12

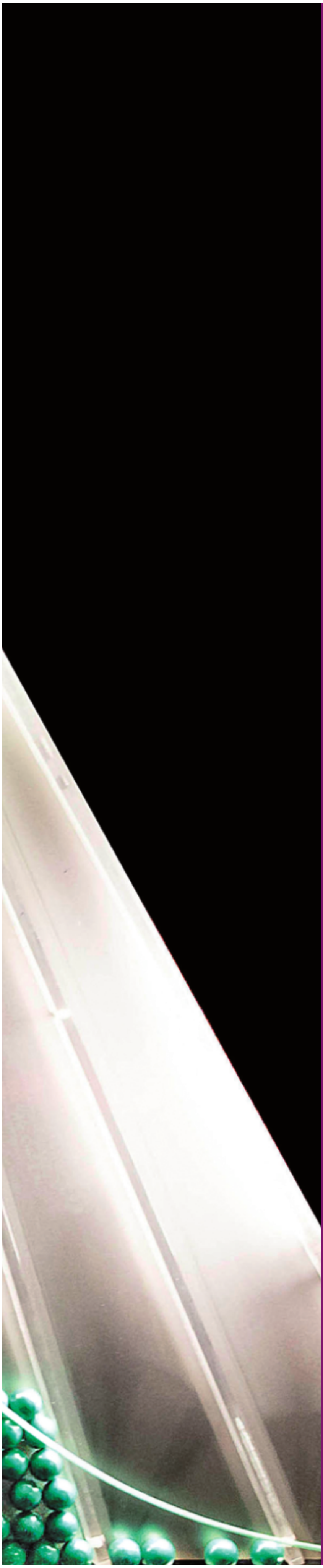
Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Dans cet extrait de l'émission *Défis Cobayes*, les candidats sont interrogés sur la répartition des billes dans cet étrange instrument qu'est la planche de Galton.

Comment expliquer la répartition des billes dans les réceptacles ? ↪ TP 4 p. 399

VIDÉO WEB

La planche de Galton
lienmini.fr/maths-s12-01



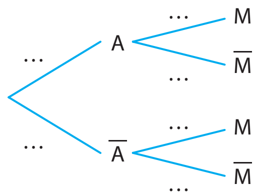
Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s12-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser un arbre pondéré

Dans un supermarché, 22 % des paiements se font à la caisse automatique dont 74 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour les paiements en caisse non automatique, 11 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour un paiement effectué dans ce magasin, on considère les événements :
- A : « le paiement a été fait en caisse automatique »
- M : « le paiement correspond à des courses de moins de dix articles ».



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation :
2. a) Calculer $p(A \cap M)$ puis $p(M)$.
b) En déduire $p_M(A)$.

2 Représenter une succession de deux épreuves indépendantes

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 puis une pièce équilibrée à PILE ou FACE.
1. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.
2. Déterminer la probabilité que le résultat du dé soit inférieur ou égal à 3 et que la pièce tombe sur PILE.

3 Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coutant 1 € rapporte :
- 100 € avec une probabilité 0,005 ;
- 20 € avec une probabilité 0,01 ;
- 5 € avec une probabilité 0,02 ;
- 1 € avec une probabilité 0,1 ;
- 0 € avec une probabilité 0,865.

On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique à ce jeu (tenant compte du prix du ticket).
1. Donner la loi de probabilité de G sous forme de tableau.
2. a) Calculer E(G), l'espérance de G, puis σ(G), son écart-type.
b) Ce jeu est-il équitable ?
3. Calculer $p(G \geqslant 15)$.

4 Savoir dénombrer

Calculer sans calculatrice.

a) 3 ! **b)** 5 ! **c)** $\binom{1000}{0}$ **d)** $\binom{36}{36}$ **e)** $\binom{5}{3}$ **f)** $\binom{6}{4}$

Activités

25 min

1 Observer des tirages indépendants ou non

A ▸ Avec des boules

Dans une urne opaque contenant 11 boules indiscernables au toucher : six de couleur orange et cinq de couleur verte, une magicienne annonce qu'elle va tirer quatre boules sans remise et qu'elle va obtenir quatre boules vertes. Quelle est la probabilité qu'elle réalise l'exploit annoncé sans « tricher » ?

B ▸ Avec des dés

Une magicienne annonce qu'elle va lancer 11 fois de suite deux dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et :

- sur le premier lancer, la somme des résultats affichés par les deux dés sera 2 ;
- sur le deuxième lancer, la somme des résultats affichés par les deux dés sera 3 ;
- etc. jusqu'au dernier lancer où la somme des résultats affichés par les deux dés sera 12.

Déterminer la probabilité qu'elle réalise ce nouvel exploit sans « tricher » ?

↪ Cours 1 p. 368

NSI 25 min

2 Reconnaître un schéma de Bernoulli

Dans un ordinateur, plusieurs programmes peuvent être lancés simultanément.
L'ordonnanceur du système d'exploitation gère la file d'attente pour que le processeur traite les taches demandées par chaque programme.
On s'intéresse à un ordonnanceur qui alloue aléatoirement des plages de 2 ms de traitement aux programmes. Un programme nécessitant 8 ms de traitement, par exemple, devra donc être traité 4 fois pour être complètement exécuté.
L'ordonnanceur tire au sort l'un des programmes en cours d'exécution et oblige son traitement pendant 2 ms puis il recommence (avec la possibilité de reprendre le même programme qu'à la plage précédente) jusqu'à l'exécution complète de chacun des programmes.

1. On considère deux programmes P1 et P2 nécessitant respectivement 6 ms et 12 ms de traitement.

a) Représenter par un arbre les trois premières plages allouées par l'ordonnanceur selon que c'est le programme P1 ou le programme P2 qui est traité.

b) Quelle est la probabilité que le programme P1 soit au moins à moitié exécuté à l'issue de ces trois plages ?

c) Dans cette modélisation, les épreuves successives considérées sont-elles identiques ? Indépendantes ?

