et de $2 \times x - x = x$ € si elle gagne.
La probabilité de gagner à ce jeu est 0,49.
Elle adopte alors la stratégie consistant à miser et :
- si elle gagne, elle quitte le casino ;
- si elle perd, elle rejoue en misant le double de ce qu'elle avait misé la fois précédente.

Jamila joue avec une 1re mise de 1 000 €.

A ▶ Loi géométrique

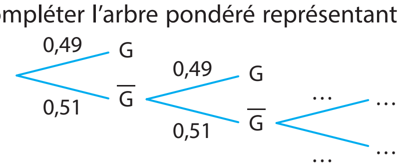
1. a) Quelle est la probabilité que Jamila quitte le casino après une partie ?
b) Même question pour deux parties, pour trois parties puis pour k parties avec $k \in \mathbb{N}^*$.
c) En déduire, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $p(X = k)$ où X est la variable aléatoire donnant le nombre de parties jouées avant de gagner.

Remarque Cette variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre $p = 0{,}49$.

2. a) Quel sera son gain algébrique si elle gagne à la première partie ?
b) Même question pour les deuxième puis troisième parties.
c) Que peut-on conjecturer sur le gain algébrique quand on gagne à la k-ième partie ?
3. On considère la suite (u_n) donnant la somme d'argent misée à la n-ième partie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) En déduire le total des sommes misées entre la 1re et la n-ième partie. Démontrer la conjecture faite en **2. c)**.
4. On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique réalisé à ce jeu.
a) Donner la loi de probabilité de G.
b) En quoi cela paraît-il paradoxal ? Expliquer pourquoi ça ne l'est pas réellement (on pourra se demander combien d'argent Jamila aura dépensé au bout de 10 parties).

B ▶ Loi géométrique tronquée

1. Jamila dispose de 15 000 € pour jouer. Après combien de parties perdues sera-t-elle contrainte d'arrêter de jouer ?
2. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant la situation (où G désigne l'événement « Gagner la partie »).



b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y donnant le nombre de parties jouées avant de gagner et où l'on décide par convention de considérer que $Y = 0$ si Jamila ne gagne pas.

Remarque Cette variable aléatoire Y suit la **loi géométrique tronquée** de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}49$.

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire G' donnant le gain algébrique réalisé à ce jeu puis calculer $E(G')$.
3. Reprendre les questions **1.**, **2. b) c)** dans le cas où Jamila mise 100 € plutôt que 1 000 € au départ.
4. Discuter des deux stratégies (mise de départ de 1 000 ou 100 €).

134 Intervalle de fluctuation centré Démo

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p et $\alpha \in]0\,;1[$.

1. Montrer que si deux nombres a' et b' vérifient

$p(X < a') \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X > b') \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ alors

$p(X \in [a'\,;b']) \geqslant 1 - \alpha$.

2. On considère l'intervalle $[a\,;b]$ où :
- a est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$;
- b est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.

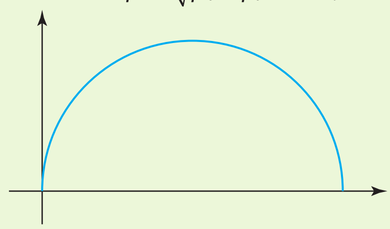
a) Montrer que $p(X < a) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

b) Montrer que $p(X > b) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

3. En déduire que l'intervalle $[a\,;b]$ défini à la question **2.** est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$.

135 Influence de p sur l'écart-type

1. Étudier la fonction $p \mapsto \sqrt{p(1-p)}$ sur $[0\,;1]$.



2. Montrer que la courbe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0{,}5$.
3. En déduire que pour deux variables aléatoires X et X' suivant des lois binomiales de paramètres respectifs n et p et n et p' tels que $|0{,}5 - p| < |0{,}5 - p'|$, on a $\sigma(X) > \sigma(X')$.

136 Test d'hypothèse Médical

On fait l'hypothèse qu'une maladie touche 15 % de la population.
Afin de tester cette hypothèse, on évalue le cas de 200 personnes dans la population et on trouve que 25 de ces personnes sont touchées par la maladie.
Doit-on rejeter l'hypothèse que 15 % de la population est malade, au risque d'erreur de 5 % ?

