11

Dénombrement

Le triangle de Pascal cache de nombreux secrets sur les nombres : les nombres triangulaires, des sommes remarquables, les puissances de 2, le nombre π, ou bien encore la suite de Fibonacci…

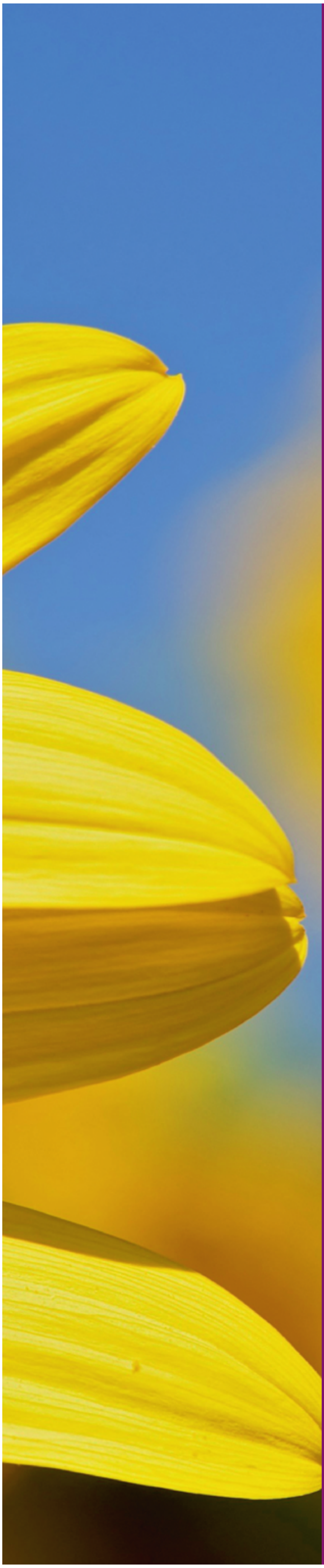
Quels sont les liens entre ce triangle et les développements de $(a + b)^n$?

↪ TP 3 p. 361

VIDÉO

Triangle de Pascal

lienmini.fr/maths-s11-01



Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s11-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Connaître les notations mathématiques

1. Compléter les phrases suivantes par le symbole $\in$ ou $\notin$.

a) $2{,}3 \ldots \mathbb{N}$ **b)** $\pi \ldots \mathbb{R}$ **c)** $\dfrac{2}{3} \ldots \mathbb{N}$ **d)** $-4{,}151246 \ldots \mathbb{Z}$

2. Compléter les phrases suivantes par le symbole $\subset$ ou $\not\subset$.

a) $\mathbb{N} \ldots \mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{Q} \ldots \mathbb{N}$ **c)** $\mathbb{D} \ldots \mathbb{Q}$ **d)** $\mathbb{Z} \ldots \mathbb{D}$

2 Construire des ensembles ou des uplets

1. Les lettres du mot MATHEMATIQUES sont prises dans un ensemble contenant 9 éléments.
Donner cet ensemble.

2. Les nombres 421 et 142 sont formés par des chiffres ordonnés pris dans deux listes (triplets ici).
Donner ces deux triplets.

3 Construire un tableau

Dans un jeu de 25 quilles, les quilles sont de couleurs et de formes différentes. Parmi les 11 quilles bleues, 8 ont une forme cylindrique et on compte 4 quilles rouges de forme cubique.

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous.

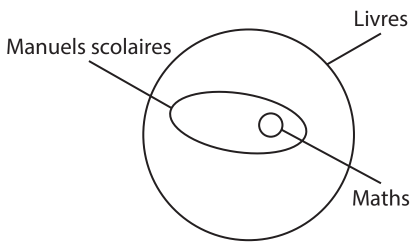
	Quilles bleues	Quilles rouges	Total
Forme cylindrique			
Forme cubique			
Total			25

2. Combien de quilles rouges de forme cylindrique y a-t-il ?

4 Construire un diagramme

Dans un CDI contenant 5 000 livres, on compte 1 200 manuels scolaires et, parmi ceux-ci, 135 sont de maths.

