10

Produit scalaire et plans de l'espace

VIDÉO
Un parallèle particulier
lienmini.fr/maths-s10-01

Le site de Teotihuacan au Mexique se trouve dans une région remarquable du globe terrestre. À cette latitude, des phénomènes naturels importants se produisent.

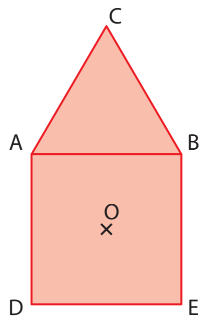
Quelle est la particularité mathématique de cette latitude ?

↪ TP 3 p. 333

Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s10-02
Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des produits scalaires dans le plan



On considère le triangle équilatéral ABC de côté 6 et ABED est un carré de centre O.
Calculer les produits scalaires suivants.

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OE}$
b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}$
c) $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OD}$
d) $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OE}$

2 Déterminer un vecteur normal à une droite

Pour chacune des droites suivantes, donner un vecteur normal.

a) $2x-3y+1=0$
b) $-3x+y-2=0$
c) $y=-4x+1$
d) $y=3+x$

3 Déterminer une équation cartésienne d'une droite

Déterminer une équation cartésienne de la droite dans chacun des cas suivants.

a) Droite passant par A(1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.
b) Droite passant par A(– 1 ; 0) et B(– 2 ; – 1).
c) Droite passant par A(– 2 ; 3) et perpendiculaire à la droite d'équation $3x+2y=0$.
d) Droite passant par l'origine et perpendiculaire à la droite d'équation $y=2x-3$.

4 Déterminer le projeté orthogonal sur une droite

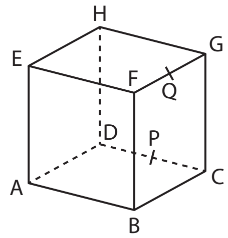
Dans chacun des cas, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite d donnée.

a) A(2 ; 1) et $d : -x+2y+2=0$
b) A(– 1 ; – 2) et $d : y=-3x-4$
c) A(1 ; – 1) et $d : -3x+2y+2=0$
d) A(0 ; 1) et $d : y=2x-5$

Activités

25 min

1 Découvrir le produit scalaire dans l'espace



On considère le cube ABCDEFGH de côté a et les points P et Q milieux respectifs des segments [CD] et [FG].

1. On souhaite calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ en fonction de a.

a) Justifier que les points A, D et H sont dans un même plan.

b) Dans ce plan, calculer le produit scalaire cherché.

2. En considérant que la valeur d'un produit scalaire dans l'espace est la même que la valeur du même produit scalaire dans le plan, répondre aux deux questions précédentes pour calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{PG}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}$.

3. On souhaite maintenant considérer le cas général des vecteurs dans l'espace.

a) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AQ}$.

b) En déduire une propriété du produit scalaire dans l'espace.

4. On s'intéresse aux propriétés de l'orthogonalité.

a) Développer, puis calculer le produit scalaire : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}) \cdot (\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF})$.

b) Que peut-on en déduire ?

5. On considère à présent l'angle entre les diagonales du cube.

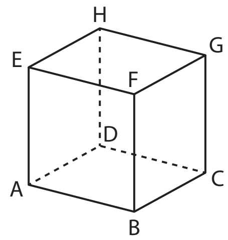
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$.

b) Déterminer une valeur approchée, en degré et arrondie à 0,01, de l'angle entre les deux diagonales (AG) et (BH).

↪ Cours 1 p. 310

10 min

2 Imaginer les équations de plans de l'espace



On considère un cube ABCDEFGH et le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

A ▸ Des plans particuliers du cube

1. Vérifier que les coordonnées des points A, B, C et D ont une relation commune.

Remarque Cette relation est l'équation du plan (ABC).

2. De même, donner les équations des plans constitués par les faces du cube.

3. Dans le plan (ABC) muni du repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner une équation cartésienne de la droite (BD).

