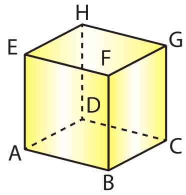
Exercices calculs et automatismes

26 Positions relatives de droites et de plans

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Dans un cube ABCDEFGH,



1. les droites (CD) et (EH) sont :

a sécantes.
b parallèles.
c non coplanaires.

2. la droite (AB) et le plan (CFH) sont :

a sécants.
b parallèles.
c tels que la droite est incluse dans le plan.

3. les plans (CFH) et (ABD) sont :

a sécants. b parallèles. c confondus.

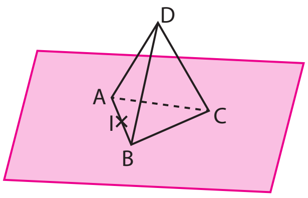
4. les plans (FCH) et (BDE) sont :

a sécants. b parallèles. c confondus.

27 Utiliser les bons symboles

On considère un tétraèdre ABCD et le point I milieu du segment [AB].

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Les corriger avec le bon symbole si elles sont fausses.



	V	F
1. $I \subset (AB)$	☐	☐
2. $B \notin (CDI)$	☐	☐
3. $(CI) \subset (ABC)$	☐	☐
4. $D \in (BI)$	☐	☐
5. $(DI) \not\subset (BCI)$	☐	☐
6. $B \in (ADI)$	☐	☐

28 Lecture d'un schéma

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Dans un cube ABCDEFGH, l'intersection des plans donnés est :

1. pour les plans (ABF) et (BCH):

a (AB) b (BE) c (BC).

2. pour les plans (EFG) et (ABC):

a (BF) b vide c (CE).

3. pour les plans (BDE) et (CFH):

a $\varnothing$ b (BH) c (CF).

29 Représentations paramétriques de droites (1)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour déterminer une représentation paramétrique d'une droite :

a Il faut trois points.
b Il faut un vecteur et un point.
c Il faut un vecteur et deux points.
d Il faut deux points.

30 Représentations paramétriques de droites (2)

On donne les droites d et d' avec leur représentations paramétriques respectives.

$$d\begin{cases}x=-1+3t\\y=2t\\z=3-t\end{cases} \quad \text{et} \quad d'\begin{cases}x=2+k\\y=-2+3k.\\z=1+k\end{cases}$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
1. La droite d passe par le point (3 ; 2 ; 3).	☐	☐
2. La droite d' passe par le point (3 ; 1 ; 2).	☐	☐
3. La droite d' a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.	☐	☐
4. La droite d a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix}$.	☐	☐

31 Colinéarité ou non ?

Les vecteurs donnés ci-dessous sont-ils colinéaires ou non ?

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{CD} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$ et $\overrightarrow{FG} = -\vec{u} + 2\vec{v}$.

3. $\overrightarrow{NG} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

4. $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$.

32 Propriété et réciproque Logique

Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
1. Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les points A, B, C et D sont alignés.	☐	☐
2. La propriété réciproque de la question **1.**	☐	☐

33 Vecteur directeur d'une droite

On considère la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases}x=-1+2k\\y=3+k\\z=-3k\end{cases}$

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Un vecteur directeur de la droite est :

a $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ b $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ c $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$ d

Exercices d'application

Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs

Méthode 1 p. 281

34 On considère un triangle ABC.
Construire le point Z tel que $\overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$.

35 On considère un parallélogramme DEFG.
Construire le point K tel que $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DF}$.

36 On considère le cube ABCDEFGH.
Construire le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

37 Dans le tétraèdre ABCD.
Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Caractériser des plans dans l'espace

Méthode 2 p. 281

38 On considère le tétraèdre ABCD, le point M appartenant à la face ABC et le point N sur la face ACD.
1. Donner une caractérisation du plan (CMN).
2. Justifier si le point A appartient ou non à ce plan.

39 Dans le cube ABCDEFGH, on place le point M milieu du segment [AB].
1. Donner une caractérisation du plan (CEM).
2. Justifier que le milieu N du segment [GH] appartient à ce plan.

40 Dans le cube ABCDEFGH, on place le point R milieu du segment [EH].
1. Démontrer que les points B, R et G définissent bien un plan.
2. En donner une caractérisation.
3. Démontrer que le milieu du segment [AE] appartient à ce plan.

Décrire des positions relatives dans l'espace sans coordonnées

Méthode 3 p. 283

41 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives des droites :
a) (CF) et (AE). **b)** (AC) et (DH).
c) (BF) et (AC). **d)** (AH) et (CD).

42 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives de la droite et du plan :
a) (AB) et (CDE). **b)** (CE) et (DGH).
c) (BF) et (DEG). **d)** (EG) et (ABC).

43 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives des plans :
a) (ABG) et (DEH). **b)** (ACH) et (BEG).
c) (ABE) et (FGH). **d)** (CEF) et (DGH).

Construire des sections dans l'espace

Méthode 4 p. 283

44 Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points M et N définis par les relations $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{FN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$.
Construire la section du plan (EMN) sur le cube.

45 Dans une pyramide SABCD à base carrée ABCD, on place les points P et Q milieux respectifs des segments [SD] et [AB].
Construire la section du plan (CPQ) sur la pyramide.
On justifiera toutes les étapes de la construction.

Décomposer des vecteurs

Méthode 5 et Méthode 6 p. 285

46 On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés et les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$$

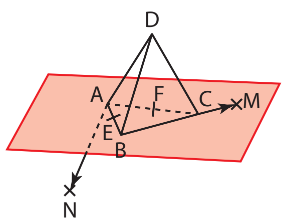
1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points C, M et N sont alignés.

47 Dans un triangle, on considère le point I milieu du segment [AC] et les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BC}$.
1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en déduire pour les droites (BI) et (MN) ?

48 Dans l'espace, on considère les points A, B, C, D et E et le réel k tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
Pour quelle valeur du réel k les points A, D et E sont-ils alignés ?

49 Dans un cube ABCDEFGH, les points J, M, P et Q sont les milieux des segments [BC], [EF], [GH] et [EH].
Dans chacun des cas décomposer le vecteur donné en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
a) $\overrightarrow{BH}$ **b)** $\overrightarrow{BP}$ **c)** $\overrightarrow{BQ}$ **d)** $\overrightarrow{GJ}$ **e)** $\overrightarrow{CE}$ **f)** $\overrightarrow{AM}$

50 Dans un tétraèdre ABCD, on considère les points E et F milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et on construit les points M et N tels que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DE}$.