1. Compléter le diagramme suivant par les effectifs.



2. En déduire le nombre de livres n'étant pas des manuels scolaires présents au CDI.

Activités

15 min

1 Construire des ensembles avec un ensemble

1. On considère l'ensemble E = {a ; b ; c} constitué de trois éléments distincts.

a) Un singleton est un ensemble (qui s'écrit entre accolades) à 1 élément.
Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

b) Une paire est un ensemble à 2 éléments (donc distincts et la notion d'ordre n'intervient pas).
Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

c) Combien d'ensemble(s) à 3 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

2. On considère cette fois l'ensemble F = {a ; b ; c ; d}.

a) Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

b) Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

c) Combien d'ensemble à 3 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

d) Combien d'ensemble(s) à 4 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

3. On considère un ensemble G à n éléments G = {a_1 ; a_2 ; … ; a_n}.

a) Combien de singletons peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?

b) Combien de paires peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?

c) Combien d'ensemble à 3 éléments peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble G ?

d) Continuer à compter les ensembles possibles à partir des éléments de G jusqu'à construire un ensemble à n éléments.

↪ Cours 1 p. 338 et 3 p. 342

10 min

2 Construire p-listes (ou p-uplets) avec un ensemble

1. On considère l'ensemble E = {a ; b ; c} constitué de trois éléments distincts.

a) Un 1-uplet est une liste (qui s'écrit entre parenthèses) à 1 élément.
Combien de 1-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

b) Un 2-uplet est une liste à 2 éléments (donc pas forcément distincts et la notion d'ordre intervient), appelée paire ou couple.
Combien de couples peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

c) Un 3-uplet est une liste à 3 éléments, appelée triplet.
Combien de 3-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble E ?

2. On considère cette fois l'ensemble F = {a ; b ; c ; d}.

a) Combien de 1-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

b) Combien de couples peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

c) Combien de 3-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

d) Combien de 4-uplets peut-on construire à partir des éléments de l'ensemble F ?

↪ Cours 1 p. 338

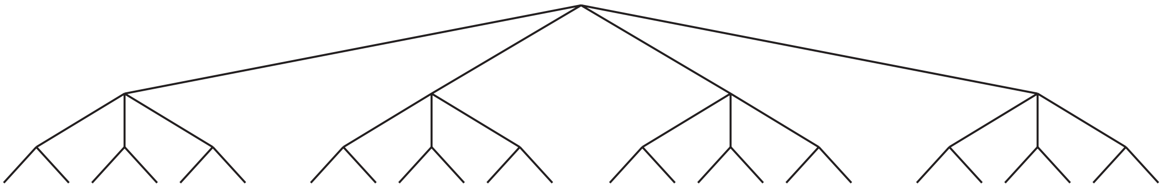
15 min

3 Construire des arbres

A ▸ Sans remise

1. Une urne contient quatre boules : une noire, une bleue, une rouge et une verte.
On tire une boule au hasard dans l'urne, puis une deuxième et enfin une troisième.

a) Compléter l'arbre ci-dessous représentant cette situation.



b) Combien de tirages possibles a-t-on au total ?

2. Une autre urne contient cinq boules : une noire, une bleue, une rouge, une verte et une blanche.
On tire une boule au hasard dans l'urne, puis une deuxième et enfin une troisième.

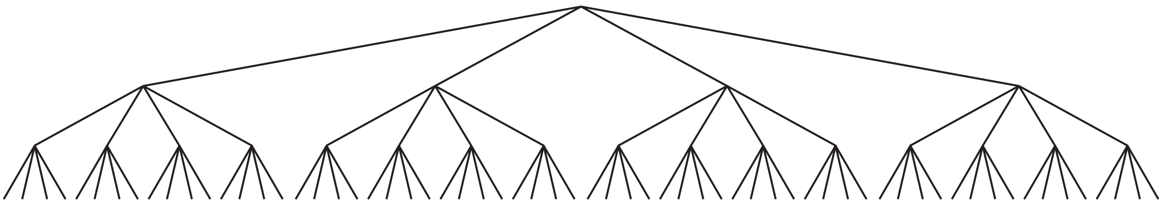
a) Construire l'arbre représentant cette situation.

b) Combien de tirages possibles a-t-on au total ?