2. a) Représenter par un arbre les quatre premières plages allouées par l'ordonnanceur.

b) Lorsque l'on réalise *n* fois de manière indépendante une même expérience à deux issues, on dit que la succession de ces *n* épreuves est un schéma de Bernoulli.

Les quatre épreuves successives de la question **2. a)** sont-elles un schéma de Bernoulli ? Expliquer pourquoi.

↪ Cours 2 p. 370

30 min

3 Découvrir la loi binomiale

En 2019, le basketteur LeBron James avait les taux de réussite suivants : 54,8 % au tir à deux points et 34,3 % au tir à trois points.

1. Lors d'un match, le temps restant ne laisse que quatre possessions du ballon à son équipe. Lebron James compte tirer quatre fois. Selon vous, quel type de tir doit-il choisir pour maximiser ses chances de marquer au moins 6 points en quatre tirs du même type (à deux points ou à trois points) ?

2. On considère que LeBron James choisit de faire quatre tirs à deux points.

a) Justifier que chacun de ces tirs est une épreuve de Bernoulli. Préciser la probabilité d'un succès.

b) Quelle hypothèse doit-on faire sur ces quatre tirs pour pouvoir les assimiler à un schéma de Bernoulli ?

Dans la suite, on considère que cette hypothèse est vérifiée.

c) Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

d) On considère la variable aléatoire D donnant le nombre de tirs réussis sur les quatre. Calculer $p(D \geqslant 3)$.
Info : On dit que D suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}548$.

3. On considère maintenant que James choisit de faire quatre tirs à trois points.

a) Reprendre les questions **2. a)** à **c)** pour cette nouvelle succession d'épreuves.

b) On considère la variable aléatoire T donnant le nombre de tirs réussis sur les quatre. Calculer $p(T \geqslant 2)$.

4. Répondre à la question **1** à l'aide des réponses aux questions **2 d)** et **3 b)**.

↪ Cours 3 p. 372

25 min

4 Trouver une probabilité avec la loi binomiale

En 2019, le basketteur LeBron James avait 54,8 % de réussite au tir à deux points. On considère que James fait huit tirs supposés indépendants à deux points et on appelle D la variable aléatoire donnant le nombre de succès c'est-à-dire le nombre de tirs réussis.

1. a) Quelle loi suit D ?

b) Sans essayer de le tracer, évaluer combien de chemins possède l'arbre représentant le schéma de Bernoulli associé à ces huit tirs.

2. Pour quelle valeur de k, l'événement $D = k$ correspond-il à l'événement « marquer exactement 12 points » ?

3. a) Justifier que 28 chemins de l'arbre de **1. b)** correspondent à cet événement $D = k$.

Coup de pouce Choisir un chemin correspondant à cet événement revient à choisir … positions pour les pondérations égales à 0,548 parmi les huit pondérations présentes sur le chemin.

b) Quelle est la probabilité associée à chacun de ces 28 chemins (c'est-à-dire le produit des huit pondérations écrites sur les branches) ?

c) En déduire la probabilité de marquer exactement 12 points pour James.

↪ Cours 3 p. 372

Cours

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition **Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes**

Soit une succession de *n* épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$.
L'univers associé à cette succession de *n* épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$.

Remarque
Si les *n* épreuves indépendantes sont identiques et que l'on note Ω l'univers associé à chacune d'elle, l'univers associé à cette succession est noté Ω^n.

Exemples
On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.
- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont indépendantes.
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est $\{1\,;2\,;3\,;4\} \times \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\} \times \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\}$.
- $(2\,;5\,;7)$, par exemple, est une issue associée à cette succession de trois épreuves indépendantes, elle correspond à l'obtention d'un 2 au premier dé, d'un 5 au deuxième et d'un 7 au troisième.
- En revanche, $(5\,;2\,;7)$ n'est pas une issue associée à cette succession de trois épreuves indépendantes.

Remarque Dans le cas où les épreuves sont indépendantes, la notion de « succession » est parfois artificielle. Par exemple, si l'on lance **simultanément** trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et que l'on considère le triplet des résultats obtenus dans cet ordre, la modélisation est identique à celle de l'exemple précédent.

Propriété **Probabilité d'une issue associée à une succession d'épreuves indépendantes**

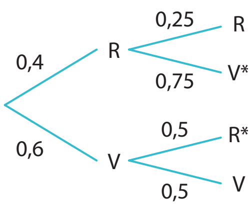
Soit une succession de *n* épreuves indépendantes.
La probabilité d'obtenir une issue $(x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)$ est $p((x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n)) = p(x_1) \times p(x_2) \times \ldots \times p(x_n)$.

Remarque En toute rigueur, on ne devrait pas écrire toutes les probabilités avec le même *p* car elles ne sont pas associées à la même expérience aléatoire.

Exemple
Dans l'exemple précédent, la probabilité de $(2\,;5\,;7)$ est $p((2\,;5\,;7)) = p(2) \times p(5) \times p(7) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{192}$.

Remarque
Dans le cas où les épreuves ne sont pas indépendantes, on les représente à l'aide d'un arbre pondéré.

Exemple
On tire au sort successivement deux boules sans remise dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules vertes.
On représente cette situation par l'arbre ci-contre à l'aide duquel on peut calculer des probabilités en appliquant les règles vues en Première.
Par exemple la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge est $0{,}4 \times 0{,}75 + 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}6$ (voir *).



Remarque On peut également représenter une succession d'épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre pondéré mais dès qu'il y a plus de trois ou quatre épreuves cela devient généralement assez compliqué.

Exercices résolus

Méthode 1 Modéliser une succession d'épreuves

Énoncé

1. **Dans le public d'un concert regroupant 237 enfants et 478 adultes, on tire au sort deux tickets (sans remise) pour faire gagner deux lots. On regarde si les personnes tirées au sort sont des adultes (A) ou des enfants (E).**
a) Ces deux tirages successifs sont-ils indépendants ?
b) Représenter la situation par un arbre pondéré puis déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un enfant tiré au sort.