Exercices vers le supérieur

137 Probabilité et loi binomiale

PCSI MPSI Démo

On considère une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$ et k entier entre 0 et n. Le but de l'exercice est de démontrer la formule $p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

1. Soit la variable aléatoire X_{n+1} suivant la loi binomiale de paramètres $n+1$ et $p \in]0\,;1[$.
Justifier que $p(X_{n+1} = k) = p(X_n = k-1) \times p + p(X_n = k) \times (1-p)$.

2. a. Soit k entier entre 0 et n. Montrer que :

$$p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \text{ si } k = 0 \text{ ou } k = n.$$

b. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

138 Espérance de la loi binomiale

PCSI MPSI

Soit k et n deux entiers avec $n \geqslant 2$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, $p \in]0\,;1[$ et la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$ pour $k \geqslant 1$.

2. En déduire qu'on a : $p(X=k) \times k = np \times p(Y=k-1)$ pour $k \geqslant 1$, où Y suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et p.

3. On considère $E(X) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k) \times k$

$= p(X=0) \times 0 + p(X=1) \times 1 + \ldots + p(X=n) \times n$.

a) Montrer que :

$$E(X) = np(p(Y=0) + p(Y=1) + \ldots + p(Y=n-1)).$$

b) En déduire $E(X)$.

139 Relation de Panjer

Économie

On dit qu'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

- $p(N=0) \neq 1$
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $p(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) p(N=k-1)$.

A ▶ On suppose dans cette partie que $a < 0$ *et* $b = -2a$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $p(N=k) = 0$.

2. En déduire que dans ce cas N suit une loi de Bernoulli et préciser le paramètre a en fonction de $p(N=0)$.

B ▶ On suppose dans cette partie que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$.

1. Montrer que pour tout k entier dans $[1\,;n]$, on a :

$$p(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times p(Z=k-1).$$

2. En déduire que Z vérifie une relation de Panjer. Préciser les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

D'après sujet ECRICOME 2018

140 Loi de Poisson

TICE

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Poisson (du nom du mathématicien Siméon Denis Poisson) de paramètre $\lambda > 0$ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$p(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

1. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

a) Tabuler $p(X=k)$ (arrondir à 0,01 près) et dire à partir de quelle valeur de k, on a $p(X=k) < 0{,}01$.

b) Représenter graphiquement cette variable aléatoire X à l'aide d'un diagramme en barres.

c) En négligeant les valeurs de k supérieures à celles trouvées en **1. a)**, conjecturer une valeur possible de $E(X)$.

▶ **Remarque** L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ est λ.

2. On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}002$.

a) Représenter graphiquement cette variable aléatoire Y à l'aide d'un diagramme en barres sur le même graphique que le diagramme en barres de la variable aléatoire X.

b) Une propriété mathématique dit que :
« Pour un grand nombre n de répétitions indépendantes d'une même expérience aléatoire, si l'on considère un événement assez rare de probabilité p, la probabilité qu'il se réalise k fois est proche de $p(X=k)$ où X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. »
Expliquer en quoi les variables aléatoires X et Y illustrent bien cette propriété.

3. On considère la variable aléatoire B donnant le nombre de faux billets qu'un individu aura en sa possession dans sa vie (3 en moyenne d'après une étude statistique) que l'on modélise par la loi de Poisson de paramètre 3.

a) Expliquer pourquoi une modélisation par cette loi de Poisson semble pertinente.

b) Calculer la probabilité qu'un individu ait plus de 4 faux billets en sa possession dans sa vie.

141 Dénombrer avec les probabilités

Démo

1. Montrer que $0{,}5^n\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}\right) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Travaux pratiques

TICE — 10 min — Calculer

1 Calculatrice et loi binomiale

Il s'agit de calculer directement des probabilités de la forme $p(X = k)$ ou $p(X \leqslant k)$ où X suit une loi binomiale à l'aide d'une calculatrice.

A ▸ Probabilité $p(X = k)$

On souhaite calculer la probabilité $p(X = 3)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(11\ ;0{,}4)$.

TI-83 Premium CE

Étape ① On accède au menu **distrib** en appuyant successivement sur les touches 2nde puis distrib var.