B ▸ Avec remise

1. Une urne contient quatre boules : une noire, une bleue, une rouge et une verte.
On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis une deuxième que l'on remet également et enfin une troisième.

a) Compléter l'arbre ci-dessous représentant cette situation.



b) Combien de tirages possibles a-t-on au total ?

2. Une autre urne contient cinq boules : une noire, une bleue, une rouge, une verte et une blanche.
On tire une boule au hasard, on la remet dans l'urne, puis une deuxième que l'on remet également et enfin une troisième.

a) Représenter cette situation par un arbre.

b) Combien de tirages possibles a-t-on au total ?

C ▸ Comparaison de *p*-uplet et d'un ensemble

Prenons quatre lettres a, b, c et d.

1. Donner le nombre d'ensembles de 3 lettres, le nombre de listes de 3 lettres sans remise et le nombre de listes de 3 lettres avec remise.

2. Quelles sont les différences de construction entre un ensemble de 3 lettres, une liste de 3 lettres sans remise et une liste de 3 lettres avec remise ?

3. Expliquer comment passer d'une liste de 3 lettres sans remise à un ensemble de 3 lettres.

↪ Cours 2 p. 340

Cours

1 Définitions

Définition Ensemble

Un ensemble E est une collection d'objets distincts x qu'on appelle éléments.
On dit alors que x appartient à E (respectivement x n'appartient pas à E) et on note $x \in E$ (respectivement $x \notin E$).

Exemples

- $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est un ensemble à 3 éléments.
- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ ont une infinité d'éléments.

Remarques

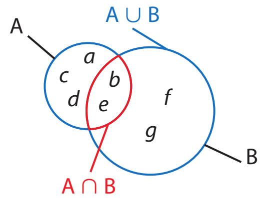
- Pour lister un ensemble d'éléments isolés les uns des autres, on utilise des accolades.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note $\varnothing$.
- Deux ensembles A et B dont l'intersection est vide sont dits disjoints et on écrit $A \cap B = \varnothing$.
- L'ordre n'intervient pas : $\{a\ ;\ b\} = \{b\ ;\ a\}$ et il n'y a pas répétition d'un élément $\{a\ ;\ a\} = \{a\}$.

Définition Partie

On appelle partie d'un ensemble E un ensemble F tel que tous les éléments de F appartiennent aussi à E.
On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$ (on dit aussi que F est un sous-ensemble de E).
La réunion $A \cup B$ de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B.
L'intersection $A \cap B$ des ensembles A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B.

Exemple

L'ensemble $F = \{a\ ;\ b\}$ est inclus dans l'ensemble E précédent ($F \subset E$), c'est une partie de E.
Avec $A = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\}$ et $B = \{b\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\}$
$A \cup B = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\}$ et $A \cap B = \{b\ ;\ e\}$



Remarques

- Une partie à 1 élément s'appelle un singleton, une partie à 2 éléments une paire.
- L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E, c'est-à-dire de tous les sous-ensembles possibles de E.

Exemple

L'ensemble des parties de $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ est $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing\ ;\ \{a\}\ ;\ \{b\}\ ;\ \{c\}\ ;\ \{a\ ;\ b\}\ ;\ \{a\ ;\ c\}\ ;\ \{b\ ;\ c\}\ ;\ E\}$.

Définition *p*-liste ou *p*-uplet

On appelle *p*-uplet ou *p*-liste d'un ensemble E une collection ordonnée d'objets qu'on appelle, selon les cas, éléments, coordonnées, composantes ou termes. Un *p*-uplet s'écrit avec des parenthèses.

Remarques

- Un 2-uplet s'appelle un couple, un 3-uplet s'appelle un triplet.
- L'ordre intervient $(a\ ,\ b) \neq (b, a)$ et les objets peuvent être identiques : $(a\ ,\ a)$ existe (il suffit de penser aux coordonnées).

Définition Principe multiplicatif

L'ensemble noté $E \times F$, appelé produit cartésien, est l'ensemble des couples $(x\ ,\ y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple

$E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $F = \{f\ ;\ g\}$, alors $E \times F = \{(a\ ,\ f)\ ;\ (a\ ,\ g)\ ;\ (b\ ,\ f)\ ;\ (b\ ,\ g)\ ;\ (c\ ,\ f)\ ;\ (c\ ,\ g)\}$.