2. **Dans un casino, une roulette est constituée de 18 portions rouges, 18 portions noires et une portion verte de mêmes tailles.**
On lance cinq fois cette roulette et on regarde pour chacun des lancers la couleur de la portion obtenue, rouge (R), noire (N) ou verte (V).
a) Ces cinq lancers successifs sont-ils indépendants ?
b) Donner l'univers associé à cette succession d'épreuves.
c) Déterminer la probabilité de l'issue (R ; N ; V ; R ; R).

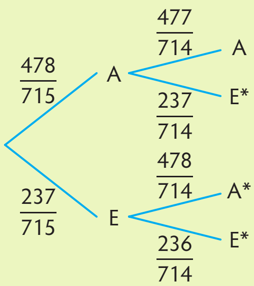
Solution

1. a) Ces deux tirages successifs ne sont pas indépendants car le résultat du premier a de l'influence sur le résultat du second. **1**

b) En utilisant l'arbre ci-contre, la probabilité qu'il y ait au moins un enfant tiré au sort est

$\frac{478}{715} \times \frac{237}{714} + \frac{237}{715} \times \frac{478}{714} + \frac{237}{715} \times \frac{236}{714} \approx 0{,}55$

(voir * dans l'arbre) **2**.



2. a) Ces cinq lancers successifs sont indépendants car le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres.

b) L'univers associé à chacune de ces épreuves est {R ; N ; V} donc l'univers associé à cette succession de cinq épreuves indépendantes est $\underbrace{\{R;N;V\}\times\ldots\times\{R;N;V\}}_{5 \text{ fois}} = \{R;N;V\}^5$. **3**

c) $p(R) = \frac{18}{37}$, $p(N) = \frac{18}{37}$ et $p(V) = \frac{1}{37}$ donc

$$p((R;N;V;R;R)) = p(R)\times p(N)\times p(V)\times p(R)\times p(R) = p(R)^3\times p(N)\times p(V) = \left(\frac{18}{37}\right)^3\times\left(\frac{18}{37}\right)\times\left(\frac{1}{37}\right) \approx 0{,}0015.$$

Conseils & Méthodes

1 Lorsque l'on doit se demander quel est le résultat de la 1re épreuve pour trouver une probabilité associée à la 2e épreuve, c'est que les tirages ne sont pas indépendants. C'est le cas ici, puisque la probabilité que le 2e tirage donne un adulte est $\frac{477}{714}$ ou $\frac{478}{714}$ selon que le 1er tirage ait donné un adulte ou non.

2 On utilise les règles d'utilisation des arbres pondérés pour calculer des probabilités.

3 Commencer par donner l'univers associé à chacune des épreuves puis conclure en donnant le produit cartésien.

À vous de jouer !

1 On considère un tirage au sort dans une urne contenant cinq boules rouges et six boules noires.
1. On tire trois boules dans l'urne avec remise.
a) Ces trois tirages successifs sont-ils indépendants ?
b) Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge puis deux boules noires, dans cet ordre.
2. Mêmes questions pour trois tirages sans remise.

2 On tire avec remise six personnes dans une population contenant 87 % de droitiers (D), 12 % de gauchers (G) et 1 % d'ambidextres (A) et on regarde si elles sont droitières, gauchères ou ambidextres.
Donner l'univers associé à cette succession de six épreuves indépendantes puis calculer la probabilité de l'issue (D ; D ; G ; D ; D ; A).

➥ Exercices 32 à 38 p. 382

2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite épreuve (ou expérience) de Bernoulli.

Exemple

Lorsqu'une personne visionne une vidéo sur Internet, elle peut lui attribuer un pouce vert, un pouce rouge ou ne rien faire.

• L'expérience consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert, un pouce rouge ou ne fait rien n'est pas une expérience de Bernoulli car il y a trois issues.

• L'expérience consistant à regarder si l'internaute attribue un pouce vert ou non est une expérience de Bernoulli (en considérant qu'un pouce vert correspond à un succès) car il y a deux issues.

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0\,;1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathscr{B}(p)$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété Loi de Bernoulli : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, on a :

• l'espérance : $E(X) = p$,

• la variance : $V(X) = p(1 - p)$,

• l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Démonstration

• $E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$.

• $V(X) = (1 - p)(0 - E(X))^2 + p(1 - E(X))^2 = (1 - p)(0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = (1 - p)p^2 + p(1 - p)^2$

$= (1 - p)p(p + (1 - p)) = p(1 - p)$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

Exemple

Lorsque l'on appelle un service d'assistance téléphonique, la probabilité de parler à un conseiller est 0,1 (le reste du temps, la demande est traitée par un robot). On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de conseiller (0 ou 1) auquel on parle lors d'un appel à ce service.

• X suit la loi donnée dans le tableau, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre 0,1.

• Son espérance est donc $E(X) = 0{,}1$.

• Son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{0{,}1 \times 0{,}9} = 0{,}3$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	0,9	0,1

Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée schéma de Bernoulli.

Exemple

On considère la répétition de cinq appels au service d'assistance téléphonique de l'exemple précédent.

• On considère que les appels sont indépendants et que le fait de parler à un conseiller est un succès (S).

• Cette succession de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un schéma de Bernoulli.

• La probabilité de l'issue (E ; S ; E ; E ; E), c'est-à-dire de ne parler à un conseiller qu'au deuxième appel, est $p(\text{E}) \times p(\text{S}) \times p(\text{E}) \times p(\text{E}) \times p(\text{E}) = 0{,}9^4 \times 0{,}1 = 0{,}065\,61$.