4. Observer que les coordonnées des points F et H vérifient aussi cette relation.

Remarque Cette relation est donc une équation du plan (BDF).

B ▸ Étude du plan (AFH)

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AH}$.

2. Que peut-on en déduire à propos de la droite (CE) et du plan (AFH) ?

3. En déduire que toutes les droites (AM) où $M(x\,;y\,;z)$ est un point quelconque du plan (AFH) sont orthogonales à la droite (CE) et que le produit scalaire $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AM}$ est nul.

4. Traduire à l'aide des coordonnées que : $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Remarque L'équation obtenue s'appelle une équation cartésienne du plan (AFH).

↪ Cours 2 p. 312

20 min

3 Observer un projeté orthogonal dans l'espace

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A(– 1 ; 2 ; – 3).

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathcal{P}$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

3. Justifier que chercher les coordonnées du point d'intersection H entre la droite d et le plan $\mathcal{P}$ revient à résoudre le système : $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x = -1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -3 + 3k \end{cases}$

4. En substituant les trois dernières lignes du système précédent dans la première, on obtient une équation à une inconnue k, qu'il suffit ensuite de remplacer dans les trois dernières équations. Résoudre ce système et donner les coordonnées du point d'intersection H.

5. Donner les coordonnées de 3 points du plan $\mathcal{P}$.

6. Calculer les distances entre ces points et le point A.

7. Vérifier que la distance AH est la plus petite.

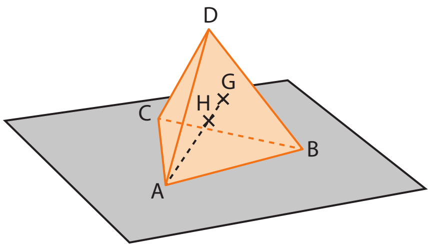
Remarque Le point H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

↪ Cours 2 p. 312

15 min

4 Manipuler le tétraèdre régulier

On considère un tétraèdre régulier ABCD, c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont la même longueur.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD, c'est-à-dire que : $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ et le point H est défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.



1. Démontrer que : $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$.

2. Démontrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

3. Que peut-on en déduire pour les arêtes opposées du tétraèdre régulier ?

4. Démontrer que : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, puis que : $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

5. Que peut-on en déduire sur la position relative de la « médiane » AG du tétraèdre par rapport à la face opposée BCD ?

Coup de pouce Dans un polyèdre, une médiane est unedroite passant par un sommet et le centre de gravité de la face opposée.

↪ Cours 2 p. 312

Cours

1 Produit scalaire dans l'espace

Définition Produit scalaire dans l'espace

Étant donné trois points non alignés A, B et C de l'espace, et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est défini de la même façon que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC).

Propriétés Différentes expressions du produit scalaire

- Avec le cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- Avec le projeté : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- Avec les coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- Avec les normes : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}^2\| + \|\vec{v}^2\| - \|\vec{u} - \vec{v}^2\|\right)$

Propriétés Opérations avec les vecteurs

- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Bilinéaire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- Identité remarquable : $\|\vec{u} + \vec{v}^2\| = \|\vec{u}^2\| + \|\vec{v}^2\| + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- Formules de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}^2\| - \|\vec{u}^2\| - \|\vec{v}^2\|\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}^2\| - \|\vec{u} - \vec{v}^2\|\right)$

Propriétés Orthogonalité ou perpendicularité vectorielle

- Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Elles ne sont donc pas sécantes car sinon on dit qu'elles sont perpendiculaires.
- Une droite et un plan sont orthogonaux si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs de base du plan.
- Deux plans sont perpendiculaires si deux vecteurs définissant l'un sont orthogonaux à deux vecteurs définissant l'autre.

Définition Base et repère orthonormés

Une base est dite orthonormée si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et si leurs normes sont égales.
Un repère est dit orthonormé si sa base est orthonormée.