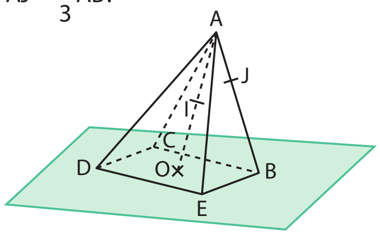
1. Déterminer la nature des quadrilatères MCEF et ADEN.
2. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DN}$?

51 On considère un cube ABCDEFGH et les milieux I et J des segments [BE] et [FG].

1. Montrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{EF}$.

2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne forment pas une base de l'espace.

52 On considère une pyramide ABCDE de base le parallélogramme BCDE. Le point O est le centre du parallélogramme, le point I est le milieu du segment [AO] et le point J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



1. Justifier les relations suivantes
$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE}$, $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$.

2. En déduire que la droite (IJ) passe par le point D.

Déterminer des vecteurs formant une base

Méthode 7 p. 287

53 On considère un cube ABCDEFGH.

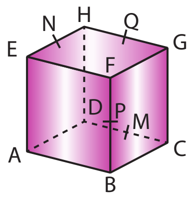
1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne forment pas une base de l'espace.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{FH}$ forment une base de l'espace.

54 On considère un cube ABCDEFGH et les milieux M, N, P et Q respectivement des segments [CD], [EH], [BF] et [GH].

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne forment pas une base de l'espace.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CE}$ forment une base de l'espace.



55 On considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace.

On pose : $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

56 On considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace.

On pose, $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

57 On considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace.

On pose $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 2\vec{j} + \vec{k}$.

1. Calculer le vecteur $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

2. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

58 On considère trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace. On pose :

$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2. Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$?

3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Repérage dans l'espace

59 On considère un cube ABCDEFGH et les milieux M, N, P et Q respectivement des segments [CD], [EH], [BF] et [GH]. Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a) $\overrightarrow{AF}$ **b)** $\overrightarrow{AQ}$ **c)** $\overrightarrow{MP}$

d) $\overrightarrow{CN}$ **e)** $\overrightarrow{EM}$ **f)** $\overrightarrow{NQ}$

60 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants A(1 ; – 2 ; 3), B(–1 ; 2 ; 0), C(3 ; 1 ; – 2), D(0 ; – 1 ; 1) et E(2 ; 0 ; – 1). Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{BC}$

c) $\vec{w} = -2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EA}$ **d)** $\vec{t} = 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DC}$

61 Dans l'espace muni d'un repère d'origine O, on donne les points suivants A(2 ; 0 ; – 1), B(1 ; – 4 ; 8) et C(7 ; – 12 ; 22). Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ forment une base de l'espace.

62 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants A(0 ; 1 ; – 1), B(2 ; 1 ; 0), C(– 3 ; – 1 ; 1) et D(7 ; 3 ; – 1). Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace.

63 Dans l'espace muni d'un repère on donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ou non ? Justifier.

64 Dans l'espace muni d'un repère on donne les vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -18 \end{pmatrix}$.

Peut-on trouver deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$?

Exercices d'application

Déterminer des positions relatives dans l'espace avec des coordonnées

Méthode 9 p.288 Méthode 10 p. 289

65 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : A(–1 ; 0 ; 3), B(7 ; 1 ; 3), C(3 ; –1 ; 5) et D(1 ; 1 ; 2).
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

66 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants :
A(–1 ; 0 ; 5), B(2 ; 1 ; 3), C(1 ; 1 ; 1), D(4 ; – 2 ; 1) et E(1 ; 0 ; 1).
1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la position de la droite (DE) et du plan (ABC).

67 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants A(2 ; 1 ; 5), B(4 ; 2 ; 4), C(3 ; 3 ; 5) et D(0 ; 3 ; 7).
1. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
2. Déterminer si le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. En déduire la position relative des droites (AB) et (CD).

68 Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants :
A(1 ; 2 ; – 3), B(– 1 ; 0 ; 2), C(2 ; – 1 ; 1) , D(– 3 ; 2 ; 1), E(1 ; 0 ; 1) et F(0 ; 1 ; – 1).
Déterminer si les plans (ABC) et (DEF) sont parallèles ou sécants.

69 Dans l'espace muni d'un repère, on donne le point A(0 ; 2 ; –1) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}$.
1. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$.
2. En déduire la position relative entre le plan défini par le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et le plan défini par l'origine O et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

70 Déterminer la position relative entre la droite définie par le point A(–2 ; 5 ; –3) et le vecteur directeur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et le plan défini par l'origine O et les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Déterminer des représentations paramétriques de droites

Méthode 8 p. 287

71 On donne le point A(1 ; – 2 ; – 1) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Montrer que le point B(0 ; – 1 ; 1) appartient à cette droite.
3. Le point C(1 ; 2 ; 3) appartient-il à cette droite ?

72 Déterminer les éléments caractéristiques (un point et un vecteur directeur) des droites suivantes.

a) $\begin{cases} x = -2k \\ y = -1 + k \\ z = -3 - 4k \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -2 - k \\ y = -3k \\ z = -4 - k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -k + 3 \\ y = k + 1 \\ z = -4k \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = 2 - k \end{cases}$

73 Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants.
a) A(1 ; 0 ; – 2) et B(0 ; – 1 ; 1).
b) A(– 3 ; 1 ; 2) et B(– 1 ; 0 ; – 1).
c) A(– 2 ; 1 ; 1) et B(– 1 ; – 1 ; – 1).
d) A(2 ; 0 ; 2) et B(0 ; 1 ; 1).

74 On considère la droite d dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 2k \\ z = -3k \end{cases}$

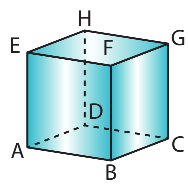
Dire si les points suivants appartiennent ou non à la droite d.
a) A(2 ; – 1 ; – 3)
b) B(3 ; 1 ; – 3)
c) C(1 ; – 3 ; 3)
d) D(0 ; – 3 ; 6)

75 On considère les points A(– 1; 2; – 3) et B(2 ; 0 ; 1).
1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. On veut vérifier que le point C(5 ; – 2;5) appartient à la droite (AB), de deux manières différentes :
a) à l'aide de la colinéarité de vecteurs.
b) à l'aide de la représentation paramétrique de la droite.
3. Donner alors une autre représentation paramétrique de la droite (AB) à partir du point C.