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer des ensembles

Énoncé

On considère les ensembles E = {h ; e ; l} et F = {d ; i ; e ; r}.

1. Déterminer les ensembles E ∪ F, E ∩ F et E × F.

2. Déterminer toutes les paires existantes à partir de l'ensemble E.

Solution

1. 1 Les ensembles ont seulement la lettre e en commun donc :
E ∪ F = {h ; e ; l ; d ; i ; r}, E ∩ F = {e} 2 et
E × F = {(h , d) ; (h , i) ; (h , e) ; (h , r) ; (e , d) ; (e , i) ; (e , e) ; (e , r) ; (l , d) ; (l , i) ; (l , e) ; (l , r)}.

2. 3 Les paires sont (h , h), (h , e), (h , l), (e , h), (l , h), (e , e) (l , l), (l , e), (e , l).

Conseils & Méthodes

1 Comparer les éléments des deux ensembles.

2 Identifier les éléments communs aux deux ensembles.

3 Bien faire attention s'il s'agit d'un ensemble (on ne peut pas répéter les éléments) ou d'une liste (on peut répéter les éléments).

À vous de jouer !

1 On considère les ensembles A = {n ; a ; t ; h} et B = {y ; a ; g ; l ; v ; n}.
1. Déterminer les ensembles A ∪ B, A ∩ B et A × B.
2. Déterminer tous les triplets existants à partir de l'ensemble A.

2 On donne l'ensemble des couples {(d , v) ; (d , g) ; (d , i) ; (k , v) ; (k , i) ; (k , g)}.
Déterminer de quels ensembles il est le produit cartésien.

↪ Exercices 26 à 28 p. 348

Méthode 2 Utiliser un diagramme pour déterminer une partie d'un ensemble

Énoncé

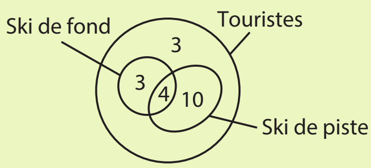
Dans une station de sports d'hiver, on interroge au hasard 20 touristes. Parmi eux, 14 déclarent pratiquer le ski de piste, 7 déclarent pratiquer le ski de fond et enfin 4 déclarent pratiquer les deux sports.

1. Construire un diagramme représentant cette situation.

2. Combien de touristes ne pratiquent ni le ski de piste, ni le ski de fond ?

Solution

1. 1 On vérifie que le total des touristes faisant du ski de fond est 7, que celui des touristes faisant du ski de piste est 14 et que le total est bien 20. 2



2. Il y a donc 3 touristes qui ne pratiquent aucun sport.

Conseils & Méthodes

1 Commencer par construire un diagramme en mettant en évidence les intersections d'ensembles.

2 Vérifier les totaux de chaque catégorie et le total de touristes.

À vous de jouer !

3 Parmi 40 secrétaires, 8 connaissent le russe, 15 l'anglais et 9 l'allemand. D'autre part, 4 parlent l'anglais et l'allemand, 5 l'anglais et le russe, 2 l'allemand et le russe et 2 les trois langues. Combien de secrétaires ne connaissent aucune de ces trois langues ?

4 Un lycée compte 150 élèves en terminale. 110 sont des filles, et, parmi elles, 40 suivent la spécialité maths. Par ailleurs, 20 garçons ne la suivent pas.
Représenter les données par un tableau à double entrée et le compléter.

↪ Exercices 29 à 32 p. 348

Cours

2 Dénombrement

Propriété Principe additif

Le nombre d'éléments de la réunion E ∪ F d'un ensemble E à n éléments et d'un ensemble F à p éléments, tels que E et F soient disjoints, est $n + p$.

Exemple
Soit $A = \{a ; b ; c ; d ; e\}$ et $B = \{f ; g ; h\}$. Le nombre d'éléments de $A \cup B$ est $5 + 3 = 8$.

Propriété Principe multiplicatif

Le nombre d'éléments de l'ensemble E × F d'un ensemble E à n éléments et un ensemble F à p éléments est $n \times p$.

Exemple
Pour $E = \{a ; b ; c\}$ et $F = \{f ; g\}$, le nombre d'éléments de $E \times F$ est $3 \times 2 = 6$.

Propriété Nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments

Le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p.