Étape ② On sélectionne **A:binomFdp(** dans le menu ci-dessous :

```
DISTR DESSIN
9↑FFdp(
0:FFRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(
```

Étape ③ On obtient le menu ci-dessous :

```
binomFdp
nbreEssais:11
p:0.4
valeur de x:3
Coller
```

dans lequel, on rentre dans l'ordre n (ici 11), p (ici 0.4) et k (ici 3) puis on valide en sélectionnant **Coller**.

Étape ④ **binomFdp(11,0.4,3)** est affiché à l'écran, on le valide avec la touche entrer pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

CASIO GRAPH 90+

Étape ① Dans le menu de base **Exe-Mat**, on appuie sur la touche OPTN puis on sélectionne **STAT** avec **F5** puis **DIST** avec **F3** puis **BINOMIAL** avec **F5**.

Étape ② On sélectionne alors **Bpd** ce qui engendre l'affichage de **BinomialPD(** à l'écran.

Étape ③ On complète cette ligne avec dans l'ordre k (ici 3), n (ici 11) et p (ici 0.4) séparés par des virgules (obtenues avec la touche ,) puis on ferme la parenthèse de sorte que l'on obtienne `BinomialPD(3,11,0.4)` puis on valide avec la touche EXE pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$cherchée.

NUMWORKS

Étape ① On appuie sur ⌂ et on choisit **Probabilités.**

Étape ② On sélectionne ensuite **Binomiale** :

```
Choisir le type de loi
Binomiale
```

Étape ③ On règle les valeurs de n (ici 11) et p (ici 0.4) puis on valide **Suivant** :

```
n        11
p       0.4
Suivant
```

Étape ④ Avec les flèches, on se déplace sur la courbe à gauche et on fait apparaître le menu déroulant avec EXE :

```
P(X≤ 0   )=
```

puis on sélectionne le dernier pictogramme et on valide.

Étape ⑤ On saisit k (ici 3) après le = et on valide de sorte d'obtenir :

```
P(X= 3   )= 0.1773674
```

B ▸ Probabilité $p(X \leqslant k)$

On souhaite calculer $p(X \leqslant 5)$ avec la variable aléatoire X de la partie **A**.

Pour cela, on procède exactement de la même manière, à ceci près que :

- TI : À l'étape ②, on choisit **B:binomFRép** plutôt que **A:binomFdp,** on obtient donc **binomFRép(11,0.4,5)** à l'étape ④ qui donne environ 0,753.
- CASIO : À l'étape ②, on choisit **Bcd** plutôt que **Bpd,** on obtient donc **BinomialCD(5,11,0.4)** à l'étape ③ qui donne environ 0,753.
- NUMWORKS : À l'étape ④, on choisit plutôt que , on obtient donc `P(X≤ 5   )= 0.7534981`

TICE Algo 55 min **Modéliser Calculer**

2 Choisir le bon nombre

1. On considère la fonction f donnée dans le script **Python** ci-dessous.

```
def f(n):
    fact=1
    if n!= 0:
        for i in range(1,n+1):
            fact=fact*i
    return fact
```

a) Déterminer `f(3)` et `f(6)`.
b) Concrètement, quelle est la valeur de `f(n)` ?
c) Recopier le script de la fonction *f* sur un ordinateur.
2. Écrire une fonction `parmi` de paramètres `k` et `n` telle que `parmi(k,n)` renvoie $\binom{n}{k}$.
3. Écrire une fonction `proba_binom` de paramètres `n`, `p` et `k` telle que `proba_binom(n,p,k)` renvoie $p(X=k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
4. On souhaite écrire une fonction `seuil` telle que `seuil(n,p,alpha)` renvoie le plus petit entier `k` tel que $p(X > k) \leqslant \text{alpha}$.
a) Montrer que `k` est également le plus petit entier tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 1 - \text{alpha}$.
b) Recopier la fonction ci-dessous en complétant les pointillés de sorte qu'elle réponde au problème posé.

```
def seuil(n,p,alpha):
    proba=proba_binom(n,p,0)
    k=0
    while proba < …:
        k = k+1
        proba=proba+proba_binom(…, …, …)
    return k
```