76 On donne les points M(– 4 ; 1 ; 2) et N(– 1 ; 2 ; 5).
Donner une représentation paramétrique de chacun des objets géométriques suivants.
a) La droite (MN).
b) Le segment [MN].
c) La demi-droite [MN).

77 Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donner une représentation paramétrique de chacune des droites correspondant aux axes de coordonnées.

78 Dans un cube ABCDEFGH, on considère le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Déterminer les équations des droites suivantes.
a) (CE)
b) (FH)
c) (BG)



Des vecteurs dans tous les sens

79 Dans le cube ABCDEFGH, déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BG}$ forment ou non une base de l'espace.

80 On considère un cube ABCDEFGH et les points P et Q définis par $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{EQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EG}$.

1. Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AQ}$ en fonction des deux mêmes vecteurs.

3. Que peut-on en déduire pour les points A, P et Q ?

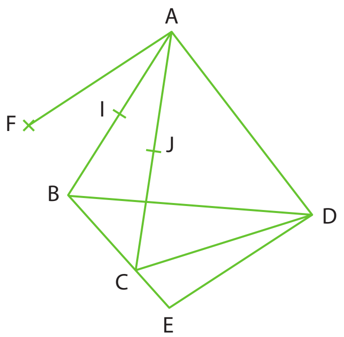
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{PC}$ ne forment pas une base de l'espace.

5. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{QC}$ forment une base de l'espace.

81 On donne les points $A(1\,;0\,;2)$, $B\left(2\,;1\,;\frac{3}{2}\right)$, $C(-1\,;3\,;2)$ et $D(-1\,;-7\,;4)$.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne forment pas une base de l'espace.

82 On considère un tétraèdre ABCD et les points I et J milieux des segments [AB] et [AC].



Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$.

1. Préciser la nature des quadrilatères ECIJ et ADEF.

2. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DF} - 2\overrightarrow{DJ}$.

3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{DF}$?

4. Que peut-on en déduire pour les points D, F, I et J ?

83 On considère un cube ABCDEFGH et les points milieux I, J et K des segments [AD], [BC] et [FG].

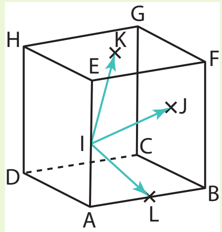
1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{HJ}$ dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DC}\,,\overrightarrow{DH})$.

2. Existe-t-il deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$?

3. Que peut-on en conclure ?

84 Démo

Soit un cube ABCDEFGH et les milieux I, J, K et L respectifs des segments [AE], [BG], [EG] et [AB]. On veut démontrer par deux méthodes que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne forment pas une base de l'espace.



A ▶ Avec les vecteurs

1. Démontrer vectoriellement que le milieu M du segment [IJ] est aussi le milieu du segment [KL].

2. En déduire le résultat cherché.

B ▶ Avec les coordonnées

1. Donner les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$.

3. En déduire le résultat cherché.

85 Dans un tétraèdre ABCD, les points I et J sont les milieux des segments [BC] et [AD], le point G est le centre de gravité du triangle BCD et le vecteur $\vec{u}$ est défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

On se propose de démontrer par deux méthodes que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ne forment pas une base de l'espace.

A ▶ Sans repère

1. Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

2. Démontrer que $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

3. Conclure.

B ▶ Avec le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD})$

1. Donner les coordonnées des points I, J et G.

2. En déduire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

3. Conclure.

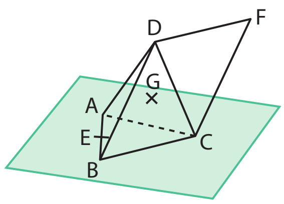
86 On considère un cube ABCDEFGH et on cherche à construire le point M tel que :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MH} = \vec{0}$.

1. Dans un parallélogramme PQRS, rappeler pourquoi $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PS}$.

2. En regroupant les vecteurs dans la relation initiale, montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AG}$.

87 On considère un tétraèdre ABCD et E le milieu du segment [AB]. On place le point F tel que BCFD soit un parallélogramme et le point G centre de gravité du triangle ACD.



Coup de pouce $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FD}$.

2. Démontrer que $\overrightarrow{GF} + 2\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

3. En déduire que les points E, F et G sont alignés et préciser la position du point G sur la droite (EF).

Exercices d'entraînement

D'autres représentations d'une droite

88 Montrer que les deux droites d et d' données par les représentations paramétriques suivantes sont confondues.

a) $d\begin{cases}x=-1+5k\\y=-3-k\\z=-4k\end{cases}$ et $d'\begin{cases}x=9+5k'\\y=-5-k'\\z=-8-4k'\end{cases}$ où k et k' sont réels

b) $d\begin{cases}x=-2k\\y=2-4k\\z=-3+2k\end{cases}$ et $d'\begin{cases}x=-2+k'\\y=-2+2k'\\z=-1-k'\end{cases}$ où k et k' sont réels

89 Montrer que le système suivant définit une droite et en donner une représentation paramétrique.

$\begin{cases}x+y+z=1\\-x+y-z=-1\end{cases}$.

Des intersections de droites

90 On considère les droites d et d' données par leurs représentations paramétriques suivantes.

$d\begin{cases}x=1-2k\\y=3+4k\\z=-5+6k\end{cases}$ et $d'\begin{cases}x=-5+t\\y=15-2t\\z=13+3t\end{cases}$ où k et t sont réels.

Déterminer quelle est leur position relative.

91 On considère les droites d et d' données par les représentations paramétriques suivantes.

$d\begin{cases}x=1-2k\\y=-k\\z=-1+k\end{cases}$ et $d'\begin{cases}x=3+h\\y=2-h\\z=2h\end{cases}$ où k et h sont réels.

1. Démontrer que les droites d et d' ne sont pas parallèles.
2. Donner deux points A et B de la droite d.
3. Donner deux points C et D de la droite d'.
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace.
5. En déduire la position relative des deux droites.

