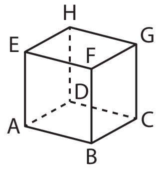
Exercices calculs et automatismes

15 Produit scalaire



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Dans le cube ABCDEFGH de côté a, déterminer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ a $-a^2$ b a^2 c $-a^2\sqrt{2}$ d $a^2\sqrt{2}$

b) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH}$ a $2a^2$ b a^2 c $a^2\sqrt{2}$ d $a^2\sqrt{6}$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$ a $-a^2$ b a^2 c 0 d $a^2\sqrt{2}$

d) $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH}$ a $-a^2$ b $-3a^2$ c $-2a^2$ d 0

16 Équation de plan

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Retrouver une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal le vecteur $\vec{n}$ donnés.

a) A(2 ; 1 ; 0) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

a $2x-y+z+3=0$ b $-2x+y-z+3=0$
c $2x-y+z=0$ d $2x+y-1=0$

b) A(– 1 ; 1 ; – 2) et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

a $x+2y-z=0$ b $-x+2y+z-1=0$
c $-x+2y-z+1=0$ d $-x+y-2z+1=0$

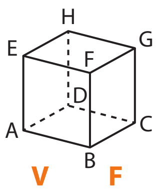
c) A(1 ; – 2 ; 0) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a $x+y+z-2=0$ b $x+y-z+1=0$
c $x+y-z=0$ d $x-2y+1=0$

d) A(1 ; 0 ; 0) et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

a $x-z+1=0$ b $-x+y+z+1=0$
c $x+y-z+1=0$ d $-x+z+1=0$

17 Produits scalaires



On considère le cube ABCDEFGH.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2$	☐	☐
b) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AC^2$	☐	☐
c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GE}$	☐	☐
d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$	☐	☐
e) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BH}=FH^2$	☐	☐
f) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CE}=0$	☐	☐

18 Orthogonale ou non

On donne trois droites et leurs représentations respectives :

$$d_1\begin{cases}x=1-2k\\y=3\\z=-2+3k\end{cases},\ d_2\begin{cases}x=-t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}\ \text{et}\ d_3\begin{cases}x=1\\y=2s\\z=3-s\end{cases}$$

où k, t et s sont des réels.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Quelles sont les droites qui sont orthogonales entre elles ?

a d_1 et d_2 b d_1 et d_3 c d_2 et d_3 d Aucune

19 Perpendiculaire ou non

On donne trois plans et leurs équations cartésiennes respectives : $P_1 : 3y+2z-1=0$, $P_2 : x-2y+3z=0$ et $P_3 : -2x+y+z-1=0$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
Quels sont les plans qui sont perpendiculaires entre eux ?

a P_1 et P_2 b P_1 et P_3 c P_2 et P_3 d Aucun

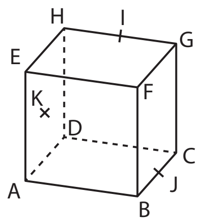
20 Orthogonaux ou non

Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\3\\-6\end{pmatrix}$

21 Quelle méthode ?



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).
On considère le cube ABCDEFGH et les milieux I et J des segments [GH] et [BC]. Le point K est le centre du carré ADHE. Dans chacun des cas dire la méthode qu'il est préférable d'utiliser pour calculer le produit scalaire demandé.

a) Pour $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EI}$:

a par projection. b avec les carrés scalaires.
c avec les coordonnées. d avec le cosinus.

b) Pour $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}$:

a par projection. b avec les carrés scalaires.
c avec les coordonnées. d avec le cosinus.

c) Pour $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BI}$:

a par projection. b avec des décompositions.
c avec les coordonnées. d avec le cosinus.

d) Pour $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BI}$:

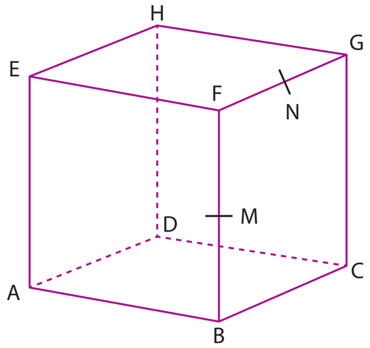
a par projection. b avec des décompositions.
c avec les coordonnées. d avec les carrés scalaires.

Exercices d'application

Calculer un produit scalaire

Méthode 1 p. 311

22 Dans un cube ABCDEFGH d'arête a et tel que M et N sont les milieux des segments [BF] et [FG]. Exprimer chaque produit scalaire en fonction de a.



a) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{HF}$ **b)** $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$
c) $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{AC}$ **d)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AN}$
e) $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BH}$ **f)** $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{AM}$

23 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, calculer les produits scalaires suivants.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ où A(1 ; 0 ; 2), B(– 2 ; 3 ; – 1) et C(1 ; – 1 ; 0)

c) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ où $\vec{u}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ et $\vec{v}=-2\vec{j}-3\vec{k}$

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$ où A(– 1 ; 2 ; 3), B(2 ; –3 ; 0), C(1 ; 1 ; 1) et D(4 ; 0 ; – 1)

24 Dans chacun des suivants, déterminer la ou les valeurs du réel t pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}t\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}t+1\\-t\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}t-1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}t+1\\1\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2t\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}t+1\\-t\\2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}t\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-t\\-t\\2\end{pmatrix}$.

25 Dans un repère orthonormé, on considère les quatre points A(– 1 ; – 3 ; – 2), B(0 ; 4 ; 2), C(1 ; 1 ; 1) et D(2 ; 2 ;– 1).
1. Déterminer si les droites (AB) et (BD) sont perpendiculaires.
2. Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

26 Dans un repère orthonormé **Démo**

$(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{e_1}\begin{pmatrix}52/57\\17/57\\16/57\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}\begin{pmatrix}-23/57\\44/57\\28/57\end{pmatrix}$ et $\vec{e_3}\begin{pmatrix}4/57\\32/57\\-47/57\end{pmatrix}$.

Montrer que la base $(\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\,,\vec{e_3})$ est orthonormée.

27 Vérifier que l'algorithme ci-dessous montre si deux vecteurs sont orthogonaux ou non. **Algo**

```
xu = float(input("xu ="))
yu = float(input("yu ="))
zu = float(input("zu ="))
xv = float(input("xv ="))
yv = float(input("yv ="))
zv = float(input("zv ="))
p = xu*xv+yu*yv+zu*zv
if p==0 :
print ("les vecteurs sont orthogonaux")
else :
print ("les vecteurs ne sont pas orthogonaux")
```

Utiliser un produit scalaire

Méthode 2 p. 311

28 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$. Parmi les vecteurs suivants, déterminer ceux qui sont à la fois orthogonaux à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}$

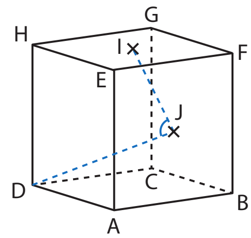
29 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Parmi les vecteurs suivants, déterminer ceux qui sont à la fois orthogonaux à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

a) $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}$

30 On donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

1. Calculer les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{i}$, $\vec{u}\cdot\vec{j}$ et $\vec{u}\cdot\vec{k}$.
2. En déduire les valeurs en radians des angles entre ce vecteur et les vecteurs du repère.