5. Dans la console, saisir `seuil(10,0.3,0.05)` et vérifier avec la calculatrice que la valeur renvoyée est bien celle souhaitée.
6. Une artiste a vendu 543 tickets pour un de ses concerts mais elle sait d'expérience que chaque spectateur (indépendamment des autres) a une probabilité de 3 % de ne pas venir (à cause d'un empêchement, un oubli, ou autre).
La salle qu'elle a réservée pour son concert doit faire la mise en place et lui demande combien de fauteuils il faut installer.
a) Justifier que la variable aléatoire N donnant le nombre de personnes se rendant effectivement au concert suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.
b) Calculer $p(N > 530)$ puis dire, si l'artiste prévoit 530 fauteuils, la probabilité que des spectateurs n'aient pas de place ?
c) Si l'artiste prévoit 540 fauteuils, y a-t-il moins de 1 % de risque que des spectateurs n'aient pas de place ?
d) Comme l'installation de chaque fauteuil lui est facturée, l'artiste souhaite en demander le moins possible.
En utilisant le programme écrit dans les questions **1.** à **5.**, dire combien l'artiste doit en demander au minimum tout en restant sûre, au risque de 1 %, que tous les spectateurs auront une place.

TICE Algo 40 min

Modéliser
Représenter
Calculer

3 Un train bien rempli

Sur son site de réservation en ligne, une agence de voyage met en vente des billets de train Paris-Vierzon selon 4 tarifs.
- Le tarif 1 est de 45 € pour les billets de seconde classe non échangeables ni remboursables.
- Le tarif 2 est de 60 € pour les billets de seconde classe échangeables et remboursables.
- Le tarif 3 est de 70 € pour les billets de première classe non échangeables ni remboursables.
- Le tarif 4 est de 85 € pour les billets de première classe échangeables et remboursables.

Des études de marché ont montré que lorsqu'une personne se connecte pour acheter un billet, la probabilité qu'elle choisisse :
- le tarif 1 est 0,37 ;
- le tarif 2 est 0,31 ;
- le tarif 3 est 0,22 ;
- le tarif 4 est 0,1.

Le but de ce TP est de simuler le remplissage de ce train sur les 100 premiers billets achetés.

Coup de pouce Penser à importer le module `random`.

1. On considère la variable aléatoire X qui donne le prix d'un billet choisi c'est-à-dire prenant les valeurs 45, 60, 70 et 85 avec les probabilités données plus haut.
Écrire une fonction **`simul_tarif`** sans paramètre qui simule la variable aléatoire X et renvoie sa valeur (45, 60, 70 ou 85).

PYTHON Fonction remplissage lienmini.fr/maths-s12-07

2. Écrire, en le retrouvant en ligne ou en le recopiant, le script ci-contre à la suite de la fonction **`simul_tarif`** sans l'exécuter pour l'instant.

```
import matplotlib.pyplot as plt
def remplissage() :
   plt.close()
   numero_client=[i+1 for i in range(100)]
   echantillon=[]
   for k in range(100) :
      echantillon.append(simul_tarif())
      plt.plot([k+1],[sum(echantillon)/(k+1)],'b.')
   plt.plot(numero_client,echantillon,'r.')
   plt.show()
```

3. a) Quelles valeurs contient la liste **`numero_client`** ?
b) Décrire les valeurs présentes dans la liste **`echantillon`** en faisant le lien avec l'énoncé de départ.
4. On rappelle que, pour deux listes **`x`** et **`y`**, la commande **`plt.plot(x,y,'r.')`** permet de placer en rouge (ou en bleu si l'on remplace **`'r.'`** par **`'b.'`**) dans un repère les points dont les abscisses sont dans la liste **`x`** et les ordonnées dans la liste **`y`**.
En particulier, pour des listes `[a]` et `[b]` ne contenant respectivement qu'un seul élément, **`plt.plot([a],[b],'b.')`** place le point de coordonnées $(a\,;b)$.
a) Dans un repère, tracer les cinq premiers points placés par la commande **`plt.plot(numero_client, echantillon,'r.')`** si **`echantillon`** est `[60,60,45,70,60,etc.]` (attention à prendre la bonne couleur).
b) Même question pour les cinqs premiers points placés par la commande **`plt.plot([k+1],[sum(echantillon)/(k+1)],'b.')`** lors des cinq premiers passages dans la boucle (pour k = 0 jusqu'à k = 4) si **`echantillon`** est `[60,60,45,70,60,etc.]`. On fera le tracé sur le même graphique que celui de la question **4. a)**.