92 On donne les points F(1 ; –1 ; 2) et G(4 ; 5 ; –3) et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-4+k\\y=-11+2k\\z=-1-k\end{cases}$ où k est un réel.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
2. Justifier que les droites d et (FG) ne sont pas parallèles.
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

93 On considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 2) et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d′ passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$.
3. Le point M(6 ; –8 ; –2) appartient-il aux droites d et d' ?
4. Déterminer la position relative des deux droites.

94 On considère les droites d_1, d_2, et d_3 données par leur représentation paramétriques suivantes.

$d_1\begin{cases}x=-k_1\\y=3+k_1\\z=1+2k_1\end{cases}$ $d_2\begin{cases}x=3+3k_2\\y=-3k_2\\z=-3-4k_2\end{cases}$ et $d_3\begin{cases}x=-2+4k_3\\y=1+4k_3\\z=1\end{cases}$

où k_1, k_2 et k_3 sont réels.

1. Montrer que ces trois droites sont concourantes en un même point que l'on déterminera.
2. Ces trois droites sont-elles coplanaires ? Justifier.

95 On donne deux droites d_1 et d_2 dont les représentations paramétriques sont :

$d_1\begin{cases}x=2+k_1\\y=1-k_1\\z=5+2k_1\end{cases}$ et $d_2\begin{cases}x=3+3k_2\\y=3+2k_2\\z=1-k_2\end{cases}$ où k_1 et k_2 sont réels.

1. Montrer que les deux droites ne sont pas coplanaires.
2. Donner un point et un vecteur directeur d'une droite d_3 qui est parallèle à d_1 et sécante à d_2.
3. Donner alors une représentation paramétrique de cette droite d_2.

96 Montrer que les deux droites d et d' données par les représentations paramétriques suivantes ne sont pas coplanaires :

$d\begin{cases}x=-2+k\\y=1+k\\z=4+3k\end{cases}$ et $d'\begin{cases}x=k'\\y=-2k'\\z=8+3k'\end{cases}$ où k et k' sont réels.

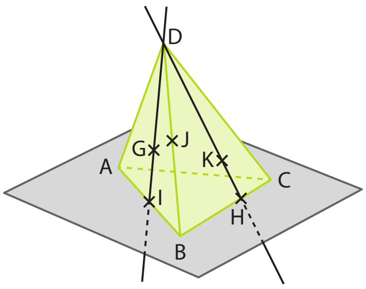
97 On considère les points G(1 ; 2 ; –4) et K(–3 ; 4 ; 1) et la droite d dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=-7-4k\\y=6+2k\\z=6+5k\end{cases}$ où k est un réel.

Déterminer la position relative des droites d et (GK).

98 Dans un cube ABCDEFGH d'arête 1, on place le point I milieu du segment [AE].
On munit l'espace du repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).
1. Donner une représentation paramétrique de la droite (GI).
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (GI) avec le plan (ABC).

Avec des vecteurs ou avec des droites

99 ABCD est un tétraèdre. Le point I est le milieu du segment [AC], le point G est le centre de gravité du triangle BCD et le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



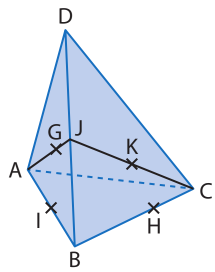
On considère le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (GI).

2. Montrer que les points I, J et G sont alignés.

3. Le point $E\left(\frac{2}{3}\,;0\,;0\right)$ appartient-il à la droite (GI) ?

100 On considère un tétraèdre ABCD, les points I, J et K milieux respectifs des segments [AB], [BD] et [CJ] et les points G et H définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.



1. Déterminer les coordonnées des points de la figure dans le repère $(B\,;\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$.

2. a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{IK} = a\overrightarrow{IG} + b\overrightarrow{IH}$.

b) Que peut-on en déduire pour les points G, H, I et K ?

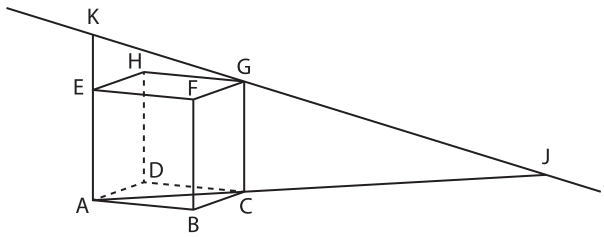
3. a) Déterminer les représentations paramétriques des droites (IG) et (HK).

b) Déterminer leur position relative.

c) Que peut-on en déduire ?

101 On considère un cube ABCDEFGH et les points J et K de l'espace définis par :

$$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$$



1. a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que les points J, K et G sont alignés.

2. a) Déterminer les coordonnées des points J et K dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (JK).

c) Vérifier que le point G appartient à (JK).

102 On considère un tétraèdre ABCD et les points M, N et P définis par :

- $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.

1. Construire la figure.

2. a) Démontrer que :

$$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

b) Exprimer de même le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) En déduire que les points M, N et P sont alignés.

3. a) Donner les coordonnées des points M, N et P dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

b) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN).

c) Vérifier que le point P appartient à (MN).

Travailler le Grand Oral

103 On considère un plan défini par un point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$ non colinéaires.

Quelle serait une représentation paramétrique de ce plan ?

104 Dans l'étude des cristaux, on rencontre des solides qui ont différentes formes possibles.

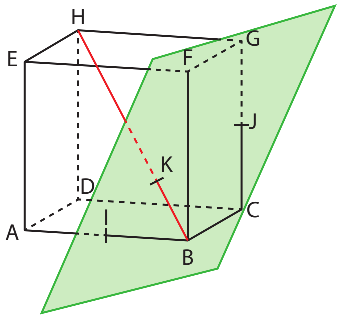
1. Quelles sont-elles ?

2. Construire un rhomboèdre.

Exercices bilan

105 Une position

On considère le cube ABCDEFGH et les points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [CG]. On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer si les droites (BH) et (IJ) sont sécantes ou non.

2. On note K le point d'intersection du plan (FIJ) et de la droite (BH).

a) Justifier qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{FK} = a\overrightarrow{FI} + b\overrightarrow{FJ}$.

b) En déduire que les coordonnées du point K sont K $\left(1-\frac{a}{2}\,;b\,;1-a-\frac{b}{2}\right)$.