31 Dans le cube ABCDEFGH d'arête 1, les points I et J sont les centres des carrés EFGH et ABFE.
Déterminer l'angle $\widehat{DJI}$ en degrés, arrondi à 0,1 près. On pourra se placer dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.



32 ABCD est un tétraèdre régulier d'arête 2 et les points I et J sont les milieux des segments [BC] et [CD].

1. Calculer les longueurs AI, AJ et IJ.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ à l'aide d'une décomposition des deux vecteurs.

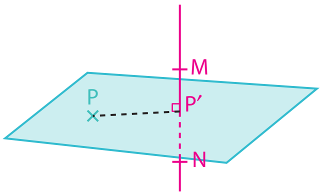
3. En déduire la valeur, arrondie au dixième de degré près, de l'angle $\widehat{IAJ}$.

33 Démo

ABCDEFGH est un cube et on note θ l'angle géométrique entre les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BH}$.

Démontrer que $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

34 Les points M, N et P de l'espace et le point P′ est le projeté orthogonal du point P sur la droite (MN) et : MN = 3, MP = 4, MP′ = 2.

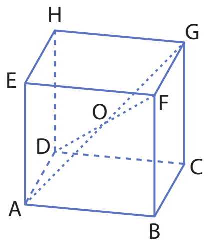


1. Calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

2. En déduire une valeur arrondie à l'unité de l'angle $\widehat{PMN}$.

3. Calculer la valeur de la longueur NP.

35 Dans le cube ABCDEFGH d'arête 1 et de centre le point O, calculer l'angle en degré, arrondi à 0,01, entre les deux diagonales (AG) et (DF).



Déterminer une équation cartésienne d'un plan

Méthode 3 p. 313

36 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes $-x + 2y + z = 0$ et $2x + 3y - 4z + 2 = 0$.

1. Déterminer un vecteur normal à chacun de ces deux plans.

2. En déduire leur position relative.

37 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes $x - y + 2z - 1 = 0$ et $2x - z = 0$

1. Donner un vecteur normal à chaque plan.

2. En déduire leur position relative.

38 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) A(3 ; – 1 ; 2) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$.

b) A(1 ; – 1 ; 0) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

c) A(– 2 ; 1 ; 2) et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

d) A($\sqrt{2}$; 3 ; 0) et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

39 On considère les points A(– 4 ; 2 ; 2), B(1 ; 1 ; – 1) et C(3 ; – 1 ; 1).

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$.

40 Pour chacun des plans ci-dessous, donner un vecteur normal.

a) $2x + y - 3z + 1 = 0$

b) $-3x + y - 2z = 0$

c) $x - 2z + 4 = 0$

d) $3y + 5z = 0$

41 Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$ parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - 3y + 7z - 4 = 0$ et passant par le point D(4 ; – 2 ; – 3).

42 Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment [AB] où A(– 1 ; 3 ; 1) et B(0 ; 5 ; – 3).

Coup de pouce Le plan médiateur est le plan qui passe par le milieu du segment et qui lui est orthogonal.

43 On donne les points A(1 ; 1 ; 1), B(2 ;– 1 ; 0) et C(0 ; – 1 ; 2).

1. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan de l'espace.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal

Méthode 4 p. 313

44 On considère le point A(– 6 ; 2 ; – 1) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $-5x + y - z - 6 = 0$.

1. Montrer que le point H(– 1 ; 1 ; 0) est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

2. Déterminer la distance du point A au plan.

45 Déterminer dans chacun des cas les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne donnée

a) A(1 ; 2 ;3) et $2x - 3y + 4z - 5 = 0$

b) A(1 ; 1 ; 1) et $x + y + z - 1 = 0$

c) A(– 1 ; – 4 ; 3) et $x + 2y - 11z - 21 = 0$

Exercices d'application

46 Déterminer dans chacun des cas les coordonnées du projeté orthogonal du point sur le plan donné et calculer la distance du point au plan.
a) A(0 ; 1 ; 2) et $3x - y + z + 10 = 0$
b) O(0 ; 0 ; 0) et $5x - 2y + z - 3 = 0$

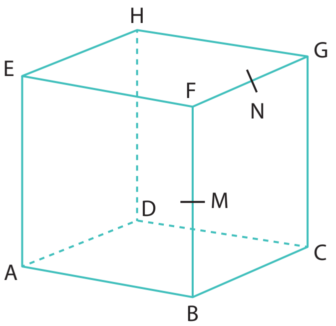
47 **Démo** On considère les points A(3 ; – 1 ; 4) et B(0 ; 5 ; 1) et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x - 2y + z - 1 = 0$.
Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

48 On donne le point D(5 ; 6 ; 1) et le plan d'équation cartésienne $2x - 3y = 0$.
1. Déterminer un vecteur normal au plan.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire au plan passant par le point D.
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point D sur le plan.
4. Calculer la distance du point D au plan.

Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace

Méthode 5 p. 314

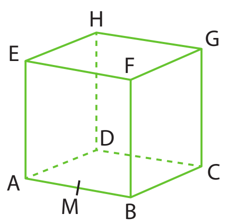
49 On considère la figure suivante.



1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN}$.
2. En déduire l'angle $\widehat{MEN}$ en degrés et arrondi à 0,01 près.

50 On considère les points A(3 ; 3 ; 5), B(3 ; 3 ; – 1), C(3 ; 1 ; – 1) et D(1 ; 3 ; – 1).
1. Montrer que le triangle BCD est rectangle.
2. Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BCD).
3. Calculer la longueur AB.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

51 ABCDEFGH est un cube de côté a et le point M est le milieu du segment [AB].
1. Démontrer que le triangle DHM est rectangle.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{DMH}$ en degré, arrondie à 0,01 près.



Déterminer une intersection de droites et de plans

Méthode 6 p. 315

52 Déterminer si le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite d existe et si tel est le cas le déterminer.

a) $x - y + z + 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -1 + k \\ z = 3k \end{cases}$ où k est un réel.

b) $x - 3y + z - 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3k \\ z = 1 + k \end{cases}$ où k est un réel.

c) $x + y - 2z - 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$ où k est un réel.

d) $x + y - 2z + 2 = 0$ et $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + k \end{cases}$ où k est un réel.

53 Déterminer si le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite d existe et si tel est le cas le déterminer.

a) $x + y - 2z - 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = k \end{cases}$ où k est un réel.

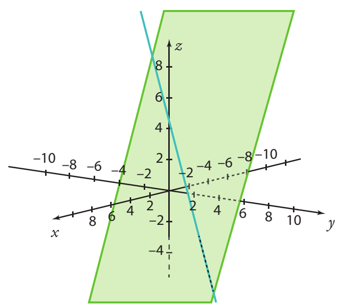
b) $x + y - 2z + 2 = 0$ et $\begin{cases} x = 5 + k \\ y = 1 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ où k est un réel.

c) $x + y + 2z + 1 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$ où k est un réel.

d) $x - y + z = 0$ et $\begin{cases} x = -1 - k \\ y = -3 + k \\ z = 1 - k \end{cases}$ où k est un réel.

e) $2x + y + z + 3 = 0$ et $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = -k \end{cases}$ où k est un réel.