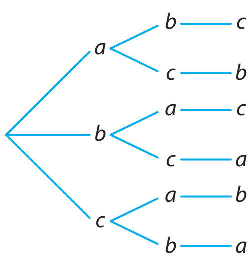
Définition Permutations d'un ensemble à n éléments

On appelle permutations d'un ensemble à n éléments tous les ordres possibles dans les n-uplets constitués des éléments de l'ensemble.

Propriété Nombre de permutations d'un ensemble à n éléments

Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments s'écrit $n!$, se lit « factorielle n » et est défini par $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Exemple
Soit $E = \{a ; b ; c\}$. Tous les triplets possibles sont : (a , b , c), (a , c , b), (b , a , c), (b , c , a), (c , a , b), (c , b , a). Cela correspond à 3 choix pour la première composante, puis 2 choix pour la deuxième et 1 dernier choix pour la troisième.
On a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
On peut représenter cette situation par l'arbre ci-contre.



Propriétés Factorielle

$0! = 1$ $\qquad$ $n! = n \times (n-1)!$ $\qquad$ $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Propriété Nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments

Le nombre de p-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemple
Soit $E = \{a ; b ; c ; d\}$. Tous les couples d'éléments distincts possibles sont : (a , b), (b , a), (a , c), (c , a), (a , d), (d , a), (b , c), (c , b), (b , d), (d , b), (c , d), (d , c).

Ce qui donne par le calcul $\dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$.

Méthode 3 Dénombrer des ensembles simples

Énoncé

1. **On lance 7 fois une pièce de 1 euro pour jouer à pile ou face. Déterminer le nombre de résultats possibles.**

2. **Deux joueurs jouent aux dominos, chacun recevant 7 dominos au hasard parmi les 28 dominos composant le jeu. Combien de distributions possibles y a-t-il ?**

3. **On dispose de quatre gâteaux. Chacun des 4 invités en choisit un pour le manger. Combien de choix possibles y a-t-il ?**

Solution

1. Il y a répétition de 2 choix (pile ou face) et ceci 7 fois de suite, **1** donc le nombre de résultats possibles est $2^7 = 128$.

2. Il ne peut pas y avoir répétition car deux joueurs ne peuvent pas avoir le même domino **1** et on s'arrête après 14 tirages **2** donc le nombre de distributions est :

$$28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = \frac{28!}{(28-14)!}.$$

3. Il ne peut y avoir répétition **1** et il y a autant de gâteaux que d'invités donc le nombre de choix est $4! = 24$.

Conseils & Méthodes

1 Reconnaître s'il y a répétition ou non.

2 Reconnaître le moment où l'épreuve s'arrête.

À vous de jouer !

5 Vingt personnes votent pour élire un président et ils ont le choix entre M. A ou Mme B.
Quel est le nombre de répartitions de votes possibles ?

6 À l'aide des lettres du mot LIVRE, on souhaite écrire des mots de trois lettres, ayant un sens ou non.
Combien de mots peut-on composer ?

↪ Exercices 33 à 48 p. 348-349

Méthode 4 Utiliser le principe multiplicatif

Énoncé

Une cantine scolaire propose à ses élèves un menu à composer au choix. Ils peuvent choisir entre 4 entrées, 3 plats chauds, puis du fromage ou un yaourt et enfin un dessert ou un fruit.
Combien de menus peuvent-ils composer à la cantine ?

Solution

1 On peut construire un arbre qui aura 4 branches pour les entrées, puis 3 branches pour les plats, puis 2 branches pour le fromage ou le yaourt et encore 2 branches pour le dessert ou le fruit. **2**

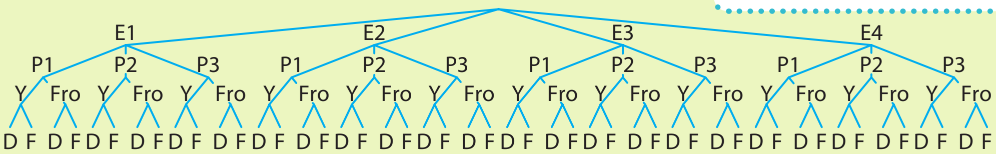
Ce qui donne un nombre de menus de : $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$. **3**

Conseils & Méthodes

1 Représenter si besoin la situation par un arbre.

2 Déterminer quand arrêter l'arbre en fonction de ce qui compose un menu.

3 Pour calculer, on fait le produit du nombre de branches représentant chaque choix.



À vous de jouer !