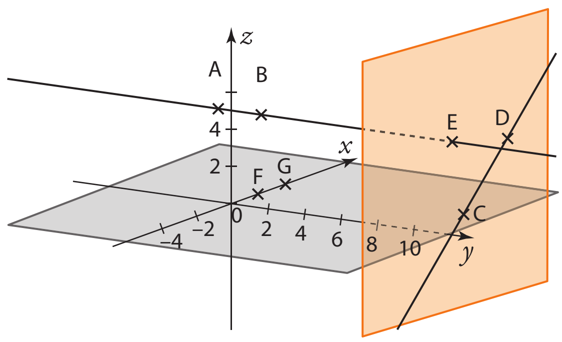
c) Donner une représentation paramétrique de la droite (BH), puis en déduire les coordonnées du point K.

3. a) Justifier que les droites (FK) et (IJ) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection L.

b) Déterminer la position du point L sur le segment [IJ].

106 Distance minimale

Dans un repère $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; – 1 ; 5), B(2 ; – 1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1) et D(11 ; 4 ; 4). Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde, et un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la même vitesse. On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes.



1. Montrer que les coordonnées des points M_t et N_t en fonction de t sont $M_t\,(t\,;–1\,;5)$ et $N_t\,(11\,;0{,}8t\,;1+0{,}6t)$.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point C et dirigé par les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

a) Montrer que la droite (CD) est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

b) Soit E(11 ; – 1 ; 5).

Déterminer deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CE} = a\vec{j} + b\vec{k}$.

c) Vérifier que la droite (AB) coupe le plan $\mathscr{P}$ en E.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

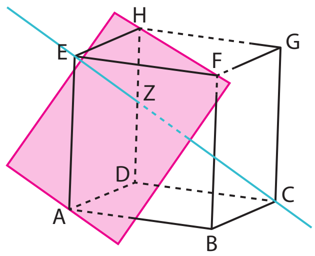
3. a) Montrer que :

$$M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$$

b) À quel instant la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

107 Dans le cube

Dans le cube ABCDEFGH, on note Z le point d'intersection du plan (AFH) et de la droite (CE). On se place dans le repère $(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,,\,\overrightarrow{DC}\,,\,\overrightarrow{DH})$.



1. Justifier qu'il existe deux a et b tels que :
$\overrightarrow{AZ} = a\overrightarrow{AF} + b\overrightarrow{AH}$.

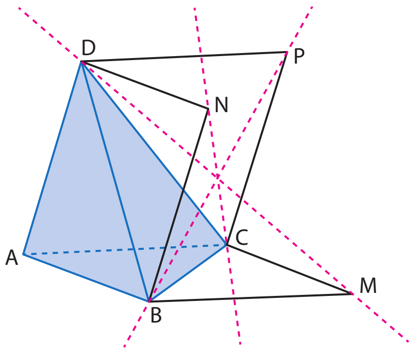
2. Donner les coordonnées du point Z en fonction de a et b.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CE).

4. Calculer alors les coordonnées du point Z.

108 Droites concourantes

On considère le tétraèdre ABCD et les points M, N et P tels que les quadrilatères ABMC, ABND et ACPD sont des parallélogrammes.



On cherche à démontrer que les droites (DM), (CN) et (BP) sont concourantes.

On se place dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}\,,\,\overrightarrow{AD})$.

1. Calculer les coordonnées des points M, N et P.

2. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (DM), (CN) et (BP).

3. En déduire que ces droites sont concourantes en un point Q dont on donnera les coordonnées.

109 Une section

Dans le cube ABCDEFGH, on place les points M et N milieux respectifs des segments [EH] et [CF].

Le point P est défini par $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point Q. Le construire.

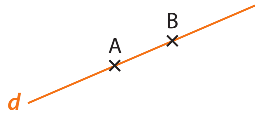
2. De même, justifier que les droites (CG) et (NQ) sont sécantes en un point R, et que les droites (BF) et (NQ) sont sécantes en un point S.

3. En déduire la construction de la section du cube par le plan (MNP).

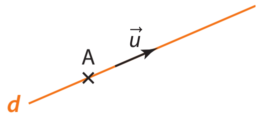
Droite de l'espace

Une droite est définie :

- soit par deux points distincts A et B,



- soit par un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$.



Positions relatives de droites et de plans

- **Positions de deux droites d et d'**
  - soit coplanaires (soit sécantes, soit parallèles, soit confondues),
  - soit non coplanaires.
- **Positions d'une droite d et un plan $\mathcal{P}$**
  - soit strictement parallèles ,
  - soit d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$,
  - soit d et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point M,
- **Positions de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$**
  - soit strictement parallèles,
  - soit confondus,
  - soit sécants en une droite d.

Représentation paramétrique d'une droite

d passe par A$(x_A ; y_A ; z_A)$ et a comme vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

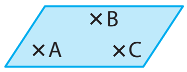
M (x , y) appartient à d

si $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ avec k réel.

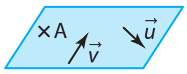
Plan de l'espace

Un plan est défini :

- soit par trois points non alignés A, B et C,



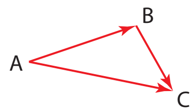
- soit par un point A, et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Relation de Chasles

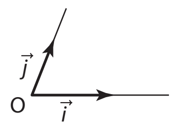
A , B et C sont trois points distincts tels que :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



Base, repère et coordonnées

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ avec α et β réels.
- Un **repère** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé :
  - d'une **origine** O
  - et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ non combinaison linéaire les uns des autres.



- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec x, y et z réels.