54 On considère la droite de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - k \\ z = -2 + 3k \end{cases}$ où k est un réel.
On considère le plan d'équation cartésienne : $3x - 2y + z + 3 = 0$.
1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.
2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.



55 Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite et du plan donnés, s'il existe.

a) $\begin{cases} x = -7 + k \\ y = 4 + 2k \\ z = -5 - k \end{cases}$ où k est un réel et $2x + 3y - z + 6 = 0$.

b) $\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = 2 - k \\ z = -3 + 5k \end{cases}$ où k est un réel et $x + 5y + z + 6 = 0$.

c) $\begin{cases} x = 6 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3 - k \end{cases}$ où k est un réel et $x + y + 3z - 1 = 0$.

56 Dans chacun des cas suivants, déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection des deux plans donnés.
a) $x + y + 2z - 3 = 0$ et $x - 4y + 5z - 6 = 0$
b) $-x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - y - 2z + 5 = 0$
c) $-x + 2z + 1 = 0$ et $y - 2z + 4 = 0$

57 Dans chacun des cas suivants, déterminer si les deux plans sont sécants et si tel est le cas, donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
a) $x - y + 3z - 2 = 0$ et $2x + y - z - 1 = 0$
b) $x + y + z - 4 = 0$ et $2x + 2y + 2z = 8$
c) $2x - 3y + z - 4 = 0$ et $x + 2y - z + 1 = 0$
d) $x - 3y + 2 - 5 = 0$ et $2x + y + 7z - 1 = 0$

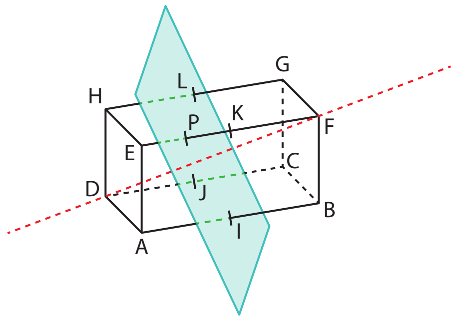
58 On donne les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $3x - 2y + 4z - 1 = 0$ et $2x + y - z + 3 = 0$.
1. Vérifier que ces deux plans sont sécants.
2. Déterminer un vecteur directeur de leur droite d'intersection.
3. Donner une représentation paramétrique de cette droite

59 On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $2x - 3y + z - 4 = 0$ et $-2x + 3y - z = 0$.
1. Déterminer leur position relative.
2. On considère la droite d de représentation paramétrique
$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = 3 - k \end{cases}$ où k est un réel.
a) Déterminer les coordonnées du point A intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.
b) Déterminer les coordonnées du point B intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}'$.
3. Calculer la distance AB.
4. Justifier que cette distance n'est pas la plus courte distance entre les deux plans.

Étudier des problèmes de position relative dans l'espace

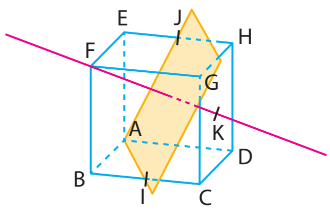
Méthode 7 p. 315

60 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle et les points I, J, K et L sont les milieux des arêtes [AB], [CD], [EF] et [GH]. Le point P est le milieu du segment [EK].
AB = 2 et BC = BF = 1.



1. Démontrer que : $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{IP}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. Calculer $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{LP}$.
3. Que peut-on en déduire pour la droite (DF) par rapport au plan (ILP) ?

61 Dans le cube ABCDEFGH d'arête 1, on place les points I et J milieux des segments [BC] et [EH], et le point K centre de la face CDHG.



1. Montrer que les points A, G, I et J appartiennent à un même plan.
2. Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CH}$.
3. En déduire que : $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.
4. Montrer que la droite (FK) est orthogonale au plan (AIJ).

Démo

62 On considère les points A(– 1 ; 1 ; 2), B(1 ; 0 ; – 1), C(0 ; 3 ; 1) et D(– 8 ; 2 ; – 3).
1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

63 On considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(– 3 ; 1 ; – 2), C(2 ; 1 ; 1), D(0 ; – 3 ; 2) et l'origine O.
1. Démontrer que les points O, A et B définissent bien un plan
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan (OAB).

Exercices d'entraînement

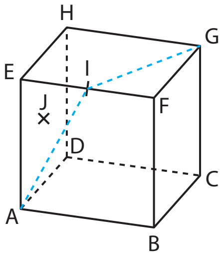
Géométrie avec le produit scalaire

64 Soit quatre points quelconques **Démo**
de l'espace, démontrer que $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$.

65 On considère un tétraèdre ABCD tel que la droite (AB) est orthogonale au plan (BCD).
1. Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire l'équivalence suivante :
ACD est rectangle en C $\Leftrightarrow$ BCD est rectangle en C.

Plans dans l'espace

66 Dans un cube ABCDEFGH muni du repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on place le point I milieu du segment [EF] et le point J centre du carré ADHE.



1. Montrer que : $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IA} = -\dfrac{1}{4}$.
2. En déduire une valeur arrondie à 0,1 degré de l'angle $\widehat{AIG}$.
3. Montrer que la droite (BJ) est orthogonale à (IG) et à (IA).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan (AIG).
5. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par J et parallèle au plan (AIG).

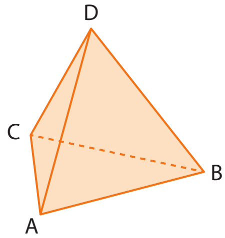
67 Dans un cube ABCDEFGH, les points M, N et P sont définis par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CG}$.
On choisit le repère $(B\,;\,\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.
1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est normal au plan (EMN).
2. En déduire une équation cartésienne du plan (EMN).

68 On considère les points $A(a\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,b\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,c)$ où a, b et c sont des réels non nuls.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Quel est le volume du tétraèdre OABC ?

69 Vérifier que l'algorithme en **Python** **Algo** ci-dessous permet de dire si un point appartient à un plan ou non.

```
xA=float(input("xA="))
yA=float(input("yA="))
zA=float(input("zA="))
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
d=float(input("d="))
p=xA*a+yA*b+zA*c+d
if p==0 :
print ("le point A appartient au plan")
else :
print ("le point A n'appartient pas au plan")
```

70 Dans un tétraèdre ABCD régulier d'arête a, on considère le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.



1. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
2. On place les points I et J tels que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et J milieu du segment [AD].
Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ).
3. Déterminer les coordonnées du point K intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

Intersections en tout genre

71 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(1\,;-1\,;\,3)$, $B(0\,;\,3\,;\,1)$, $C(2\,;\,1\,;\,3)$, $D(6\,;-7\,;-1)$ et $E(4\,;-6\,;\,2)$.
1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Montrer que la droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).
5. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (DE) et du plan (ABC).