7 Huit nageurs de la finale olympique du 100 m nage libre prennent le départ.
Combien de podiums différents sont envisageables ?

8 Gaëlle a dans son armoire 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

↪ Exercices 49 à 52 p. 350

Cours

3 Combinaisons

Définition **Combinaison**

Une combinaison de p éléments parmi n éléments, notée $\binom{n}{p}$, est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Propriété **Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments**

On calcule une combinaison de la manière suivante : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)! \times p!}$.

Propriétés **Combinaisons**

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ $\qquad$ $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Propriété **Relation et triangle de Pascal**

On a la relation $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

qui peut s'illustrer par le triangle de Pascal.

	0	1	2	3	...
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
...					

DOCUMENT
Triangle de Pascal
lienmini.fr/maths-s11-04

Démonstration Par le calcul :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)! \times (n-p-1)!}$$

$$= \frac{n!}{(p+1)! \times (n-p)!}\left[(p+1)+(n-p)\right]$$

$$= \frac{n! \times (n+1)}{(p+1)! \times (n-p)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s11-05

« Apprendre à démontrer » p. 346

Remarque
On peut faire le lien avec les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Propriété **Nombre de parties d'un ensemble à n éléments**

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. De plus, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Démonstration Par dénombrement : on compte le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
Il y a $\binom{n}{0}$ parties à 0 élément, $\binom{n}{1}$ parties à 1 élément, …, et plus généralement $\binom{n}{p}$ parties à p éléments, pour tout entier p compris entre 0 et n. Donc on obtient la somme des $\binom{n}{p}$ pour p allant de 0 à n.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s11-06

Exercices résolus

Méthode 5 Dénombrer des combinaisons

Énoncé

Au bridge, chaque joueur possède une main de 13 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.
1. Combien de mains peut-on distribuer au bridge ?
2. Combien de mains ne contiennent qu'un seul cœur ?

Solution

1. Le nombre de mains est $\binom{52}{13}$. 1

2. Le cœur est à choisir parmi les 13 autres cœurs et les 12 autres cartes parmi les 39 restantes, qui ne sont pas de cœur. Ce qui donne $\binom{13}{1} \times \binom{39}{12}$. 2

Conseils & Méthodes

1 Reconnaître les tirages simultanés.
2 Distinguer les cas selon les couleurs pour appliquer le principe multiplicatif.

À vous de jouer !

9 Au Scrabble®, un joueur tire au hasard 7 lettres parmi 100 lettres et 2 jokers.
Combien de tirages possibles existe-t-il ?

10 Au poker, chaque joueur reçoit une main de 5 cartes parmi 52 cartes.
Combien de mains possibles y a-t-il ?

↪ Exercices 53 à 60 p. 350-351

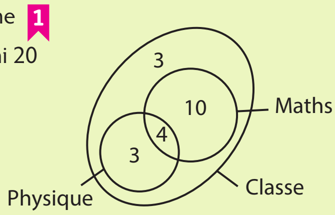
Méthode 6 Utiliser les combinaisons

Énoncé

Dans une classe d'un lycée, on interroge au hasard 20 élèves.
14 déclarent aimer les maths, 7 déclarent aimer la physique et enfin 4 déclarent aimer les deux matières.
On choisit au hasard 4 de ces élèves parmi les 20 élèves. Parmi tous les choix possibles :
1. Combien comporte 4 élèves qui aiment les maths ?
2. Combien comporte exactement 2 élèves qui n'aiment que les maths et 2 autres qui n'aiment que la physique ?

Solution

1. On peut représenter la situation par un diagramme 1
Il s'agit de combinaisons car on prend 4 élèves parmi 20 et il ne peut y avoir ni ordre, ni répétition. 2
Comme 14 élèves aiment les maths, alors le nombre de choix est :
$\binom{14}{4} = \dfrac{14!}{10!4!} = \dfrac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2} = 1\,001.$



2. Seuls 10 élèves n'aiment que les maths et 3 que la physique donc le nombre de choix est $\binom{10}{2} \times \binom{3}{2} = \dfrac{10 \times 9}{2} \times 3 = 135$.