- Si A(x_A , y_A , z_A) et B(x_B , y_B , z_B) alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de…	Méthodes	Parcours d'exercices
Représenter des combinaisons linéaires et caractériser des plans dans l'espace Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans	Méthode 1, Méthode 2, Méthode 3	1, 2, 3, 4, 5, 6, 34, 35, 38, 39, 41, 42
Construire la section d'un solide par un plan dans l'espace	Méthode 4	7, 8, 44, 45
Exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs Décomposer un vecteur dans une base par lecture graphique et déterminer une base ou un repère du plan ou de l'espace par le calcul	Méthode 5, Méthode 6, Méthode 7	9, 10, 12, 13, 14, 15, 46, 47, 53, 54
Déterminer une représentation paramétrique d'une droite	Méthode 8	16, 17, 71, 72

EXOS QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s09-05

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
110 Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}$ est colinéaire avec le vecteur :	$\vec{v_1}\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$	$\vec{v_2}\begin{pmatrix}3\\-4{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$	$\vec{v_3}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$	$\vec{v_4}\begin{pmatrix}-2{,}4\\3{,}6\\-1{,}2\end{pmatrix}$
111 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\17\\-17\end{pmatrix}$ alors :	$\vec{v} = 1{,}5\vec{u} + 0{,}5\vec{w}$	$\vec{w} = -3\vec{u} + \vec{v}$	$3\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$	ils forment une base
112 Soit la représentation paramétrique de la droite d donnée par $\begin{cases}x = -3 + 4k\\y = 5k\\z = 2 - k\end{cases}$ avec k réel.	A$(-3\,;5\,;2)$ appartient à la droite d	B$(1\,;5\,;1)$ appartient à la droite d	$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d	$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d
113 On donne les points A(1 ; 2 ; 1), B(1 ; 1 ; 1) et C(3 ; –1 ; 3). La parallèle à la droite (BC) passant par A a pour représentation paramétrique :	$\begin{cases}x = 1 + k\\y = 2 - k\\z = 1 + k\end{cases}$	$\begin{cases}x = -2 - 2k\\y = 5 + 2k\\z = -2 - 2k\end{cases}$	$\begin{cases}x = 1 + k\\y = -2 + 2k\\z = 1 + k\end{cases}$	$\begin{cases}x = 1 + 2k\\y = 1 - 2k\\z = 1 + 2k\end{cases}$

Pour les exercices 114 à 116 on considère un cube ABCDEFGH muni du repère $(B\,;\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF})$.

	A	B	C	D
114 Les coordonnées du milieu de [DF] sont :	(0,5 ; –0,5 ; 0,5)	(0,5 ; –0,5 ; –0,5)	(–0,5 ; –0,5 ; 0,5)	(0,5 ; 0,5 ; 0,5)
115 Les coordonnées du milieu de [AH] sont :	(1 ; 0,5 ; 0,5)	(0 ; –0,5 ; –0,5)	(0 ; –0,5 ; –0,5)	(1 ; –0,5 ; –0,5)
116 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont :	$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

117 Inclusion

On considère les points A(0 ; 1 ; 0), B(0 ; 0 ; – 1) et C(1 ; 0 ; 2), ainsi que la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2k \\ z = 2 - k \end{cases}$

1. Vérifier que le point C appartient à la droite.

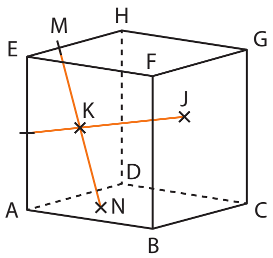
2. Vérifier que le point D(0 ; 2 ; 1) appartient aussi à la droite.

3. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

4. En déduire que la droite d est incluse dans le plan (ABC).

Méthode 3 p. 283

118 Alignement



Dans un cube ABCDEFGH, le point I est le milieu du segment [AE], le point J le centre du carré CDHG et les points M et N sont définis par $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et de plus K est le milieu du segment [MN].

1. Donner les coordonnées des points I et J dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

3. Calculer les coordonnées des points M, N et K.

4. Démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Méthode 5 p. 285 Méthode 8 p. 287

119 Encore une intersection

Dans un cube ABCDEFGH, on place les points M, N et P tels que M est le milieu du segment [BC], $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$.

On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD), ainsi que de la droite (MN).

2. Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (AD) et (MN).

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (PL).

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K des droites (PL) et (DH).

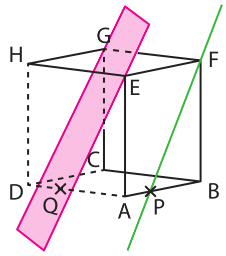
5. Justifier que la droite (KL) est la droite d'intersection des plans (MNP) et (EFG).

6. En donner une représentation paramétrique.

Méthode 3 p. 283 Méthode 8 p. 287 Méthode 9 p. 288 Méthode 10 p. 289

120 Parallélisme

Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points P et Q tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EQ}$ et $\overrightarrow{PF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EQ}$ et $\overrightarrow{PF}$ ne forment pas une base de l'espace.

3. En déduire la position relative de la droite (PF) et du plan (EGQ).

Méthode 5 p. 285 Méthode 6 p. 285

121 Vrai-Faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans tous les cas donner une démonstration de la réponse choisie.
En cas de réponse fausse démontrer avec un contre-exemple, éventuellement sous forme d'une figure

	V	F
1. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$, alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$.	☐	☐
2. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$, alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont tels que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$.	☐	☐
3. Si $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \varnothing$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \varnothing$, alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \varnothing$.	☐	☐
4. Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts et d une droite de l'espace vérifiant $\mathcal{P}_1 \cap d \neq \varnothing$ et $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$, alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2 \cap d \neq \varnothing$.	☐	☐

Méthode 3 p. 283

Coup de pouce On rappelle les notations suivantes
- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$.
- L'écriture $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \varnothing$ signifie que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont aucun point commun.

Exercices vers le supérieur

122 Lieu

On donne les représentations paramétriques de deux droites d et d' suivantes.

$$d\begin{cases}x=4-3k\\y=5-8k\\z=7-k\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=2+k'\\y=3-2k'\\z=5-k'\end{cases} \text{ où } k \text{ et } k' \text{ sont réels.}$$

On considère un point A sur la droite d et un point A′ sur la droite d'.

1. Donner les coordonnées du milieu L du segment [AA′] en fonction de k et de k'.

2. On donne le point K(3 ; 4 ; 6) et les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{KL}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne forment pas une base de l'espace.

3. En déduire le lieu du point L quand A et A′ varient sur les deux droites.

123 Trafic aérien

On modélise une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites d et d' de l'espace.

