9

Vecteurs, droites et plans de l'espace

On sait étudier le barycentre d'un système pondéré, c'est-à-dire le point d'équilibre de ce système dans le plan.

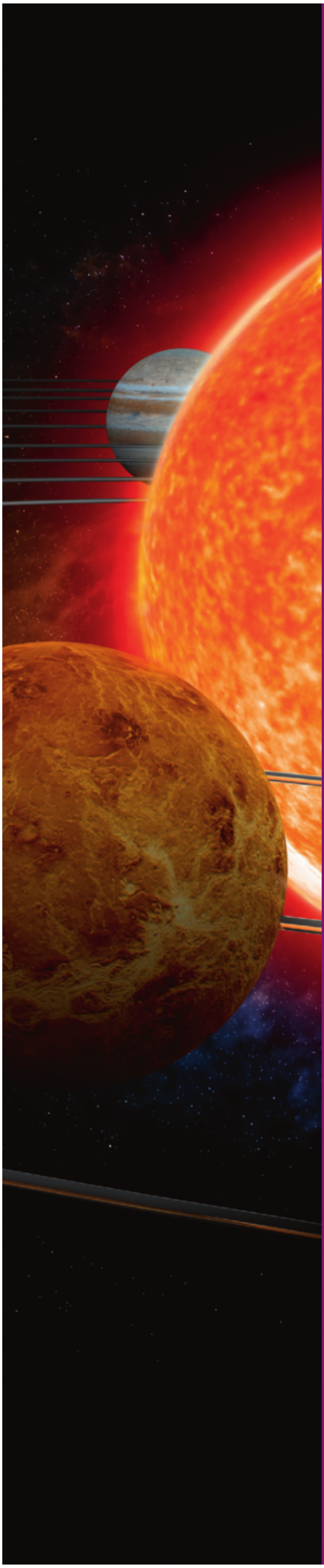
Dans l'espace existe-t-il le même phénomène d'équilibre entre les astres et les planètes ?

↪ **TP 1** p. 304

VIDÉO

Barycentre du système Terre-Lune

lienmini.fr/maths-s09-01



Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s09-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des coordonnées de vecteurs

On considère les points A(1 ; 2), B(–2 ; 3) et C(2 ; –1)

Donner les coordonnées des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{CB}$ **c)** $-2\overrightarrow{CA}$ **d)** $\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{AC}$

2 Construire des points et déterminer leurs coordonnées

On considère les points M(–2 ; 1), N(0 ; –3) et P(1 ; –2)

Dans chacun des cas suivants, construire les points F, G et H et déterminer leurs coordonnées par le calcul.

a) F avec $\overrightarrow{MF}=-2\overrightarrow{NP}+3\overrightarrow{MP}$

b) G avec $\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{NM}-2\overrightarrow{PM}$

c) H avec $\overrightarrow{PH}=5\overrightarrow{PN}+2\overrightarrow{PM}$

3 Déterminer si des vecteurs dans le plan sont colinéaires

1. Parmi les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$, quels sont ceux qui sont colinéaires ?

2. Même question avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.

4 Résoudre des systèmes

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases}-3x+4y=-1\\2x-y=2\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}x-5y=1\\3x-4y=0\end{cases}$

c) $\begin{cases}4x-5y=-3\\-3x-7y=0\end{cases}$ **d)** $\begin{cases}y=-2x+3\\y=4-2x\end{cases}$

5 Utiliser la relation de Chasles

On considère les points A, B, C, D et E tels que $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CE}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3. Les points A, D et E sont-ils alignés ? Justifier.

6 Déterminer l'équation d'une droite

Déterminer une équation cartésienne de la droite d dans chacun des cas suivants.

a) d passe par A(–1 ; 2) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

b) d passe par les points A(3 ; 2) et B(–2 ; 0).

c) d passe par le point B(3 ; 5) et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

d) d passe par les points C(–3 ; 1) et D(–2 ; –1).