72 On considère les droites d et d' **Démo**
dont les représentations paramétriques sont : $\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 1 + 3k \\ z = -3 + k \end{cases}$
et $\begin{cases} x = 2 - k' \\ y = 1 + 2k' \\ z = -3k' \end{cases}$ où k et k' sont des réels.
Démontrer que ces deux droites sont orthogonales et non perpendiculaires.

73 On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ et la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = -1 + k \\ z = k \end{cases}$ où k est un réel.
1. Montrer que la droite d est parallèle au plan.
2. Justifier que la droite d n'est pas incluse dans le plan.
3. Justifier que le point $A(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à la droite.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}'$ passant par le point A et orthogonale à la droite d.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Projetés orthogonaux

74 **1.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point A(1 ; 0 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. On donne le plan $\mathscr{P}'$ d'équation cartésienne $x+2y-z+1=0$ et le point B(0 ; 1 ; 1).
Démontrer que les deux plans sont perpendiculaires.

3. a) Déterminer les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$.
b) En déduire la distance d du point B au plan $\mathscr{P}$.

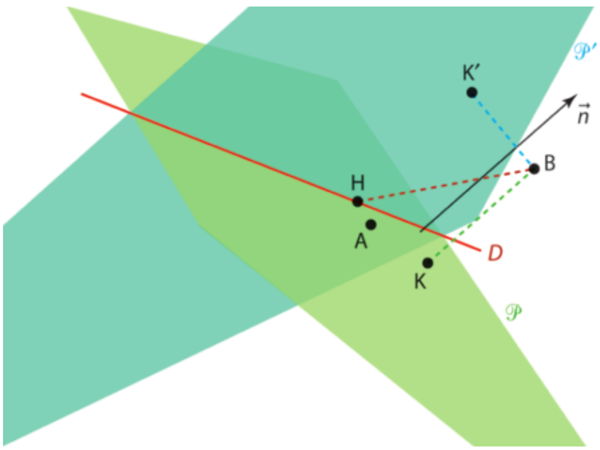
4. a) Déterminer les coordonnées du point K′, projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}'$.
b) En déduire la distance d' du point B au plan $\mathscr{P}'$.

5. Donner une représentation paramétrique de la droite D d'intersection des deux plans.

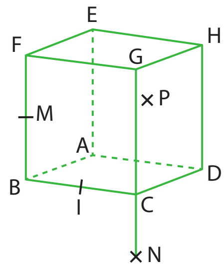
6. Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (BH) soit orthogonale à la droite D.

7. Vérifier que : $BH^2 = d^2 + d'^2$.

8. Expliquer le résultat obtenu.



75 On considère un cube ABCDEFGH et les points suivants :
M milieu du segment [BF],
I milieu du segment [BC],
P centre de la face ADHE,
N défini par la relation $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.
On munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP).

En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par le point G et orthogonale au plan (MNP).
3. Déterminer les coordonnées du point K projeté orthogonal du point G sur le plan (MNP).
En déduire la distance du point G au plan (MNP).
4. On admet que les points M, E, D et I appartiennent à un même plan et que le quadrilatère MEDI a pour aire $\frac{9}{8}$ u.a.

Calculer le volume de la pyramide GMEDI.

76 On considère la droite d passant par le point A(−2 ; 8 ; 4) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-1\end{pmatrix}$ et la droite d' passant par le point B(5 ; 1 ; −3) et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. Donner une représentation paramétrique pour chacune des droites d et d'.
2. Démontrer qu'elles ne sont pas coplanaires.
3. Vérifier que le point H(−3 ; 3 ; 5) est sur d et que le point K(3 ; 0 ; −4) est sur d'.
4. Démontrer que (HK) est la perpendiculaire commune aux droites d et d'.
5. Calculer la distance entre ces deux droites.

Travailler le Grand Oral

77 Le méthane, de formule atomique CH_4, a une molécule dont les quatre atomes d'hydrogène sont sur les sommets d'un tétraèdre régulier.
L'atome de carbone est situé au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.
1. Existe-t-il d'autres molécules de cette forme ?
2. Déterminer l'angle entre l'atome central et les atomes périphériques.

Exercices bilan

78 Quatre points

On considère les points de l'espace A(5 ; – 5 ; 2), B(– 1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et D(6 ; 6 ; – 1).

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite d et du plan (BCD).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

6. Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

79 Deux plans

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ et on considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives : $x+y-1=0$ et $y+z-2=0$.

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et vérifier que la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases}x=1-k\\y=k\\z=2-k\end{cases}$ est leur droite d'intersection.

2. a) Déterminer une équation du plan $\mathcal{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite d.

b) Démontrer que le point H(0 ; 1 ; 1) est le point d'intersection du plan $\mathcal{R}$ et de la droite d.

3. a) Vérifier que les points $A\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et B(1 ; 1 ; 0) appartiennent au plan $\mathcal{R}$.

b) On appelle A′ et B′ les points symétriques des points A et B par rapport au point H. Justifier que le quadrilatère ABA′B′ est un losange.

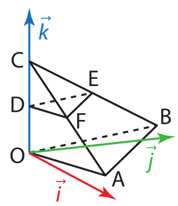
c) Vérifier que le point S(2 ; – 1 ; 3) appartient à la droite d.

d) Calculer le volume de la pyramide SABA′B′.

80 Parallélisme

L'espace est rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère les points A(10 ; 0 ; 1), B(1 ; 7 ; 1) et C(0 ; 0 ; 5).



1. a) Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires.

b) Déterminer la mesure, de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième de degré.

2. Vérifier que $7x+9y-70z=0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (CA).

4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OAB) passant par D.

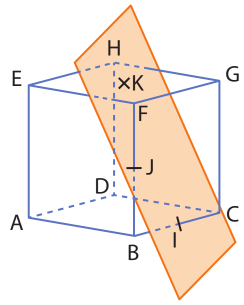
5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F. Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{7}{2}\,;3\right)$.

6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

D'après Bac 2019

81 Dans un cube

Dans le cube ABCDEFGH d'arête 1, on place les points I, J et K milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [FH]. L'espace est rapporté au repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x+2y+2z-5=0$.

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

b) En déduire que le point $R\left(\frac{3}{4}\,;1\,;0\right)$ est le point d'intersection de la droite (CD) et du plan (IJK).

4. a) Dessiner le cube et placer le point R.

b) Construire la section du cube par le plan (IJK).

82 Distance

On considère les points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 6 ; 0), C(0 ; 0 ; 4) et D(– 5 ; 0 ; 1).

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (ABC) et passant par le point D.

4. En déduire les coordonnées du point H projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

83 Points non alignés

On considère les points A(– 2 ; 0 ; 1), B(1 ;2 ; – 1) et C(– 2 ; 2 ; 2).

1. a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis donner les longueurs AB et AC.

b) En déduire une valeur approchée au degré de l'angle $\widehat{BAC}$.

c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

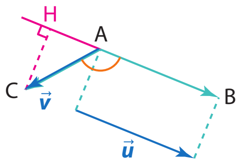
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.

3. Montrer que les plans $\mathcal{P}: x+y-3z+3=0$ et $\mathcal{P}': x-2y+6z=0$ sont sécants selon une droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-2\\y=-1+3k\\z=k\end{cases}$ où k est un réel.