Remarque Généralement, on représente un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré et on y calcule des probabilités à l'aide de la formule des probabilités totales.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s12-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

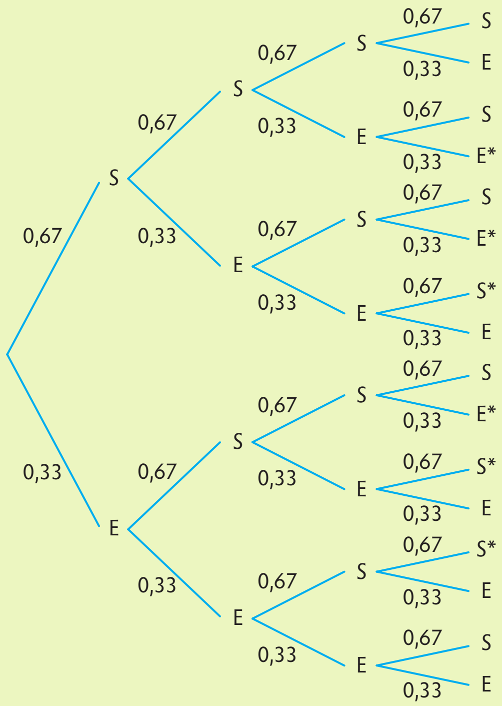
Énoncé

Gloria a remarqué que quand un client entre dans sa libraire, la probabilité qu'il achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres.
Quatre clients entrent dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'ils achètent un livre ou non.
1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera *n*, le nombre de répétitions, et *p*, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité que deux des quatre clients achètent un livre.

Solution

1. En considérant que l'achat d'un livre par le client est un succès, **1** on réalise $n = 4$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli **2** pour laquelle la probabilité d'un succès (S) est $p = 0{,}67$ donc cette situation correspond bien à un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0{,}67$.

2. **3**



3. **4** $p(X = 2) = 6 \times (0{,}67^2 \times 0{,}33^2) \approx 0{,}29$ (voir *). **5**

Conseils & Méthodes

1 On associe le succès à l'événement qui nous intéresse (ici, « le client achète ») de sorte que l'on ait affaire à une expérience à deux issues, succès S et échec E (ou $\overline{S}$).

2 Pour justifier qu'une succession d'expériences est un schéma de Bernoulli, il y a trois arguments à donner : **1.** l'expérience réalisée est la même, **2.** c'est une expérience de Bernoulli, **3.** toutes les réalisations sont indépendantes.

3 Dans l'arbre, les sous-arbres partant d'un même nœud sont identiques et correspondent à l'arbre représentant l'épreuve de Bernoulli (avec les pondérations 0,67 et 0,33 ici).

4 Identifier les chemins associés au nombre de succès souhaité et appliquer les méthodes de calculs.

5 Chacun des six chemins correspondant à 2 succès (et donc 2 échecs) porte 2 pondérations 0,67 et 2 pondérations 0,33, ce qui correspond à une probabilité $0{,}67^2 \times 0{,}33^2$ pour chaque chemin.

À vous de jouer !

3 On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.
1. Justifier que l'on peut associer la situation à un schéma de Bernoulli. Préciser *n* le nombre de répétitions et *p* la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

4 Sylvain joue cinq fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est 0,1.
1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces cinq parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces cinq parties ?

↪ Exercices 49 à 51 p. 384

Cours

3 Loi binomiale

a Définition et calculs de probabilités

Définition Loi binomiale

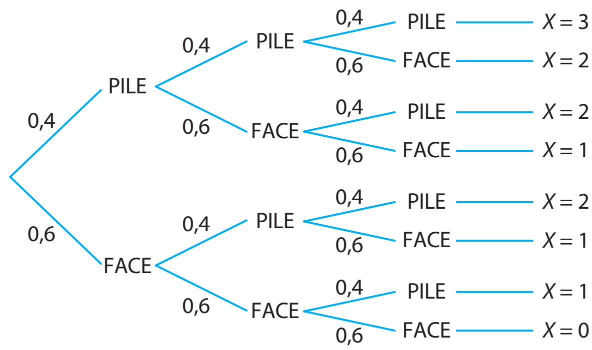
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès.

La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée loi binomiale de paramètres n et p et se note $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Exemple

On lance trois fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4 et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de PILE obtenus.

- En considérant que « tomber sur PILE » est un succès, X donne le nombre de succès lorsque l'on répète $n = 3$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est $p = 0{,}4$, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}4$, notée plus simplement $\mathscr{B}(3\,;0{,}4)$.



- On peut déterminer les probabilités associées à X à l'aide d'un arbre pondéré.
La probabilité d'obtenir 2 PILE est
$p(X = 2) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}288$.

Propriété Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s12-04

- Sur un arbre représentant le schéma de Bernoulli associé à X, chaque chemin (de n branches) correspondant à k succès « contient » k branches dont les pondérations sont p et $n-k$ branches dont les pondérations sont $1-p$: la probabilité lui étant associée est donc $p^k \times (1-p)^{n-k}$.
- Le nombre de chemins correspondant à k succès est égal au nombre de façons de placer k pondérations p sur n branches soit $\binom{n}{k}$.

Il en résulte que la probabilité d'obtenir k succès est $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, on retrouve $p(X = 2) = \binom{3}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^{3-2} = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6 = 0{,}288$.

Remarque Pour calculer des probabilités avec la loi binomiale, on peut utiliser la formule précédente ou utiliser les fonctions avancées de la calculatrice. ↪ TP 1 p. 398

Exercices résolus

Méthode 3 Reconnaître la loi binomiale et calculer une probabilité de la forme $p(X = k)$

Énoncé

Une urne contient neuf boules rouges et une verte. On y tire onze boules avec remise et on considère la variable aléatoire V donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. Donner la loi de V.

2. Calculer $p(V = 2)$.

Solution

1. En considérant que l'obtention d'une boule verte est un succès, V donne le nombre de succès quand on réalise $n = 11$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli **1** dont la probabilité d'un succès est $p = 0{,}1$ **2** donc V suit la loi $\mathcal{B}(11 ; 0{,}1)$.

2. $p(V = 2) = \binom{11}{2} \times 0{,}1^2 \times (1 - 0{,}1)^{11-2} = 55 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^9 \approx 0{,}21$ **3**

Conseils & Méthodes

1 La justification est la même que pour un schéma de Bernoulli en précisant que V donne le nombre de succès.

2 La probabilité d'un succès est $p = \frac{1}{10}$.

3 On utilise la formule du cours ou la calculatrice (↪ **TP 1** p. 398).

À vous de jouer !