Propriété Distance entre deux points de l'espace

Étant donné les points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère orthonormé alors la distance AB est donnée par la formule : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Démonstration

$AB = \sqrt{\left\|\overrightarrow{AB}^2\right\|} = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Exemple

Calculer la distance AB pour A(1 ; −2 ; −1) et B(−3 ; 1 ; −4).

$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-(-2))^2 + (-4-(-1))^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$.

EXOS
Méthodes
lienmini.fr/maths-s10-03
Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Calculer un produit scalaire

Énoncé

1. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\|=2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\|=3$ et $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=60°$. Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

3. Dans un cube ABCDEFGH d'arête 4, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}$.

Solution

1. 1 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times1+2\times2+(-1)\times4=3$

2. 2 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=2\sqrt{3}\times3\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$

3. 3 Le projeté du point G sur la droite (AC) est le point C

donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}=AC^2=16$.

Conseils & Méthodes

1 L'énoncé donne les coordonnées des vecteurs : on utilise donc la formule avec les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.

2 Avec les angles, on utilise la formule du cosinus pour calculer le produit scalaire.

3 Avec le cube, on utilise le projeté donc la formule de la projection.

À vous de jouer !

1 On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2 Dans un cube ABCDEFGH d'arête a, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$ en fonction de a.

↪ Exercices 22 à 27 p. 318

Méthode 2 Utiliser le produit scalaire pour calculer un angle ou une longueur

Énoncé

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$. Déterminer si ces deux vecteurs sont orthogonaux et dans le cas contraire donner une valeur de leur angle en degré, arrondi à 0,01 près.

Solution

$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times1+2\times2+(-1)\times4=3\neq0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux. 1

On utilise la relation : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ dans laquelle on calcule

d'abord les normes : 2 $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$

et par conséquent : $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}}=\frac{3}{7\sqrt{6}}$, donc : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\approx79{,}92°$.

Conseils & Méthodes

1 Savoir déduire de l'énoncé quelles formules on va utiliser.

2 Faire attention aux calculs des normes.

À vous de jouer !

3 On donne le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$ et l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60°$.
Déterminer la longueur AC.

4 On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Donner la valeur en degré, arrondie à 0,01 près, de l'angle qu'ils forment.

↪ Exercices 28 à 35 p. 318

Cours

2 Plans de l'espace

Définition **Vecteur normal**

Étant donné le plan (A , $\vec{u}$, $\vec{v}$), un vecteur $\vec{n}$ est dit vecteur normal au plan s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ou bien, si pour tout point M du plan les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarque Deux plans sont perpendiculaires si tout vecteur normal à l'un est orthogonal à tout vecteur normal de l'autre.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH les plans (ABC) et (ADE) sont perpendiculaires car un vecteur normal à (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{CG}$ et un vecteur normal à (ADE) est le vecteur $\overrightarrow{DC}$, or ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Propriété **Équation cartésienne d'un plan**

Le plan passant par le point A(x_A ; y_A ; z_A) et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne : $ax + by + cz + d = 0$.

Démonstration

Pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$ qui est bien de la forme annoncée.

Exemple

Donner de deux façons différentes l'équation cartésienne du plan passant par le point A(– 1 ; 2 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation est de la forme $2x - 3y + z + d = 0$ et le plan passe par le point A, d'où : $2(-1) - 3 \times 2 + 3 + d = 0$ ce qui donne l'équation $2x - 3y + z + 5 = 0$.
Ou bien $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x - (-1)) + (-3)(y - 2) + 1(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z + 5 = 0$.

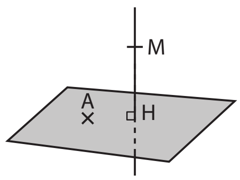
Remarque Un plan a une infinité d'équations cartésiennes et deux plans de l'espace sont soit confondus, soit parallèles, soit sécants selon une droite.

Définition **Projeté orthogonal d'un point**

Le projeté orthogonal d'un point sur une droite (ou un plan) est le point d'intersection de la droite (ou du plan) et de la perpendiculaire à cette droite (ou à ce plan) passant par le point donné.