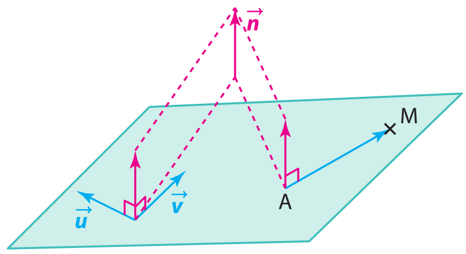
4. Démontrer que la droite d et le plan (ABC) sont sécants en un point dont on donnera les coordonnées.

Produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$= \pm\, AB \times AH$$
$$= xx' + yy' + zz'$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$



Vecteur normal au plan



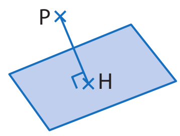
Équation cartésienne du plan

$A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Projeté orthogonal d'un point à une droite ou un plan

Point d'intersection de la droite (ou du plan) et de la perpendiculaire à cette droite (ou à ce plan) passant par le point donné.



Opérations avec les vecteurs

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Distance entre deux points de l'espace

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Distance d'un point à un plan

Distance entre le point et son projeté orthogonal sur le plan, plus courte distance entre le point et un point quelconque du plan.

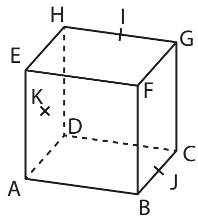
Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Calculer un produit scalaire et l'utiliser pour calculer un angle ou une longueur	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 22, 23, 3, 4, 28, 29
▶ Déterminer une équation cartésienne d'un plan	Méthode 3	5, 6, 36, 37
▶ Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal sur un plan	Méthode 4	7, 9, 44, 45
▶ Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace	Méthode 5, Méthode 7	10, 11, 49, 50, 14, 15, 60, 61
▶ Déterminer une intersection entre un plan et une droite quelconques	Méthode 6	12, 13, 52, 53

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s10-07

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 84 à 90, on considère le cube cube ABCDEFGH d'arête 2 et les milieux I et J des segments [GH] et [BC]. Le point K est le centre du carré ADHE.



	A	B	C	D
84 $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{EI}$ vaut :	0	2	4	1
85 $\overrightarrow{IE}\cdot\overrightarrow{IF}$ vaut :	1	3	4	9
86 $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BK}$ vaut :	0,5	1,5	3	6
87 $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KI}$ vaut :	-4	-1	0	4
88 Un vecteur normal au plan (BIK) est :	$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$
89 Une équation cartésienne du plan (BIK) est :	$-x+y+1=0$	$-x+z+1=0$	$-y+z=0$	$y-z+1=0$
90 L'intersection de la droite (EJ) et du plan (BIK) est :	le point (4 ; 2 ; 2).	la droite (EJ).	inexistante.	le point $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.
91 L'intersection de la droite (BH) et du plan (BIK) est :	la droite (BH).	le point (1 ; 1 ; 1).	inexistante.	le point (2 ; 0 ; 0).
92 Soit les points A(0 ; 3 ; 1), B(−2 ; 1 ;3), C(2 ; 0 ; 3) et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+4y-2z+4=0$. Ces plans sont :	sécants en un point.	confondus.	parallèles.	sécants selon une droite.
93 L'ensemble des points de l'espace vérifiant $y=x$ est :	un plan contenant l'axe (Oz).	une droite passant par l'origine.	un plan orthogonal à l'axe (Ox).	une droite orthogonale à l'axe (Oz).

94 Distance

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$.

c) Démontrer de même que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

d) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. Démontrer que le centre de gravité K du triangle BDE est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE).

Préciser sa position sur le segment [AG].

3. Répondre aux questions suivantes à l'aide du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) Donner une équation cartésienne du plan (BDE).

b) Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point H et orthogonale au plan (BDE).

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de la droite d et du plan (BDE).

d) En déduire la distance du point H au plan (BDE).

Méthode 1 p. 311 Méthode 3, Méthode 4 p. 313 Méthode 6 p. 315

95 Aire variable

Dans un cube ABCDEFGH d'arête 1, on place le point M de la demi-droite [AE] défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$$

où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le point défini par la relation :

$$a^2\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$

a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BD}$.

b) Calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$.

En déduire que : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

c) Démontrer que : $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

d) Démontrer que le point K est l'orthocentre du triangle BDM.

3. a) Démontrer que : $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

b) Que peut-on en déduire pour la droite (AK) ?

4. Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire vaut $\dfrac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$.

Méthode 1 p. 311 Méthode 5 p. 314

96 Intersection

On considère les points de l'espace A(1 ; – 1 ; 3), B(0 ; 3 ; 1), C(6 ; – 7 ; – 1), D(2 ; 1 ; 3) et E(4 ; – 6 ; 2).

1. Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

2. Montrer que la droite (CE) est orthogonale au plan (ABD).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE).

5. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (CE) et du plan (ABD).

Méthode 3 p. 313 Méthode 5 p. 314 Méthode 6 p. 315

97 Un volume

Dans un cube ABCDEFGH d'arête 1, on considère les points $M\left(1\,;1\,;\frac{3}{4}\right)$, $N\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ et $P\left(1\,;0\,;-\frac{5}{4}\right)$ dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que les points M, N et P ne sont pas alignés.

2. Démontrer que le triangle MNP est rectangle en M.

3. a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (MNP).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (MNP).

4. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point F et de vecteur directeur $\vec{n}$.

5. Démontrer que le point $K\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$ est l'intersection de la droite d et du plan (MNP).

6. Calculer le volume du tétraèdre FMNP.

Méthode 2 p. 311 Méthode 3 p. 313 Méthode 6 p. 315

98 Pyramide

Dans une pyramide SABDE à base carrée ABDE de centre O, on place le point C tel que le repère $(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ soit orthonormé et S(0 ; 0 ; 3).

1. Montrer que le point U de cote 1 appartenant à la droite (SB) a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$.

2. a) Soit V le point d'intersection de la droite (SD) et du plan (AEU). Démontrer que les droites (UV) et (BD) sont parallèles.

b) Déterminer les coordonnées du point V.

3. a) Démontrer que le point $K\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$ est le pied de la hauteur issue de U du trapèze AUVE.

b) Démontrer que l'aire de ce trapèze est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

Méthode 1 p. 311 Méthode 6 p. 315

99 Distance minimale

On considère les plans d'équations cartésiennes respectives $\mathcal{P}_1 : -2x + y + z - 6 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que les deux plans sont perpendiculaires.

2. Montrer que la droite d d'intersection de ces deux plans a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -7 + 2k \\ y = -8 + 3k \\ z = k \end{cases}$ où k est un réel.

3. On prend un point M quelconque de la droite d et on donne le point A(– 9 ; – 4 ; – 1).

a) Vérifier que A n'appartient à aucun des deux plans.

b) Exprimer AM^2 en fonction de k.

c) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$.

d) En déduire pour quel point M la distance AM est minimale. On appelle H ce point.

4. Déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à la droite d passant par A.

5. Démontrer que H est le projeté orthogonal de A sur la droite d.

100 Perpendiculaire commune

On considère la droite d qui est l'axe des abscisses et la droite d' de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -k \\ y = 3 + 3k \\ z = 1 - k \end{cases}$ où k est un réel. On appelle Δ la perpendiculaire commune aux deux droites.

1. Justifier que d et d' ne sont pas coplanaires.

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que le vecteur $\vec{w} = a\vec{j} + b\vec{k}$ soit un vecteur directeur de la droite Δ.

3. Vérifier que le plan d'équation cartésienne $-3y + z = 0$ contient la droite d.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la droite d' et du plan.

5. Justifier que la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à la droite d en un point B, que l'on déterminera, et qu'elle est la perpendiculaire commune cherchée.

6. Calculer la distance entre les deux droites d et d'.

101 Droite ou plan ?

On considère l'ensemble (E) des points M(x ; y ; z) de l'espace dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} x = 1 - k + 4t \\ y = 2 + 2k - t \\ z = -1 + k + 2t \end{cases}$ où k et t sont des réels.

Ainsi que le point A(1 ; 2 ; – 1) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

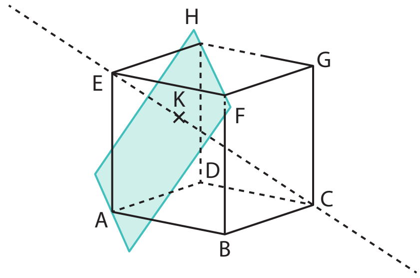
1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. En déduire quel est l'ensemble (E).

3. En donner alors une équation cartésienne.

102 Tétraèdre

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 et on note K le point d'intersection de la droite (CE) avec le plan (AFH).



On se place dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE).

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

3. En déduire les coordonnées du point K.

4. Montrer que K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

5. Calculer la distance du point E au plan (AFH).

6. Démontrer que la droite (HK) est perpendiculaire à la droite (AF). Qu'en déduit-on pour le point K dans le triangle AFH ?

7. On dit qu'un tétraèdre est de type 1 si ses faces ont même aire, qu'il est de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux et qu'il est de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

De quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH ?

D'après Bac 2019

103 Trois plans

On considère les plans d'équations cartésiennes respectives : $\mathcal{P}_1 : 4x + y + z + 10 = 0$, $\mathcal{P}_2 : 2x + y + 3 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : 2x - y + 2z - 1 = 0$.

1. Déterminer un vecteur normal pour chacun des trois plans.

2. Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite d, intersection de ces deux plans.

4. Étudier la position relative de la droite d et du plan $\mathcal{P}_3$.

5. Déterminer alors la nature de l'intersection des trois plans.

104 Piège

On considère les plans donnés par leurs équations cartésiennes respectives $\mathcal{P}_1 : 2x - 3y - z + 4 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 2y - 4z - 5 = 0$.

1. Montrer que ces deux plans sont perpendiculaires.

2. Vérifier que les points A(1 ; 1 ; 3) et B(– 1 ; – 1 ; 5) appartiennent au plan $\mathcal{P}_1$.

3. Vérifier que les points C(1 ; 6 ; 2) et D(– 3 ; 0 ; – 2) appartiennent au plan $\mathcal{P}_2$.

4. Étudier la position relative entre les droites (AB) et (CD). Sont-elles orthogonales ? Parallèles ?

105 Plan médiateur

On donne les points A(1 ; 2 ; 2) et B(– 3 ; – 1 ; 1). On note (E) l'ensemble des points M de l'espace tels que : MA = MB.

1. Démontrer que l'ensemble (E) est le plan d'équation cartésienne : $4x + 3y + z + 1 = 0$.

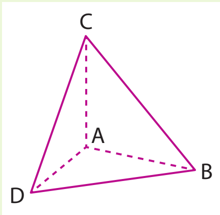
2. Montrer que le milieu du segment [AB] appartient à cet ensemble.

3. Montrer qu'un vecteur normal à (E) est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

4. En déduire une définition et une caractérisation de l'ensemble (E), appelé plan médiateur du segment [AB].

106 Théorème de De Gua de Malves

Histoire des maths — Démo



Démontrer le théorème suivant, appelé *théorème de Pythagore dans l'espace* :

« Dans un tétraèdre ABCD trirectangle en A, le carré de l'aire de la face BCD est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces ».

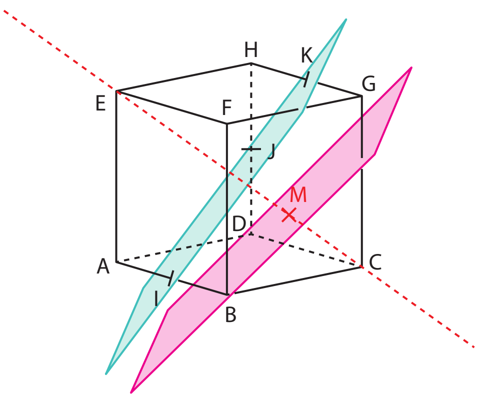
Coup de pouce Un tétraèdre ABCD est trirectangle en A quand les triangles ABC, ACD et ABD sont rectangles et isocèles en A.

107 Représenter

Représenter l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4 \\ 0 \leqslant z \leqslant 4 \\ 0 \leqslant x + y + z \leqslant 8 \end{cases}$

108 Point variable

L'espace est muni du repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE})$. ABCDEFGH est un cube et I, J et K sont les milieux des segments [AB], [DH] et [GH].



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal du plan (IJK).

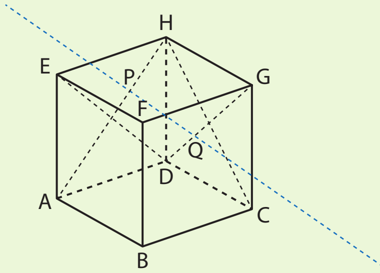
2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. Quelle est la position d'un point M sur la droite (CE) pour que le plan (BDM) soit parallèle au plan (IJK) ?

109 Trois méthodes

Démo

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 et les points P et Q sont les centres de gravité des triangles DEH et CDH. On veut démontrer de trois façons différentes que la droite (PQ) est orthogonale aux droites (DG) et (AH).



A ▸ Avec le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE})$

1. Donner les coordonnées des points C, E et H, ainsi que du milieu K de l'arête [EH].

2. En déduire les coordonnées des points P et Q. Conclure.

B ▸ Avec une étude géométrique

On note O le centre du carré CDHG.

1. Démontrer que (OK) est parallèle à (PQ) et à (CE).

2. Démontrer que (DG) est perpendiculaire au plan (CEH) et que (AH) est perpendiculaire au plan (CDE).

3. En déduire que (CE) est orthogonale à (DG) et à (AH).

C ▸ Avec le calcul vectoriel

1. Démontrer que : $3\overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA}$ et que : $3\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$.

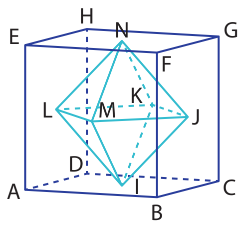
2. En déduire que : $3\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DA}$.