5 On lance 20 fois une pièce équilibrée et on considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de FACE obtenus.
1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(X = 11)$.

6 On tire 15 cartes avec remise dans un jeu complet de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de trèfles obtenus.
1. Justifier que T suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

↪ Exercices 52 à 56 p. 384

Méthode 4 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Les calculatrices « lycée » permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la numworks) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

Énoncé

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}23$, calculer :

a) $p(X < 12)$. **b) $p(X \geqslant 4)$.** **c) $p(5 < X \leqslant 8)$.**

Solution

a) $p(X<12) = p(X \leqslant 11) \approx 0{,}512$. **1**

b) **2** $p(X \geqslant 4) = p(\overline{X \leqslant 3}) = 1 - p(X \leqslant 3) \approx 0{,}999$.

c) $p(5 < X \leqslant 8) = p(6 \leqslant X \leqslant 8) = p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5)$ **3** $\approx 0{,}14$.

On peut aussi remarquer que
$p(5 < X \leqslant 8) = p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) \approx 0{,}14$.

Conseils & Méthodes

1 X prend des valeurs entières : les événements $X < 12$ et $X \leqslant 11$ sont donc identiques.

2 $X \geqslant 4$ est l'événement contraire de $X \leqslant 3$.

3 On a $\underbrace{0 ; \ldots ; 4 ; 5}_{X \leqslant 5} ; \underbrace{6 ; 7 ; 8}_{5 < X \leqslant 8} ; 9 ; \ldots ; 50$ donc $p(5 < X \leqslant 8)$ est égal à $p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5)$.

À vous de jouer !

7 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{B}(20 ; 0{,}36)$.
Calculer $p(X > 6)$ et $p(3 \leqslant X < 12)$.

8 On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{B}(30 ; 0{,}85)$.
Calculer $p(Y < 24)$ et $p(21 < Y < 25)$.

↪ Exercices 57 à 63 p. 385

Cours

b Espérance, variance et écart-type

Propriété **Loi binomiale : espérance, variance et écart-type**

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, on a :
• l'espérance $E(X) = np$ • la variance $V(X) = np(1-p)$ • l'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstrations

↪ **Exercice 138** p. 397 : démonstration calculatoire.
↪ **Chapitre 13** p. 416 avec une somme de variables aléatoires.

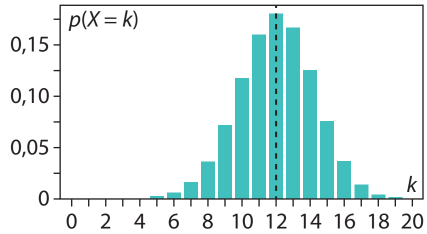
Exemple
La variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}6)$ a pour espérance $E(X) = 20 \times 0{,}6 = 12$, pour variance $V(X) = 20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8$ et pour écart-type $\sigma(X) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

Remarque Plus l'écart-type de X est petit plus les valeurs proches de son espérance sont probables.

Propriété **Forme du diagramme en barres associé**

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, le diagramme en barres associé à X est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

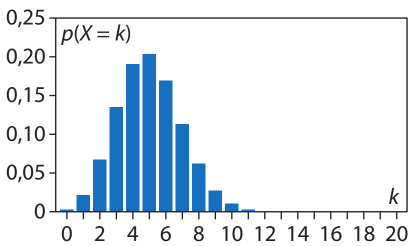
Exemple
Le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}6)$, sur lequel k varie de 0 à 20 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k, la hauteur de la barre correspondant à $p(X = k)$.
Par exemple, pour $k = 10$, la hauteur de la barre est $p(X = 10) \approx 0{,}12$.
Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 12 : l'espérance correspondant à cette loi.



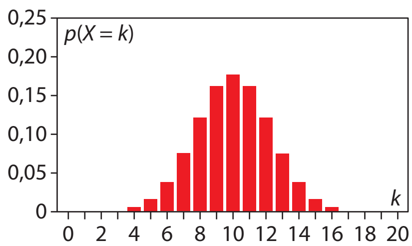
Ce diagramme est quasiment symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 12$ tracée en pointillés.

Remarque Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n, plus p est éloigné de 0,5 plus l'écart-type est petit et, en conséquence, plus la cloche est « étroite et haute » (attention aux échelles sur les axes quand on compare).

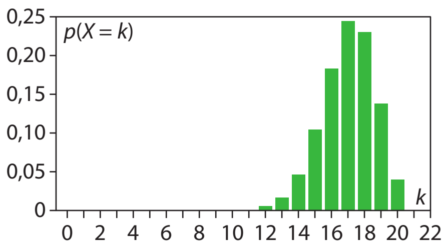
Exemples



$n = 20$ et $p = 0{,}25$; $E(X) = 5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}94$.



$n = 20$ et $p = 0{,}5$; $E(X) = 10$ et $\sigma(X) \approx 2{,}24$.



$n = 20$ et $p = 0{,}85$; $E(X) = 17$ et $\sigma(X) \approx 1{,}6$.

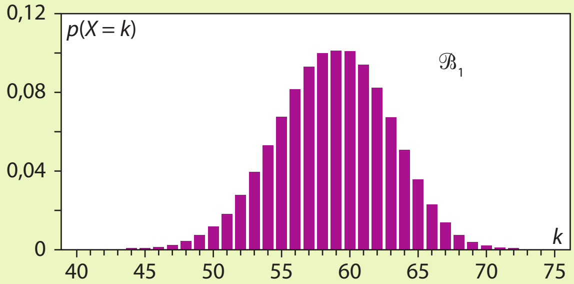
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s12-03 Les rendez-vous Sésamath

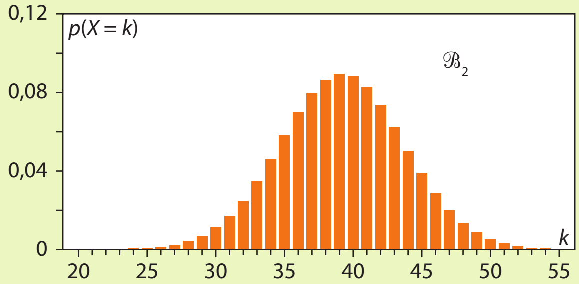
Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale

Énoncé

On donne les diagrammes en barres associés à deux lois binomiales $\mathscr{B}_1$ (à gauche) et $\mathscr{B}_2$ (à droite).