Conseils & Méthodes

1 Reconnaître dans l'énoncé qu'il y a des intersections. On représente donc la situation par un diagramme.
2 Remarquer s'il s'agit d'une combinaison ou non.

À vous de jouer !

11 De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

12 Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire 2 délégués.
1. Quel est le nombre de choix possibles ?
2. Et si on impose que soient élus un garçon et une fille ?

↪ Exercices 53 à 60 p. 350-351

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s11-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Utiliser une représentation adaptée

Cours 1 p. 338

Énoncé

Deux options sont offertes aux élèves d'une classe de 40 élèves : espagnol ou musique.
25 élèves ont choisi l'espagnol et 18 la musique.
Par ailleurs, 10 élèves ont choisi les deux options.
On choisit au hasard un élève de cette classe.

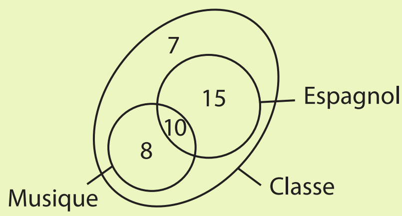
1. Représenter cette situation par un diagramme ou par un tableau à double entrée.

2. En utilisant une des deux représentations précédentes, déterminer le nombre d'élèves qui :
a) n'étudient aucune des deux matières.
b) étudient uniquement l'espagnol.
c) étudient uniquement une des deux matières.

Solution

1. 1

	Espagnol	Pas l'espagnol	Total
Musique	10	8	18
Pas la musique	15	7	22
Total	25	15	40



2. a) 7 élèves n'étudient aucune des deux matières.

b) 15 élèves étudient uniquement l'espagnol.

c) 22 élèves étudient uniquement une des deux matières.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer la ou les représentations adaptées : un diagramme, un arbre ou un tableau. Ici, il n'y a pas de tirages successifs : la représentation par un arbre n'est donc pas possible.

À vous de jouer !

13 Lors d'une table ronde pour étudier un nouveau produit qu'un fabricant de biscuits souhaite mettre sur le marché, un animateur demande à 18 personnes de répondre par oui ou non à au moins une des deux questions suivantes :
- « Aimez-vous le biscuit que vous avez goûté ? »
- « L'achèteriez-vous ? »

Dix personnes ont répondu « oui » à la première question, trois personnes ont répondu « non » à la deuxième question et cinq personnes ont répondu « non » à l'une des deux questions.

1. Représenter cette situation.

2. Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

14 Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
On note le numéro de chaque boule tirée suivant l'ordre dans lequel elles ont été tirées et on forme ainsi un numéro à trois chiffres.

1. Représenter cette situation.

2. Écrire l'ensemble de tous les nombres qui peuvent être obtenus.

3. Combien de nombres peuvent être obtenus ?

Exercices 49 à 52 p. 350

Exercices résolus

Méthode 8 Dénombrer dans différents cas

Cours 3 p. 342

Énoncé

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Parmi ceux-ci, il y a huit jetons blancs avec le numéro 0, cinq jetons rouges avec le numéro 7, quatre jetons blancs avec le numéro 2 et trois jetons rouges avec le numéro 5. On tire simultanément quatre jetons du sac.

1. Combien de tirages possibles y a-t-il ?

2. Combien de tirages y a-t-il avec les quatre numéros identiques ?

3. Combien de tirages y a-t-il avec uniquement des jetons blancs ?

4. Combien de tirages y a-t-il avec des jetons de la même couleur ?

5. Combien de tirages y a-t-il qui permettent de former le nombre 2 020 ?

6. Combien de tirages y a-t-il qui comportent au moins un jeton portant un numéro différent des autres ?

Solution

1. Il s'agit d'un tirage simultané donc le nombre de tirages possibles est $\binom{20}{4} = 4\,845$.

2. Si les quatre numéros sont identiques, il s'agit donc du numéro 0, du 7 ou du 2, et le nombre de tirages est $\binom{8}{4}+\binom{5}{4}+\binom{4}{4} = 70 + 5 + 1 = 76$. 1 2