3. Calculer : $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AH}$. Conclure.

110 Double pyramide

On relie les centres de chaque face d'un cube ABCDEFGH pour former un solide IJKLMN.

Plus précisément, les points I, J, K, L, M et N sont les centres respectifs des faces carrées ABCD, BCGF, CDHG, ADHE, ABFE et EFGH (donc les milieux des diagonales de ces carrés).



1. Sans utiliser de repère (et donc de coordonnées) dans le raisonnement mené, justifier que les droites (IN) et (ML) sont orthogonales.

2. Dans la suite, on considère le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE})$ dans lequel, par exemple, le point N a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

a) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{ML}$.

b) En déduire que les droites (NC) et (ML) sont orthogonales.

c) Déduire une équation cartésienne du plan (NCI).

3. a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (NJM) est : $x - y + z = 1$.

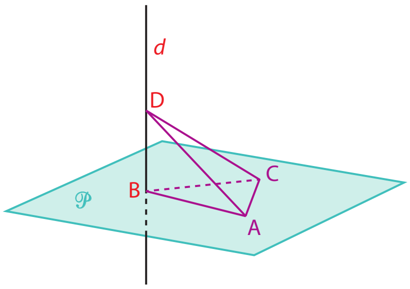
b) La droite (DF) est-elle perpendiculaire au plan (NJM) ?

c) Montrer que l'intersection des plans (NJM) et (NCI) est une droite dont on donnera un point et un vecteur directeur. Nommer la droite ainsi obtenue en utilisant deux points de la figure.

D'après Bac 2019

Exercices vers le supérieur

111 Bicoin



A ▶ Dans un plan $\mathscr{P}$, on considère un triangle ABC rectangle en A.
Soit d la droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$ et passant par le point B.
On considère un point D de cette droite distinct du point B.
1. Montrer que la droite (AC) est orthogonale au plan (BAD).
2. On appelle « bicoin » un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
Montrer que le tétraèdre ABCD est un « bicoin ».
3. a) Justifier que l'arête [CD] est la plus longue arête du « bicoin » ABCD.
b) On note I le milieu de l'arête [CD].
Montrer que le point I est équidistant des 4 sommets du « bicoin » ABCD.

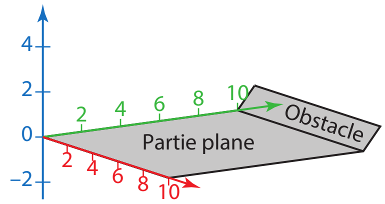
B ▶ Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point A(3 ; 1 ; –5) et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -2t+9 \\ z = t-3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ orthogonal à la droite d et passant par le point A.
2. Montrer que le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite d est le point B(5 ; 5 ; –1).
3. Justifier que le point C(7 ; 3 ; –9) appartient au plan $\mathscr{P}$ puis montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
4. Soit t un réel différent de 2 et M le point de paramètre t appartenant à la droite d.
a) Justifier que le triangle ABM est rectangle.
b) Montrer que le triangle ABM est isocèle en B si et seulement si le réel t vérifie l'équation $t^2 - 4t = 0$.
c) En déduire les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

C ▶ On donne le point D(9 ; 1 ; 1) qui est un des deux points solutions de la question **4. c)** de la partie **B ▶**.
Les quatre sommets du tétraèdre ABCD sont situés sur une sphère.
En utilisant les résultats des questions des parties **A ▶** et **B ▶** précédentes, déterminer les coordonnées du centre de cette sphère et calculer son rayon.

D'après Bac 2019

112 Des drones



Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entrainent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.
On considère un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère : O(0 ; 0 ; 0), P(0 ; 10 ; 0), Q(0 ; 11 ; 1), T(10 ; 11 ; 1), U(10 ; 10 ; 0) et V(10 ; 0 ; 0).
La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.
Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :
• le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec A(2 ; 4 ; 0,25) et B(2 ; 6 ; 0,75),
• le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec C(4 ; 6 ; 0,25) et D(2 ; 6 ; 0,25).

A ▶ Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
2. a) Justifier que le vecteur $\vec{n}$ (0 ; 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (PQU).
b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2 ; \frac{37}{3} ; \frac{7}{3}\right)$.
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

B ▶ Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
Pour vérifier que cette consigne est respectée, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).
Il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = b\overrightarrow{CD}$.
On s'intéresse donc à la distance MN.
1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2–2b ; 2–2a ; –0{,}5a)$.
2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.
3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.

D'après Bac 2019

113 Produit vectoriel

MPSI PCSI Algo

On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et on définit $\vec{n}\begin{pmatrix}bc'-b'c\\ca'-c'a\\ab'-a'b\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Démontrer l'équivalence :

$$\vec{n}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Remarque Le vecteur $\vec{n}$ est appelé produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on écrit : $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. Il est utilisé pour déterminer la force qui s'exerce sur une particule soumise à un champ magnétique.

3. On donne les points A(3 ; 0 ; 1), B(0 ; – 1 ; – 2) et C(1 ; – 1 ; 0).

a) Justifier que les trois points définissent un plan.

b) Déterminer à l'aide de ce qui précède un vecteur normal au plan (ABC).

c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4. Vérifier que l'algorithme écrit en Python ci-contre répond au problème précédent et le faire tourner pour vérifier l'équation du plan (ABC).

```python
xu = float(input("xu="))
yu = float(input("yu="))
zu = float(input("zu="))
xv = float(input("xv="))
yv = float(input("yv="))
zv = float(input("zv="))
xA = float(input("xA="))
yA = float(input("yA="))
zA = float(input("zA="))
a = yu*zv-zu*yv
b = zu*xv-xu*zv
c = xu*yu-yu*xv
d = -a*xA-b*yA-c*zA
if a**2+b**2+c**2==0 :
    print ("plan indéfini")
else :
    print ("a=",a)
    print ("b=",b)
    print ("c=",c)
    print ("d=",d)
```

PYTHON
Équation du plan
lienmini.fr/maths-s10-08

114 Droites sécantes ?

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1, avec I le milieu du segment [EF], J le milieu du segment [EH] et K le point tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par I et parallèle au plan (FHK). L'espace est muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. a) Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (FHK).

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FHK) est $4x+4y-3z-1=0$.

c) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.

d) Calculer les coordonnées de M′, point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

2. Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de Δ.

b) Calculer les coordonnées du point L, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

c) Les droites Δ et (BC) sont-elles sécantes ? Qu'en est-il des droites Δ et (CG) ? Justifier vos réponses.

D'après Bac 2019

115 Section de cube

Dans l'espace on considère le cube ABCDEFGH de centre Ω et d'arête de longueur 6. Les points P, Q et R sont définis par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$.

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

1. a) Donner les coordonnées des points P, Q, R et Ω.

b) Déterminer les réels b et c tels que : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ soit un vecteur normal au plan (PQR).

c) En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x-y+z-2=0$.

2. a) On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b) En déduire que Δ coupe (PQR) au point $I\left(\frac{8}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$.

c) Calculer la distance ΩI.