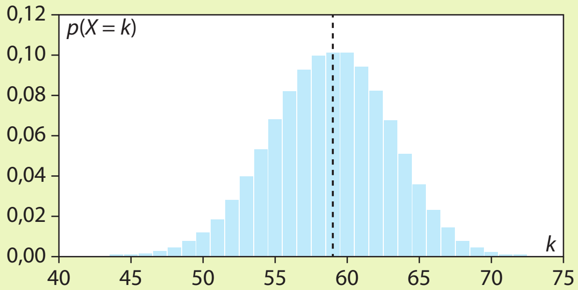
1. **Soit X_1 suivant la loi $\mathscr{B}_1$. Estimer graphiquement $E(X_1)$.**

2. **Les paramètres de $\mathscr{B}_1$ sont $p_1 = 0{,}74$ et n_1. Déterminer une valeur possible pour n_1.**

3. **$\mathscr{B}_2$ admet pour paramètres $n_2 = n_1$ (trouvé à la question précédente) et p_2.**
L'écart-type associé à la loi $\mathscr{B}_2$ est-il plus ou moins grand que celui associé à la loi $\mathscr{B}_1$?

Solution

1. Le graphique ci-contre semble centré sur 59 **1**.



On peut donc penser que $E(X_1) \approx 59$.

2. Comme $E(X_1) = n_1\, p_1$ **2**, on a $n_1 = \dfrac{E(X_1)}{p_1}$ or $\dfrac{59}{0{,}74} \approx 79{,}7$ donc, comme n_1 est entier, on peut penser que $n_1 = 80$.

3. On constate que le graphique associé à la loi $\mathscr{B}_2$ est moins haut et plus large que celui associé à $\mathscr{B}_1$ **3** donc on peut penser que l'écart-type associé à $\mathscr{B}_2$ est plus grand que celui associé à $\mathscr{B}_1$.

Conseils & Méthodes

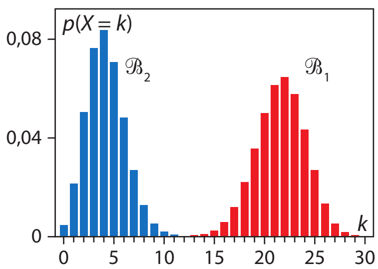
1 L'espérance est la valeur sur laquelle le graphique en forme de cloche semble centré en abscisse.

2 On utilise $E(X) = np$ pour trouver n_1 inconnu à partir de $E(X_1)$ et p_1 connus.

3 On compare les graphiques (les échelles sur les axes des deux graphiques sont identiques) :
- sur le 1er graphique, la plus grande probabilité est environ 0,1 contre 0,09 sur le 2e : le 1er graphique est donc plus haut.
- le 2e graphique semble plus large.

À vous de jouer !

9 On donne les diagrammes en barres associés à deux lois binomiales $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de paramètres $n = 30$ et p inconnu.

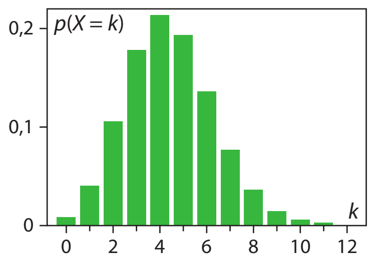


Laquelle a la plus grande espérance ? Le plus grand écart-type ?

10 On donne le diagramme en barres associé à une loi $\mathscr{B}(n\,;\,0{,}22)$ et X suivant cette loi.

1. Évaluer $E(X)$ puis n, qui est un multiple de 10.

2. En déduire $V(X)$.



→ Exercices 70 à 71 p. 386

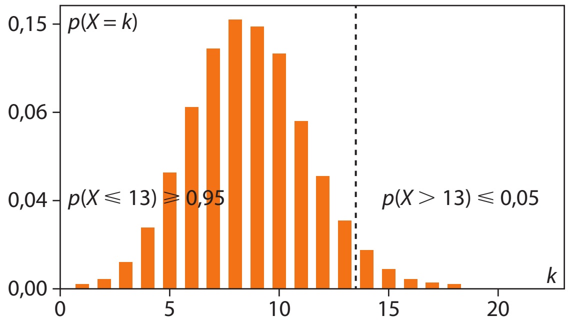
Cours

C Intervalles de fluctuation

Définition — Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\,;1[$ et a et b réels.
Un intervalle $[a\,;b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Exemple
Pour X suivant la loi $\mathscr{B}(43\,;0,2)$ et $\alpha = 0,05$, on a $p(X \leqslant 13) \approx 0,964 \geqslant 0,95$ donc $[0\,;13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha = 0,95$ associé à X : on est sûr à au moins 95 % qu'il n'y aura pas plus de 13 succès sur les 43 répétitions.



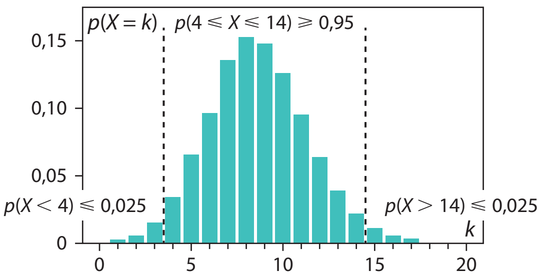
Remarque Lorsque l'on cherche à trouver un intervalle de fluctuation associé à une loi binomiale de paramètres n et p, suivant le contexte, on peut être amené à chercher des intervalles de la forme $[0\,;b]$, $[a\,;n]$ ou $[a\,;b]$ « centré », de préférence les moins grands possibles.