3. Il y a 12 jetons blancs donc le nombre de tirages est $\binom{12}{4} = 495$.

4. Les jetons sont de la même couleur s'ils sont tous blancs ou tous rouges, donc le nombre de tirages est $\binom{12}{4}+\binom{8}{4} = 565$. 2

5. Pour former le nombre 2 020, il faut tirer 2 jetons avec le numéro 2 et 2 jetons avec le numéro 0, donc le nombre de tirages est $\binom{8}{2}\times\binom{4}{2} = 28 \times 6 = 168$. 2

6. Avoir au moins un jeton portant un numéro différent des autres est le contraire d'avoir tous les numéros identiques, c'est-à-dire le contraire de la question 2., ce qui donne 4 845 – 76 = 4 769.

Conseils & Méthodes

1 Faire attention à tous les cas possibles.

2 Distinguer les « ou » (questions 2. et 4.) et les « et » (question 5.).

À vous de jouer !

15 Dans un lot de 20 pièces fabriquées, quatre sont mauvaises. On en prélève un lot de quatre simultanément.

1. Combien de lots comportent 4 bonnes pièces ?

2. Combien de lots comportent au moins une mauvaise pièce ?

3. Combien de lots comportent au moins deux mauvaises pièces ?

16 Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi 9 hommes et 11 femmes.

1. Combien de jurys différents peut-on former ?

2. Combien de jurys peut-on former ne comportant que des femmes ?

3. Combien de jurys peut-on former comportant autant de femmes que d'hommes ?

4. Combien de jurys peut-on former comportant un seul homme ou une seule femme ?

17 Un conseil est formé de cinq hommes et huit femmes. Un bureau de quatre membres doit être désigné et il doit comporter au moins une femme.

1. Combien de bureaux peuvent être formés ?

2. Combien de bureaux comportant exactement un homme peuvent être formés ?

3. Combien de bureaux comportant au moins un homme peuvent être formés ?

4. Combien de bureaux comportant exactement deux femmes peuvent être formés ?

5. Combien de bureaux comportant deux hommes et deux femmes peuvent être formés ?

Exercices 61 à 64 p. 351

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s11-05

La propriété à démontrer

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$ **(relation de Pascal)**

On souhaite démonter cette propriété.

Comprendre avant de rédiger

Deux méthodes permettent de démontrer cette propriété :
- par le calcul, en vérifiant la formule de calcul d'une combinaison.
- avec la méthode combinatoire, en distinguant les cas et en comptant des parties.

Rédiger

Méthode 1 : par le calcul

On utilise les combinaisons et on observe les factorielles communes pour factoriser astucieusement puis réduire au même dénominateur.

Attention
à la réduction au même dénominateur qui doit être le plus simple possible.

Les démonstrations rédigées

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\frac{n!}{p!\times(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!\times(n-p-1)!}$$
$$=\frac{n!}{(p+1)!\times(n-p)!}\left[(p+1)+(n-p)\right]$$
$$=\frac{n!\times(n+1)}{(p+1)!\times(n-p)!}=\binom{n+1}{p+1}$$

Méthode 2 : par la méthode combinatoire

Étape 1
On distingue deux cas de parties en fixant un élément.

Dans un ensemble à $n+1$ éléments, on considère un élément a fixé.
Pour dénombrer les parties à $p+1$ éléments, on peut distinguer deux cas :
– les parties qui contiennent a ;
– celles qui ne le contiennent pas.

Étape 2
On détermine le nombre de parties qui contiennent cet élément.

Pour les parties qui contiennent a on choisit p éléments parmi les n éléments distincts de a qui sont donc au nombre de $\binom{n}{p}$.

Étape 3
De même, on détermine le nombre de parties qui ne contiennent pas cet élément.

Les parties qui ne contiennent pas a sont les parties à $p+1$ éléments à choisir parmi les n éléments distincts de a qui sont donc au nombre de $\binom{n}{p+1}$.

Étape 4
On en déduit leur somme et on compare avec la combinaison cherchée.

La somme de ces deux cas $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}$ donne finalement les parties à $p+1$ éléments d'un ensemble à $n+1$ éléments, c'est-à-dire $\binom{n+1}{p+1}$.

Pour s'entraîner

De la même façon, démontrer la relation $\binom{n}{p}=\binom{n-2}{p}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2}$.