Activités

TICE 15 min

1 Découvrir les vecteurs dans l'espace

1. Ouvrir la fenêtre 3D de **GeoGebra**. Chercher l'icône correspondant à la construction d'un cube, pour voir les instructions à suivre.

2. Cliquer sur le point origine du repère (nommé A), puis sur un point de l'axe des abscisses (en rouge) nommé B (par exemple B(3, 0, 0)). Le cube ABCDEFGH peut alors se construire.

3. Construire alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ (**u, v** et **w** dans **GeoGebra**)

4. Taper $\boxed{u + v}$ dans la ligne de saisie. Qu'observe-t-on ?

5. Taper $\boxed{u + 2v}$ dans la ligne de saisie. Qu'observe-t-on ?

Faire tourner la figure pour conclure sur le point obtenu en termes de plan.

6. Taper $\boxed{u + v + w}$ dans la ligne de saisie. Qu'observe-t-on ?

7. Construire un représentant du vecteur **u + v** à partir du point E. Qu'observe-t-on ?

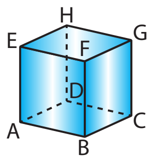
↪ Cours 1 p. 280

15 min

2 Utiliser des combinaisons linéaires de vecteurs

Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points M et N définis par les relations suivantes.

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH}$



1. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

Remarque On dit que $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

2. Démontrer de même que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$.

3. Calculer alors le vecteur $4\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$.

4. En déduire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ (on dit que A appartient au plan (BMN) et on note A ∈ (BMN)).

↪ Cours 1 p. 280

10 min

3 Découvrir les plans de l'espace

1. Dans un cube ABCDEFGH, placer les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CG}$.

2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BF}$.

3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.

4. En déduire la somme $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$.

5. Quel autre vecteur représente également cette somme ?

6. En déduire la section du plan (BMN) sur chacune des faces du cube.

↪ Cours 3 p. 284

10 min

4 Utiliser des coordonnées dans l'espace

On considère un cube ABCDEFGH et on pose :
$\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, P, M et N du plan (ABC) dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque On ne peut pas donner les coordonnées des autres points car ils ne sont pas dans le plan (ABC).

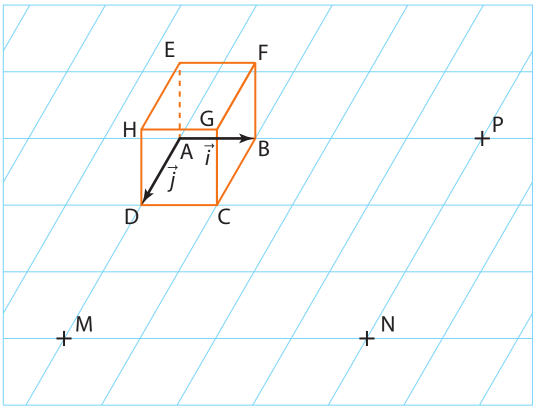
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

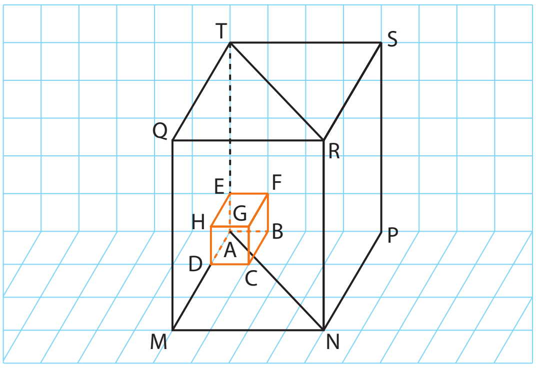
3. Le point R de l'espace est construit pour que son projeté orthogonal sur le plan (ABC) soit le point N.
On pose $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{AR} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$.