Propriété — Intervalle de fluctuation centré

Soit X, une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0\,;1[$ et a et b réels.
Si $p(X < a) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X > b) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ alors l'intervalle $[a\,;b]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha$ associé à X. Dans ce cas, on dit que c'est un intervalle de fluctuation centré (ou bilatéral).

Démonstration
Il s'agit de montrer que $p(X < a) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X > b) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ implique $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$. ↪ Exercice 134 p. 396 pour une démonstration.

Exemple
On reprend X suivant la loi $\mathscr{B}(43\,;0,2)$ de l'exemple précédent et $\alpha = 0,05$ c'est-à-dire $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.
$[4\,;14]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha = 0,95$ associé à X car $p(X < 4) \approx 0,018 < 0,025$ et $p(X > 14) \approx 0,016 < 0,025$: on est donc sûr à au moins 95 % d'avoir entre 4 et 14 succès sur les 43 répétitions.



Propriété — Intervalle de fluctuation centré particulier

L'intervalle $[a\,;b]$ tel que a et b soient les plus petits entiers vérifiant respectivement $p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha$ associé à X.

Démonstration
↪ Exercice 134 p. 396

Remarque C'est cette dernière propriété que l'on utilise en pratique pour trouver un intervalle de fluctuation centré à un seuil donné.

Exercices résolus

Méthode 6 Prévoir si un événement sera vérifié à un seuil donné

Énoncé

Une troupe de théâtre joue pour la première fois et on considère que le nombre de spectateurs présents ce jour-là est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}15$.
Pour des questions logistiques, la troupe ne jouera pas s'il y a moins de dix personnes.
La troupe est-elle « sûre » de pouvoir jouer au seuil de 95 % ?

Solution

La troupe pourra jouer si $X \geqslant 10$ 1 donc on calcule $p(X \geqslant 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leqslant 9) \approx 0{,}945 < 0{,}95$ 2 donc la troupe n'est pas « sûre » de pouvoir jouer au seuil de 95 %.

Conseils & Méthodes

1 On fait le lien entre la situation concrète et l'intervalle puis le seuil considéré.

2 Pour un intervalle I, on calcule si $p(X \in I)$ est supérieur ou égal au seuil considéré.

À vous de jouer !

11 Un restaurateur considère que son nombre quotidien de clients est donné par une variable aléatoire C suivant la loi $\mathscr{B}(50\,;0{,}75)$.
Est-il sûr au seuil de 95 % de pouvoir accueillir tous les clients se présentant sachant qu'il a 43 places dans son restaurant ?

12 On considère que le nombre d'élèves dans la classe de Dounia l'année prochaine est donné par une variable aléatoire E suivant la loi $\mathscr{B}(36\,;0{,}92)$.

Est-elle sûre au seuil de 99 % d'avoir au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine ?

↪ Exercices 72 à 74 p. 386

Méthode 7 Vérifier qu'un intervalle est un intervalle de fluctuation centré

Énoncé

On considère une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}36$.
1. L'intervalle [16 ; 39] est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 % ?
2. L'intervalle [18 ; 40] est-il un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 % ?

Solution

1. Ici, $1 - \alpha = 0{,}99$ donc $\alpha = 0{,}01$ et $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$. 1 De plus :

- $p(X < 16) = p(X \leqslant 15) \approx 0{,}0006 \leqslant 0{,}005$ 2
- $p(X > 39) = 1 - p(X \leqslant 39) \approx 0{,}007 > 0{,}005$ 2 donc [16 ; 39] n'est pas un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 %.

2. Ici on a $\alpha = 0{,}01$ donc on a toujours $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$. 1

De plus, $p(X < 18) = p(X \leqslant 17) \approx 0{,}003 \leqslant 0{,}005$ et $p(X > 40) = 1 - p(X \leqslant 40) \approx 0{,}004 \leqslant 0{,}005$ 2 donc [18 ; 40] est un intervalle de fluctuation centré au risque de1 %.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer α puis calculer $\frac{\alpha}{2}$.

2 On vérifie si $p(X < a) \leqslant \frac{\alpha}{2}$ et $p(X > b) \leqslant \frac{\alpha}{2}$.

À vous de jouer !

13 On considère une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathscr{B}(10\,;0{,}45)$.
L'intervalle [3 ; 9] est-il un intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 % ?

14 On considère une variable aléatoire Z suivant la loi $\mathscr{B}(89\,;0{,}21)$.

L'intervalle [11 ; 26] est-il un intervalle de fluctuation centré au risque de 5 % ?

↪ Exercices 75 à 76 p. 386

Exercices résolus

Remarque Pour les méthodes 8, 9 et 10, on se reportera au **TP 1** p. 398 pour l'obtention des différentes commandes de la calculatrice utilisées.

Méthode 8 Déterminer le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant p$

Cours 3 p. 372

Énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}63$.
Déterminer le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$.

Solution

• **TI-83 Premium CE** : On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en appuyant sur f(x) puis en tapant

`\Y1=binomFRép(50,0.63,X)` 1.

Ensuite, on affiche le tableau de valeurs. On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9825

• **Casio GRAPH 90+** : On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans le menu **7:Table** du menu principal, en tapant **Y1=BinomialCD(x,50,0.63)** 2.

Ensuite, on affiche le tableau de valeurs. On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9824

• **NUMWORKS** : Dans le menu Fonctions, on tabule la fonction $k \mapsto (p \leqslant k)$ en écrivant `f(x)=binomcdf(x,50,0.63)` 3 où binomcdf s'obtient avec la touche paste puis le menu Probabilités > Loi Binomiale.

Ensuite, on affiche le tableau de valeurs et on obtient :

35	0.8805196
36	0.9310107
37	0.9635405
38	0.9824891

• **Conclusion** On constate que $p(X \leqslant 36) < 0{,}95$ et $p(X \leqslant 37) \geqslant 0{,}95$ donc $k = 37$.

Conseils & Méthodes

1 x s'obtient avec X,T,θ,n.

2 x s'obtient avec X,θ,T.

3 x s'obtient avec la touche x,n,t.

À vous de jouer !