3. On considère les points J(6 ; 4 ; 0) et K(6 ; 6 ; 2).

a) Justifier que J appartient au plan (PQR).

b) Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

c) Tracer la section du cube par le plan (PQR).

116

Soit ABCDEFGH un cube, I le centre du carré ADHE et J un point quelconque du segment [CG]. La section du cube par le plan (FIJ) est le quadrilatère FKLJ. On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

A ▶ Le point J a pour coordonnées $\left(1;1;\frac{2}{5}\right)$.

1. Démontrer que I a pour coordonnées $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

2. a) Démontrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan (FIJ).

b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $-x+3y+5z-4=0$.

3. Soit d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par B.

a) Déterminer une représentation paramétrique de d.

b) On note M le point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ). Démontrer que $M\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7};\frac{5}{7}\right)$.

4. a) Calculer $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}$.

b) En déduire une valeur au degré près de l'angle $\widehat{MBF}$.

B ▶ J est quelconque : ses coordonnées sont (1 ; 1 ; a) où a est un réel entre 0 et 1.

1. Montrer que la section du cube par le plan (FIJ) est un parallélogramme.

2. On admet alors que $L\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le quadrilatère FKLJ est-il un losange ?

D'après Bac 2019

Travaux pratiques

30 min — Chercher, Raisonner

1 Étudier la position relative de deux plans

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations cartésiennes : $4x - 3y + 2z = 0$ et $-2x + y - 5z + 2 = 0$.
On cherche à étudier l'intersection de ces deux plans.

A ▶ Rechercher l'intersection

1. Donner un vecteur normal à chacun des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. En déduire qu'ils sont sécants.
2. Donner le système vérifié par les coordonnées des points communs aux deux plans, et le résoudre en cherchant d'abord à exprimer les inconnues x et y en fonction de z.
3. À quoi ce système correspond-il graphiquement ?
4. Donner les paramètres (un point et un vecteur) qui permettent de définir cet ensemble.
5. Vérifier que ce point appartient bien aux deux plans et que le vecteur est orthogonal aux deux vecteurs normaux aux deux plans.

B ▶ Rechercher un vecteur orthogonal à deux autres

On considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal aux deux vecteurs normaux.

1. Déterminer le système vérifié par les coordonnées de ce vecteur.
2. Expliquer pourquoi ce système admet une infinité de solutions.
3. Résoudre ce système en fixant par exemple l'inconnue c et en exprimant les inconnues a et b en fonction de c.
Les coordonnées des vecteurs cherchés s'expriment en fonction de c.
4. Que peut-on en déduire pour tous les vecteurs solutions du problème cherché ?
5. Comparer avec un vecteur directeur de la droite d'intersection. Quelle remarque peut-on faire ? Était-ce prévisible ?

30 min — Chercher, Communiquer

2 Autour de la sphère

A ▶ Équation

On considère la sphère S de centre A(– 1 ; 2 ; 1) et de rayon $R = 2$.
1. Rappeler la relation vérifiée par l'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de la sphère sous forme d'équation.
2. On donne maintenant l'équation $x^2 + y^2 + 2y + z^2 - 4z - 4 = 0$. En s'inspirant de la relation précédente, transformer cette équation pour l'écrire sous la même forme.
3. En déduire qu'il s'agit bien d'une sphère et en donner le centre et le rayon.

B ▶ Position de cette sphère avec un plan

1. Montrer que l'ensemble des points vérifiant l'équation : $x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 + 2z + 5 = 0$ est une sphère dont on précisera le centre B et le rayon r.
2. On donne le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. Vérifier que B n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ et déterminer les coordonnées de son projeté orthogonal H sur ce plan.
3. Calculer la distance BH et en déduire si la sphère et le plan se coupent ou non.

Remarque Quand un plan et une sphère se coupent leur intersection est un cercle de centre le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan.

4. Étudier si le plan $\mathscr{P}'$ d'équation $-2x + 2y + z + 2 = 0$ coupe la sphère ou non.
5. Que peut-on en déduire ?

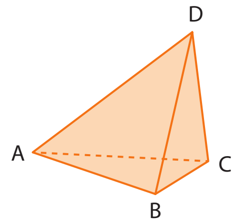
Remarque Quand un plan et une sphère se coupent en un seul point, on dit que le plan est tangent à la sphère.

20 min · Communiquer · Raisonner

3 Sphère circonscrite à un tétraèdre

A ▸ Cas général

On considère le tétraèdre ABCD et on cherche la sphère circonscrite au tétraèdre c'est-à-dire la sphère qui passe par les quatre sommets.



1. Construire le centre G du cercle circonscrit au triangle ABC. Ce point est équidistant des points A, B et C.

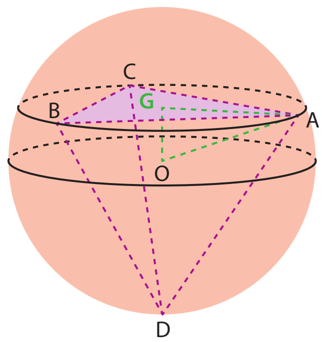
2. Démontrer que les points appartenant à la droite d perpendiculaire au plan (ABC) passant par G sont équidistants des points A, B et C.

3. On considère le plan médiateur du segment [AD], c'est-à-dire l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de D. Il est perpendiculaire au segment [AD] et passe par son milieu.

En déduire que le point d'intersection O de ce plan et de la droite *d* est équidistant des quatre sommets A, B, C et D et conclure.

B ▸ Cas de la Terre

Dans le cas où le tétraèdre est régulier, le centre du cercle circonscrit au tétraèdre est situé aux trois quarts de sa hauteur, qui correspond également au rayon de la sphère.



1. En déduire la distance GO en fonction du rayon R de la Terre.

2. Dans le triangle GOA rectangle en G, calculer l'angle $\widehat{GAO}$.

3. La latitude correspondant au plan (ABC) est l'angle que fait la droite (OA) avec le plan équatorial.

En déduire la latitude du plan (ABC).

20 min · Communiquer · Raisonner

4 Fonction scalaire de Leibniz

On définit la fonction scalaire *f* de Leibniz, la fonction qui à tout point M de l'espace associe le point *f*(M) défini par :

$f(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{MA}_i^2$ où $(\mathrm{A}_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de points pondérés.

A ▸ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

Montrer qu'alors : $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A}) + 2\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{f}(\mathrm{A})$ avec $\vec{f}$ fonction vectorielle de Leibniz et A un point quelconque.

B ▸ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Montrer qu'alors : $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{G}) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\mathrm{MG}^2$ où G est le barycentre du système de points pondérés $(\mathrm{A}_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

C ▸ Applications

1. On considère le système {(A , 1), (B , 2), (C , – 3)}.

a) Exprimer *f*(M) à l'aide du point A du système.

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que *f*(*M*) = k, selon que le vecteur $\vec{u} = \vec{f}(\mathrm{A})$ soit nul ou non.

2. On considère le système {(A , 3), (B , 2),(C , – 1)}.

a) Exprimer *f*(M) à l'aide du barycentre G du système {(A , 3), (B , 2), (C , – 1)}.

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que *f*(M) = *k* selon les valeurs de la constante *k*.