Propriété **Distance d'un point à un plan**

On appelle distance d'un point M à un plan, la longueur MH où H est le projeté orthogonal de M sur le plan. Cette distance est la plus courte distance entre le point M et un point du plan.



Démonstration

Soit A un point quelconque du plan distinct de H. La droite (AH) est perpendiculaire à la droite (MH) car (MH) est orthogonale à toutes les droites du plan. Donc comme le triangle AHM est rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore : $AM^2 = AH^2 + HM^2$ et par conséquent : $AM > MH$.

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer une équation cartésienne d'un plan

Énoncé

On considère le point A(– 2 ; 3 ; 1) et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Solution

1 On sait à l'aide du vecteur normal qu'une équation cartésienne est de la forme : $-x + 2y + z + d = 0$. Le plan passe par le point A donc ses coordonnées vérifient l'équation, ce qui donne : $-(-2) + 2 \times 3 + 1 + d = 0$.

D'où $d = -9$ et une équation cartésienne du plan est : $-x + 2y + z - 9 = 0$.

2 On utilise qu'un point M appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$, ce qui donne :

$-1(x-(-2)) + 2(y-3) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + z - 9 = 0$

Conseils & Méthodes

1 Vérifier le lien entre les coefficients d'une équation de plan et le vecteur normal.

2 Le produit scalaire permet d'arriver à l'équation du plan.

À vous de jouer !

5 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par C(–2 ; 1 ; –3) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

6 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par G(1 ; 1 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$.

↪ Exercices 36 à 43 p. 319

Méthode 4 Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal sur un plan

Énoncé

1. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A(2 ; 1 ; 3) sur le plan d'équation cartésienne $x - 3y + 2z - 1 = 0$.

2. Déterminer la distance du point A au plan donné.

Solution

1. Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ 1 et $\begin{cases}x = 2+k\\ y = 1-3k\\ z = 3+2k\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite. 2 Le point d'intersection vérifie ces trois équations et celle du plan $\begin{cases}x = 2+k\\ y = 1-3k\\ z = 3+2k\\ x-3y+2z-1=0\end{cases}$

On remplace les trois premières dans la dernière pour trouver k soit

$(2+k) - 3(1-3k) + 2(3+2k) - 1 = 0$ d'où $k = -\dfrac{2}{7}$ et les coordonnées de H sont : $\left(\dfrac{12}{7} ; \dfrac{13}{7} ; \dfrac{17}{7}\right)$

2. 3 La distance entre le point et le plan est : $\text{AH} = \sqrt{\left(2-\dfrac{12}{7}\right)^2 + \left(1-\dfrac{13}{7}\right)^2 + \left(3-\dfrac{17}{7}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{49}+\dfrac{36}{49}+\dfrac{16}{49}} = \dfrac{\sqrt{56}}{7} = \dfrac{4\sqrt{14}}{7}$.

Conseils & Méthodes

1 Faire le lien entre vecteur normal et vecteur directeur.

2 Trouver les conditions à remplir par les coordonnées pour satisfaire l'appartenance à la fois à la droite et au plan.

3 Vérifier les calculs de distance entre deux points.

À vous de jouer !

7 Déterminer la distance entre C(1 ; 2 ; – 1) et le plan d'équation cartésienne : $2x - 3y + z - 1 = 0$.

8 Déterminer la distance entre B(– 1 ; 2 ; 1) et la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 2+3k\\ y = -1+k\\ z = -2k\end{cases}$

↪ Exercices 44 à 48 p. 319

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s10-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 5 Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace

Cours 1 p. 310

Énoncé

On considère les points A(– 7 ; – 15 ; 3), B(– 4 ; 20 ; – 1), C(4 ; 5 ; 30) et D(25 ; 0 ; 2).