15 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}22$.
Déterminer le plus petit entier k tel que $p(Y \leqslant k) \geqslant 0{,}99$.

16 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}81$.
Déterminer le plus grand entier k tel que $p(Z \leqslant k) < 0{,}02$.

Exercices 93 à 96 p. 389

EXOS
Méthodes
lienmini.fr/maths-s12-03

Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 9 Déterminer le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant p$

↪ Cours 3 p. 372

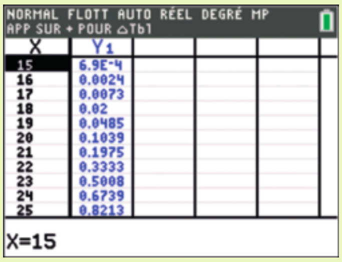
Énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}78$.
Déterminer le plus grand entier k tel que $p(X \geqslant k) \geqslant 0{,}9$.

Solution

$p(X \geqslant k) \geqslant 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - p(X < k) \geqslant 0{,}9$ **1**
$\Leftrightarrow 1 - p(X \leqslant k - 1) \geqslant 0{,}9$
$\Leftrightarrow - p(X \leqslant k - 1) \geqslant - 0{,}1$
$\Leftrightarrow p(X \leqslant k - 1) \leqslant 0{,}1$.

En tabulant $p(X \leqslant x)$ avec la calculatrice, on obtient :



donc la plus grande valeur de x telle que $p(X \leqslant x) \leqslant 0{,}1$ est 19.
On en déduit que $k - 1 = 19$ **2** puis $k = 20$.

Conseils & Méthodes

1 On se ramène à la Méthode 8 en considérant la probabilité de l'événement contraire.

2 On trouve le plus grand $k - 1$ possible puis on en déduit le plus grand k possible.

À vous de jouer !

17 Soit Y qui suit la loi $\mathscr{B}(35 ; 0{,}12)$.
Déterminer le plus grand entier k tel que $p(Y \geqslant k) > 0{,}8$.

18 Soit Z qui suit la loi $\mathscr{B}(78 ; 0{,}25)$.
Déterminer le plus petit entier k tel que $p(Z \geqslant k) \leqslant 0{,}02$.

↪ Exercices 97 à 99 p. 389

Méthode 10 Déterminer un intervalle de fluctuation centré

↪ Cours 3 p. 372

Énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}2$ et $\alpha = 0{,}05$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à X.

Solution

- **1** On a $p(X \leqslant 2) \approx 0{,}008 \leqslant 0{,}025$ et $p(X \leqslant 3) \approx 0{,}0285 > 0{,}025$ donc $a = 3$ **2**
- On a $p(X \leqslant 12) \approx 0{,}957 \leqslant 0{,}975$ et $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}981 \geqslant 0{,}975$ donc $b = 13$. **3**

[3 ; 13] est un intervalle de fluctuation centré associé à X au seuil de 0,95.

Conseils & Méthodes

1 On utilise la Méthode 8.

2 $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ donc on cherche le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0{,}025$.

3 $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ donc on cherche le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

À vous de jouer !

19 Soit Y qui suit la loi $\mathscr{B}(27 ; 0{,}36)$ et $\alpha = 0{,}1$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à Y.

20 Soit Z qui suit la loi $\mathscr{B}(98 ; 0{,}77)$ et $\alpha = 0{,}01$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ associé à Z.

↪ Exercices 100 à 102 p. 390

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s12-04

La propriété à démontrer

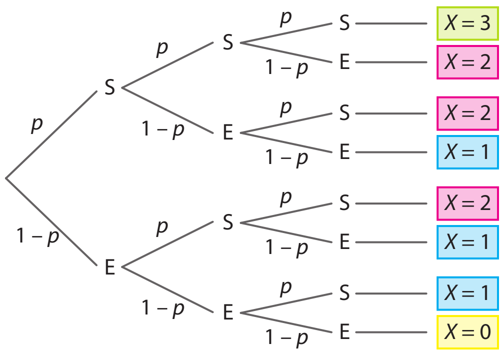
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Pour tout entier k dans $[0\,;n]$, on a $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

On souhaite démontrer cette propriété.

Comprendre avant de rédiger

Traçons l'arbre associé à cette loi binomiale dans le cas où $n=3$.



On constate que sur les chemins correspondant à :

- 0 succès, il y a :
0 pondération p et $3-0=3$ pondérations $1-p$,
- 1 succès, il y a :
1 pondération p et $3-1=2$ pondérations $1-p$.
- etc.

Ainsi, on sait que :

- $p(X=0)$ = (nombre de chemins correspondant à 0 succès) $\times p^0\times(1-p)^3$;
- $p(X=1)$ = (nombre de chemins correspondant à 1 succès) $\times p^1\times(1-p)^2$;
- etc.

Il reste à comprendre que le nombre de chemins correspondant à 1 succès, par exemple, est le nombre de façons de placer 1 pondération p sur les 3 branches d'un chemin ce qui revient à choisir une position parmi les trois c'est-à-dire $\binom{3}{1}$ c'est-à-dire 3.

Rédiger

Étape 1 On commence par constater que les chemins correspondant à k succès ont tous les mêmes pondérations.

Attention Elles sont placées dans des ordres différents.

Étape 2 Le produit des pondérations est donc identique pour chacun des chemins.

Étape 3 On dénombre ensuite le nombre de chemins correspondant à k succès.

Étape 4 On conclut.

La démonstration rédigée

Sur un arbre représentant le schéma de Bernoulli associé à X, chaque chemin (de n branches) correspondant à k succès « contient » k branches dont les pondérations sont p et $n-k$ branches dont les pondérations sont $1-p$.

La probabilité lui étant associée est donc $p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Le nombre de chemins correspondant à k succès est égal au nombre de façons de placer k pondérations p sur n branches soit $\binom{n}{k}$.

La probabilité d'obtenir k succès est $P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}$.

Pour s'entraîner

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 jusqu'à obtenir un 1 et on appelle X le nombre de lancers nécessaires. **Déterminer $p(X=k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.**