Remarque On dit alors que le point R a pour coordonnées (4 ; 3 ; 5) dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

b) Donner de même les coordonnées des points E, F, G, H, Q, S et T.





↪ Cours 4 p. 286

10 min

5 Découvrir les représentations paramétriques de droites de l'espace

Dans un repère de l'espace, on considère les points M_t de coordonnées $(2 - t ; -1 + 3t ; 2t)$ où t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$.

A ▸ Conjecture

1. Pour $t = 0$ et pour $t = 1$, donner les coordonnées des points $M_0 = A$ et $M_1 = B$.

2. Calculer les coordonnées des points $M_2 = C$ et $M_{-3} = D$.

3. Démontrer que les points A, B, C et D sont alignés.

4. Choisir une autre valeur de t et vérifier si le point M_t est aussi aligné avec les précédents.

B ▸ Démonstration

1. Démontrer que pour tout réel t, on a l'égalité : $\overrightarrow{AM_t} = t\overrightarrow{AB}$.

2. En déduire l'ensemble de tous les points M_t.

3. Quel est l'ensemble des points M_t dans chacun des cas suivants ?

a) $t \in [0 ; 1]$ **b)** $t \in [0 ; +\infty[$ **c)** $t \in [-1 ; 1]$

↪ Cours 4 p. 288

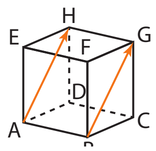
Cours

1 Les vecteurs de l'espace

Définition Vecteurs

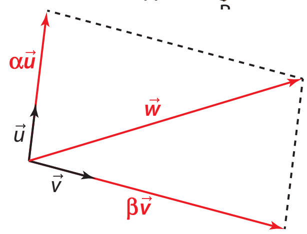
Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M′ tel que ABM′M soit un parallélogramme s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Comme, dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu'ils sont deux représentants d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.

Exemple
Dans le cube ABCDEFGH, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car ABGH est un rectangle.



Propriété Combinaison linéaire

Étant donné trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non colinéaires.
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe des réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.



Remarques

① On dit aussi que les trois vecteurs sont **coplanaires**.

② Dans le cas où $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**.

Définition Droite de l'espace

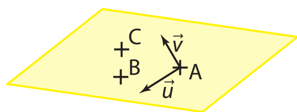
Une droite de l'espace est définie :
- **soit par la donnée de deux points distincts,**
- **soit par la donnée d'un point et d'un vecteur non nul.**

Propriété Caractérisation d'une droite de l'espace

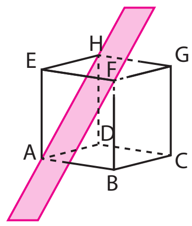
La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

Définition Plan de l'espace

Un plan de l'espace est défini :
- **soit par trois points non alignés (ABC),**
- **soit par un point et deux vecteurs non colinéaires (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).**



Exemple
Dans le cube ABCDEFGH, le plan (AFH) est déterminé par les trois points A, F et H ou bien par le point A et les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.



Propriété Caractérisation d'un plan de l'espace

Le plan défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ soit une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

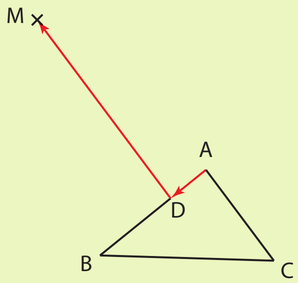
Exemple
Dans le cube ABCDEFGH et le plan (ABD), le point C appartient à ce plan car le vecteur $\overrightarrow{AC}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ soit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Exercices résolus

Méthode 1 Représenter des combinaisons linéaires

Énoncé

On considère un triangle ABC, construire le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.



Solution

À partir du point A 1 2, on construit le vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, puis, à partir du point D obtenu, on construit le vecteur $-2\overrightarrow{AC}$. 3

Le point d'arrivée est le point M cherché.

Conseils & Méthodes

1 Faire attention au point origine.

2 Construire des vecteurs colinéaires.

3 Construire une somme de vecteurs.

À vous de jouer !