1. Montrer que ABCD est un tétraèdre régulier.

2. Calculer sa hauteur.

3. En déduire son volume.

Conseils & Méthodes

1 Avec les coordonnées des points, on peut calculer des longueurs.

2 Exploiter les propriétés de la figure pour déduire les éléments de calcul.

3 Utiliser les propriétés des triangles remarquables.

Solution

1. 1 $AB = \sqrt{(-7-(-4))^2+(-15-20)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{9+1\,225+16} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(-7-4)^2+(-15-5)^2+(3-30)^2} = \sqrt{121+400+729} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

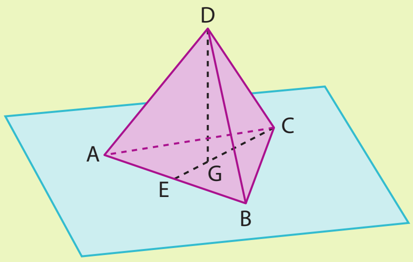
$AD = \sqrt{(-7-25)^2+(-15-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{1\,024+225+1} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(-4-4)^2+(20-5)^2+(-1-30)^2} = \sqrt{64+225+961} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-25)^2+(20+0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{841+400+9} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(4-25)^2+(5-0)^2+(30-2)^2} = \sqrt{441+25+784} = \sqrt{1\,250} = 25\sqrt{2}$

Toutes les arêtes ont la même longueur donc le tétraèdre est régulier.



2. 2 Le projeté orthogonal du sommet D du tétraèdre est le centre de gravité G du triangle ABC pris comme base, qui est équilatéral donc son centre de gravité est aux deux tiers sur une médiane (CE) à partir d'un sommet.

3 La médiane d'un triangle équilatéral est aussi hauteur donc à l'aide du théorème de Pythagore on trouve qu'elle mesure : $25\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc la distance du sommet au centre de la base est :

$$\frac{2}{3} \times 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pour trouver la hauteur du tétraèdre on utilise à nouveau le théorème de Pythagore ce qui donne :

$h^2 = (25\sqrt{2})^2 - \left(25\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (25\sqrt{2})^2\left(1 - \dfrac{3}{9}\right) = (25\sqrt{2})^2 \times \dfrac{6}{9}$ et donc : $h = 25\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

3. L'aire de la base est :

$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} \times 25\sqrt{2} \times 25\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le volume du tétraèdre est donc :

$V = \dfrac{1}{3} \times 25^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 25\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{25^3}{3}$.

À vous de jouer !

9 On considère les points I(2 ; – 2 ; – 4), J(2 ;– 2 ; 0), K(2 ; 2 ; – 4) et L(6 ;– 2 ; – 4).

1. Démontrer que le tétraèdre IJKL est trirectangle en I.
2. Calculer le volume de ce tétraèdre.

10 On donne les points A(2 ; 1 ; – 2), B(0 ; – 1 ; 3) et C(– 2 ; 3 ; 2).
Calculer les angles du triangle ABC, arrondis à 0,01 près, en degré.

Exercices 49 à 51 p. 320

Méthode 6 Déterminer une intersection de droites et de plans

↪ Cours 2 p. 312

Énoncé

On considère la droite d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-2k \\ y = 4k \\ z = -2+k \end{cases}$ où k est un réel et le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $3x - y + 2z - 3 = 0$.

1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.

2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Conseils & Méthodes

1 Savoir utiliser l'orthogonalité des vecteurs.

2 Remplacer les équations de la droite dans celle du plan pour trouver la valeur de k.

Solution

1. 1 $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite.

Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux car leur produit scalaire vaut : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -8$ donc la droite et le plan se coupent.

2. Les coordonnées du point d'intersection vérifient le système composé des trois équations de la droite et de celle du plan.

2 On résout le système de quatre équations à quatres inconnues, ce qui donne :
$3(1-2k) - (4k) + (-2+k) - 3 = 0 \Leftrightarrow k = -0{,}5$. Les coordonnées du point d'intersection sont donc $(2\ ;\ -2\ ;\ -2{,}5)$.

À vous de jouer !

11 On donne le plan d'équation $x + y - 2z = 0$ et la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2+2k \\ y = 1-k \\ z = k \end{cases}$

1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.
2. Donner les coordonnées de leur point d'intersection.