On utilise un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ et le plan $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ représente le sol. Les représentations paramétriques des deux droites sont :

$$d\begin{cases}x=3+k\\y=9+3k\\z=2\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=0{,}5+2k'\\y=4+k'\\z=4-k'\end{cases} \quad \text{où } k \text{ et } k' \text{ sont réels.}$$

1. Démontrer que les deux droites ne sont pas coplanaires.

2. On veut installer, au sommet S(3 ; 4 ; 0,1) de la tour, un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par la droite Δ. On appelle $\mathcal{P}_1$ le plan contenant le point S et la droite d, et $\mathcal{P}_2$ le plan contenant le point S et la droite d'.

a) Montrer que d' est sécante au plan $\mathcal{P}_1$.

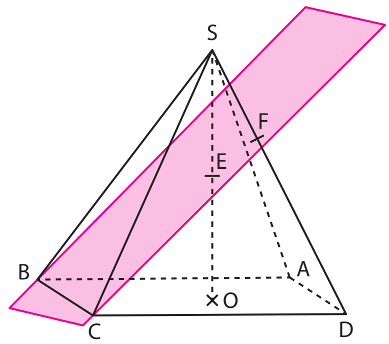
b) Montrer que d est sécante au plan $\mathcal{P}_2$.

3. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de la droite Δ pour qu'elle coupe chacune des deux droites d et d'.

Cette affirmation est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

124 Position et section

La pyramide SABCD a pour base le carré ABCD de centre O. Le point E est le milieu du segment [SO] et le point F est défini par $\overrightarrow{SF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.



1. Justifier que les points S, B, D, O, E et F appartiennent à un même plan.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{SB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.

b) Démontrer que $\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.

c) En déduire que les points B, E et F sont alignés.

3. a) Étudier la position relative du plan (BEC) avec les plans (ABC) et (SCD).

b) Étudier la position relative des plans (BEC) et (SAD).

c) Construire la section du plan (BEC) sur la pyramide SABCD.

125 Paramètre

MPSI et PCSI

On donne trois points A, B et C non alignés de l'espace. À tout réel t différent de -1, on associe le point M_t défini par $\overrightarrow{AM_t}=\frac{1+2t}{1+t}\overrightarrow{AB}+\frac{1-t}{1+t}\overrightarrow{AC}$.

1. Étudier les points associés aux valeurs 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ du paramètre t.

2. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1+2t}{1+t}=a+b\frac{1-t}{1+t}$$

3. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DM_t}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(t)=\frac{1-t}{1+t}$ et en déduire l'ensemble des valeurs prises par $\frac{1-t}{1+t}$ quand t varie.

5. En déduire l'ensemble des points M_t.

126 Système particulier

MPSI et PCSI

Montrer que le système suivant définit une droite et en donner une représentation paramétrique.

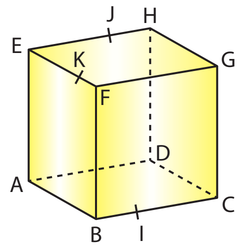
$$\begin{cases}(b^2+c^2)x-aby-acz=0\\(b+c)x-ay-az=0\end{cases}$$

où a, b et c sont trois réels non nuls avec $b\neq c$

127 Section

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère les points I : $\left(1\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$, J$\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$, K$\left(\frac{3}{4}\,;0\,;1\right)$ et L$(a\,;1\,;0)$ où $a \in [0\,;1]$.



A ▶ 1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{3}{4} + k\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

4. En déduire les coordonnées du point L.

B ▶ 1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. Construire sur la figure, le point M intersection du plan (IJK) et de la droite (BF).

3. De même construire le point N intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

4. En déduire la section du plan (IJK) sur le cube.

128 Représentations paramétriques

On considère les droites d et d' de représentations paramétriques suivantes.

$$d \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - k \\ z = 4 - 3k \end{cases} \quad \text{et } d' \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 4t \\ z = 1 \end{cases} \text{ où } k \text{ et } t \text{ sont réels}$$

1. Montrer que les droites sont sécantes en un point A dont on donnera les coordonnées.

2. Justifier que le point B(3 ; –7 ; 2) n'appartient pas au plan défini par les deux droites d et d'.

3. À tout point M de la droite d', on associe la fonction f définie par :

$$f(t) = BM^2$$

a) Exprimer $f(t)$ en fonction du paramètre t.

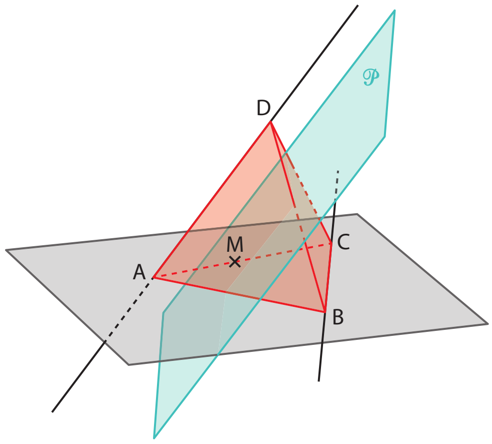
b) Déterminer la valeur t_0 pour laquelle cette fonction admet un minimum.

c) Donner les coordonnées du point M_0 qui correspond à cette valeur t_0.

d) Que représente-t-il pour la droite d' ?

129 Aire maximale

On considère un tétraèdre régulier ABCD d'arête 8 cm et un point M quelconque du segment [AC] distinct de A et de C. On définit le plan $\mathscr{P}$ passant par ce point M et parallèle aux droites (AD) et (BC).



1. Déterminer les points d'intersection des droites (AB) et (CD) avec le plan $\mathscr{P}$.

2. Quelle est la nature de la section du plan $\mathscr{P}$ sur le tétraèdre ABCD ?

3. On pose AM = x.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de cette section en fonction de x.

4. Où doit-on placer le point M pour que cette aire soit maximale ?

130 Mouvement d'un point MPSI et PCSI

On décrit la position d'un point M en mouvement dans l'espace par ses coordonnées $(x(t)\,;y(t)\,;z(t))$ dans un repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ s'appellent les équations horaires du mouvement et où t représente le temps. Au point M, à l'instant t :

• le vecteur vitesse est défini par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

• le vecteur accélération est défini par le vecteur $\vec{a}\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le point M dont le mouvement en fonction du temps est donné par $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 3 + t \\ z(t) = -4 + 3t \end{cases}$
est animé d'un mouvement rectiligne uniforme c'est-à-dire que sa vitesse est constante.