Coup de pouce Pour une liste **`x`**, la commande **`sum(x)`** renvoie la somme des valeurs de **`x`**.

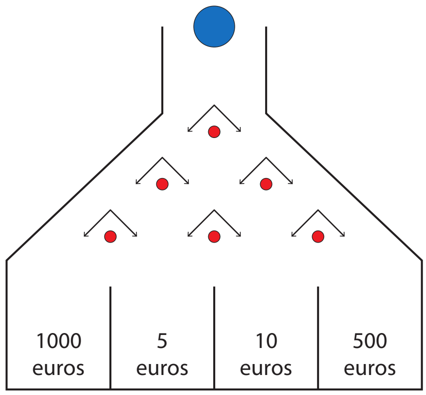
5. Exécuter le script une fois puis exécuter plusieurs fois **`remplissage()`** depuis la console.
6. a) De quelle valeur e semble toujours « se rapprocher » le nuage de points bleus ?
b) Dire à quoi correspond cette valeur pour la variable aléatoire X puis calculer la valeur exacte de e.

TICE Algo 40 min

Modéliser
Représenter
Calculer

4 La planche de Galton

A ▸ Avec 3 étages



Dans un jeu télévisé, on fait glisser un palet le long d'une planche cloutée comme ci-contre (le palet est en bleu et les clous en rouge).
À chaque étage, le palet rencontre un clou et va à gauche sur le dessin ou à droite puis, après 3 étages, il arrive dans un des quatre réceptacles et indique le gain de la joueuse ou du joueur.

1. a) Quel serait le gain de la joueuse ou du joueur si le palet allait à gauche puis à droite puis à gauche ? À droite puis à droite puis à gauche ?

b) Quel serait le gain de la joueuse ou du joueur si le palet allait une fois à gauche et deux fois à droite (indépendamment de l'étage) ?

2. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où le palet va à gauche sur le dessin.

a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en donner les paramètres n et p.

b) Calculer $p(X = 0)$, $p(X = 1)$, $p(X = 2)$ et $p(X = 3)$.

3. Écrire et compléter le programme **Python** ci-contre afin qu'il simule le lancer d'un palet et affiche le gain correspondant.

```
import random
gauche=0
for i in range(3):
   if random.random() <= 0.5:
      gauche = gauche+1
if gauche == 0:
   print("… euros")
…
```

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire G donnant le gain à ce jeu.

g_i	1 000	5	10	500
$p(G = g_i)$	…	…	…	…

B ▸ Avec 11 étages

On considère le même dispositif appelé « planche de Galton » mais cette fois-ci avec 11 étages : c'est le dispositif utilisé par le présentateur dans l'extrait suivant.

VIDÉO
La planche de Galton
lienmini.fr/maths-s12-01

1. Expliquer pourquoi il y aura 12 réceptacles en bas de la planche.

2. a) Le programme loi binomiale permet de simuler les lancers de m billes où m est choisi par l'utilisateur en début de programme et de visualiser l'évolution des effectifs des billes arrivées dans chacun des réceptacles (numérotés de 0 pour le plus à gauche à 11 pour le plus à droite).
Aller chercher ce programme en ligne et le lancer plusieurs fois pour un nombre de billes compris entre 100 et 250.

PYTHON
Loi binomiale
lienmini.fr/maths-s12-08

b) De quelle loi les graphiques obtenus sont-ils caractéristiques ?

3. a) Quand on lance une bille, expliquer pourquoi la variable aléatoire R donnant le numéro du réceptacle dans lequel il finit suit une loi binomiale puis donner les paramètres n et p de cette loi binomiale.

b) Tracer le diagramme en barres associé à cette loi binomiale c'est-à-dire le diagramme en barres pour lequel les barres sont centrées sur les valeurs entières k entre 0 et n et dont la hauteur des barres est donnée par $p(R = k)$.

c) Faire le lien avec la vidéo de début de chapitre.

4. Quel phénomène permet d'expliquer que pour un même nombre de billes au départ, quand on reproduit l'expérience, on n'obtient pas toujours le même nombre de billes dans des réceptacles identiques ?