12 On donne le plan d'équation $-x + 3y - 4z + 1 = 0$ et la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1+3k \\ y = 1+2k \\ z = 3-k \end{cases}$

1. Justifier que la droite et le plan sont sécants.
2. Donner les coordonnées de leur point d'intersection.

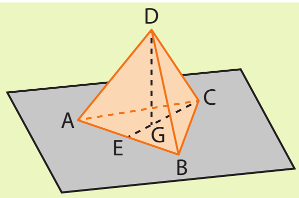
↪ Exercices 52 à 59 p. 320

Méthode 7 Étudier des problèmes de position relative dans l'espace

↪ Cours 2 p. 312

Énoncé

ABCD est un tétraèdre régulier, montrer que les arêtes opposées, par exemple (AB) et (CD), sont orthogonales.



Solution

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ or le tétraèdre étant régulier 1 toutes ses arêtes ont la même longueur et donc toutes ses faces sont des triangles équilatéraux. Par conséquent chacun des produits scalaires se calcule facilement par projection, ce qui donne :

2 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}CB^2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}BD^2$ d'où : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ et comme les droites ne sont pas coplanaires, 3 elles sont bien orthogonales.

Conseils & Méthodes

1 Connaître les propriétés des positions relatives dans l'espace.

2 Calculer des produits scalaires.

3 Connaître les propriétés d'orthogonalité dans l'espace.

À vous de jouer !

13 Dans un cube ABCDEFGH, **Démo**
démontrer que les droites (BH) et (EG) sont orthogonales.

14 On considère les points D(3 ; 2 ; 2), E(1 ; 1 ; 2), F(2 ; 0 ; – 1), M(– 3 ; 0 ; 1), N(– 1 ; 2 ; – 2) et P(3 ; 1 ; 1). Démontrer que les plans (DEF) et (MNP) sont sécants.

↪ Exercices 60 à 63 p. 321

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s10-05

ØLJEN
Les maths en finesse

La propriété à démontrer

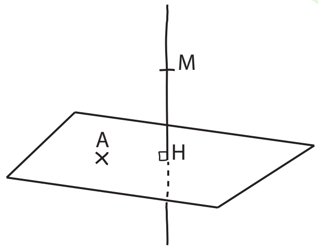
La distance la plus courte entre un point de l'espace et un plan est la distance entre ce point et son projeté orthogonal sur le plan.

On souhaite démontrer cette propriété en utilisant la propriété de position relative entre un plan et une droite et le théorème de Pythagore.

Comprendre avant de rédiger

Faire un schéma au brouillon pour visualiser la situation.

Utiliser les positions relatives dans l'espace et l'orthogonalité.

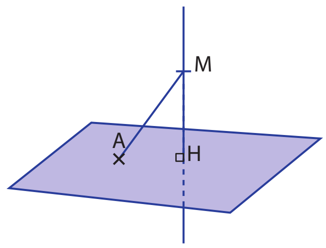


Rédiger

La démonstration rédigée

Étape 1
Faire une figure et la détailler.

On considère le plan $\mathscr{P}$, un point M de l'espace n'appartenant pas au plan et un point A appartenant au plan. On appelle H le projeté orthogonal du point M sur le plan $\mathscr{P}$.



Étape 2
Donner une propriété des droites perpendiculaire à un plan.

La droite (MH) est perpendiculaire au plan donc elle est orthogonale à toutes les droites du plan.

Étape 3
En déduire la position des deux droites.

Par conséquent elle est perpendiculaire à la droite (AH) qui est bien dans le plan.

Étape 4
Appliquer un théorème connu.

Le triangle AMH est rectangle en H
donc d'après le théorème de Pythagore : $AM^2 = AH^2 + MH^2$.

Étape 5
En déduire une inégalité.

Comme $AH \neq 0$ alors $AM > MH$ pour tout point A du plan.

Étape 6
Conclure.

Donc MH est bien la plus courte distance.

Pour s'entraîner

Démontrer que deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires entre elles.