2. Montrer que le point N dont le mouvement en fonction du temps est donné par $\begin{cases} x(t) = 4 + 2t - t^2 \\ y(t) = -2 \\ z(t) = 3 \end{cases}$
est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié c'est-à-dire que son accélération est constante.

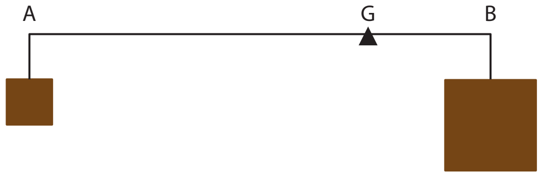
Travaux pratiques

TICE 30 min

Chercher
Communiquer
Raisonner

1 Barycentre d'un système de points pondérés

A ▶ Avec deux points



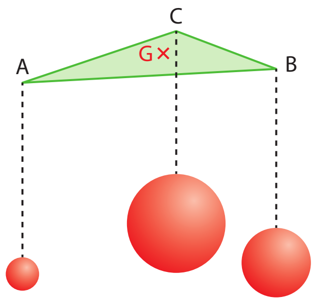
On considère une balance représentée par le segment [AB] de longueur 10 cm et on suspend une masse de $m_A = 2$ kg en A et une masse de $m_B = 6$ kg en B.
On cherche le point d'équilibre G de ce système.
La deuxième loi de Newton appliquée à un solide en rotation permet d'écrire la relation : $m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. On dit que le point G est le **barycentre du système** de points pondérés $\{(A, m_A), (B, m_B)\}$ où les masses sont les coefficients affectés aux points A et B.

1. À l'aide de la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ de manière générale.
2. En déduire, dans l'exemple donné, la position exacte du point G.
3. En mathématique dans le système $\{(A, a), (B, b)\}$ on peut avoir des coefficients a et b négatifs.
À l'aide de la question précédente, étudier la position du point G selon les signes des coefficients.
4. Étudier le cas où $a + b = 0$. Que se passe-t-il pour le point G ? (On obtient une condition d'existence du barycentre.)

Remarque On peut ainsi définir la droite (AB) comme l'ensemble des points M barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)\}$.

B ▶ Avec plusieurs points

1. Avec trois points, on définit de même le barycentre G du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ par $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On note H le barycentre du système $\{(A, a), (B, b)\}$ quand il existe, montrer qu'alors G est le barycentre du système $\{(H, a + b), (C, c)\}$.



Remarque Ceci est la propriété d'associativité du barycentre qui dit : « On ne change pas le barycentre d'un système de points pondérés si on remplace un certain nombre de points par leur propre barycentre. » et cela permet de construire le point G pas à pas.

2. Construire le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\}$.
3. De même avec quatre points, construire le barycentre du système $\{(A, -1), (B, 3), (C, 2), (D, 1)\}$.

C ▶ Terre – Lune

On sait que la distance Terre-Lune vaut 384 400 km et que la masse de la Terre est 81 fois plus grande que celle de la Lune. On note A et B les centres des deux sphères et G leur barycentre.

1. Montrer que le barycentre est situé à environ 4688 km du centre de la Terre.
2. Sachant que le rayon de la Terre est de 6 424 km, représenter un schéma de la situation Terre-Lune avec leur barycentre.

TICE 20 min Chercher Représenter

2 Utilisations du barycentre d'un système de points pondérés

1. On souhaite étudier le cas particulier du barycentre du système {(A , 1) , (B , 1) , (C , 1)}.
Montrer que dans ce cas le barycentre de ce système est le centre de gravité du triangle ABC.

Remarque Dans le cas des coefficients égaux le barycentre s'appelle **isobarycentre**.

2. On considère un tétraèdre ABCD. Le point I est le milieu du segment [AB] et le point E est tel que BCED soit un parallélogramme. Le point G est l'isobarycentre des points A, C et D.
a) Écrire le point E comme barycentre des points B, C et D.
b) Montrer que G est le barycentre du système {(E , 1) , (I , 2)}.
c) En déduire que les points I, E et G sont alignés et préciser la position du point G sur la droite (IE).
3. On considère le triangle ABC et les points I, J et K définis comme les symétriques respectifs de B par rapport à C, de C par rapport à A et de A par rapport à B.
a) Exprimer les points A, B et C comme barycentres des points I, J et K.
b) En déduire que les triangle ABC et IJK ont le même centre de gravité.
4. On considère un tétraèdre ABCD et le point G isobarycentre des quatre sommets.
On appelle « médiane » la droite joignant un sommet et le centre de gravité de la face triangulaire opposée et on appelle « bimédiane » la droite joignant les milieux de deux arêtes opposées (c'est-à-dire sans point commun).
Démontrer que le point G appartient aux sept droites ainsi définies en utilisant seulement l'associativité du barycentre.

TICE 20 min Chercher Communiquer Raisonner

3 Fonction vectorielle de Leibniz

On définit la fonction vectorielle $\vec{f}$ de Leibniz, la fonction qui à tout point M de l'espace associe le point $\vec{f}(M)$ défini par $\vec{f}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{MA}_i}$ où $(A_i , \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de points pondérés.

A ▸ Cas où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$

1. Montrer qu'alors $\vec{f}(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{\mathrm{G_1A}_i}$ où G_1 est le barycentre du système de points pondérés $(\mathrm{A}_i , \alpha_i)_{2 \leqslant i \leqslant n}$.
2. En déduire que la fonction est constante et vaut $\vec{f}(\mathrm{M}) = \alpha_1 \overrightarrow{\mathrm{G_1A_1}}$.

B ▸ Cas où $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$

1. Montrer que : $\vec{f}(\mathrm{M}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{\mathrm{MG}}$ où G est le barycentre du système de points pondérés $(\mathrm{A}_i , \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
2. Application : on donne un triangle équilatéral ABC de côté 8 et on appelle G le barycentre du système {(A , 2) , (B , 1) , (C , 1)}.
a) À l'aide de la relation précédente, réduire la somme vectorielle $2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.
b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\| = 8\sqrt{7}$.
c) Montrer que cet ensemble passe par le point B et le construire précisément.
d) En déduire l'ensemble des points M tels que $8\sqrt{3} \leqslant \|2\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}\| \leqslant 8\sqrt{7}$.