1 On considère trois points A, B et C non alignés, construire le point P défini par :

$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

2 On considère un cube ABCDEFGH, construire le point M défini par :

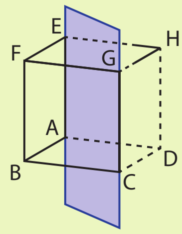
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$.

↪ Exercices 34 à 37 p. 292

Méthode 2 Caractériser des plans dans l'espace

Énoncé

Dans un cube ABCDEFGH, donner une caractérisation du plan (CEG) à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires, puis justifier que le point A appartient à ce plan.



Solution

Le plan (CEG) est défini par les trois points C, E et G donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CG}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent le plan (CEG) est l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{CM} = a\overrightarrow{CE} + b\overrightarrow{CG}$

Le point A appartient à ce plan car :
$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$.

Conseils & Méthodes

1 Observer les points qui définissent le plan.

2 En déduire deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

3 Déterminer graphiquement une combinaison linéaire pour montrer que le point donné appartient au plan.

À vous de jouer !

3 On considère une pyramide SABCD de base le carré ABCD de centre le point O et le point I milieu de la hauteur [SO].

1. Donner une caractérisation du plan (SAC).
2. Justifier que le point I appartient à ce plan.

4 Dans un cube ABCDEFGH :

1. Donner une caractérisation du plan (BEG) à l'aide d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.
2. Justifier que le point P centre de la face ABFE appartient au plan (BEG).

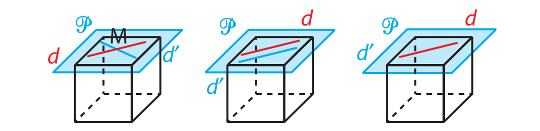
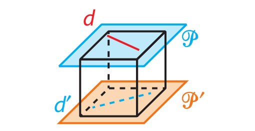
↪ Exercices 38 à 40 p. 292

Cours

2 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Propriété — Positions relatives de deux droites

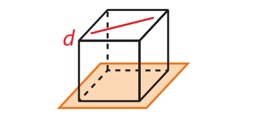
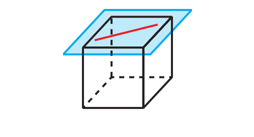
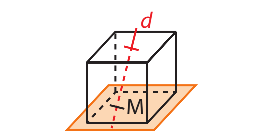
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (c'est-à dire incluses dans un même plan) soit non coplanaires.

d et d' sont coplanaires et sécantes en M ou strictement parallèles ou confondues	d et d' sont non coplanaires
	

Exemple Dans le cube ABCDEFGH les droites (AB) et (CE) ne sont pas coplanaires.

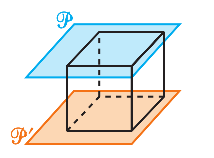
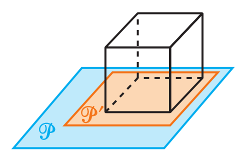
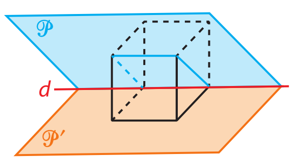
Propriété — Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan.
Il existe trois configurations pour les positions relatives de d et de $\mathcal{P}$.

① d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$	② d est incluse dans $\mathcal{P}$	③ d est sécante à $\mathcal{P}$
		

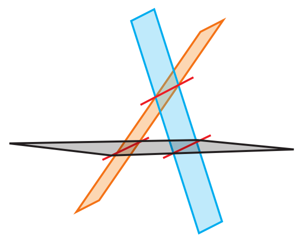
Propriété — Positions relatives de deux plans

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans.
Il existe trois configurations pour les positions relatives de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

① $\mathcal{P}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}'$	② $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus	③ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en d
		

Théorème — Théorème du toit

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ contiennent respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles alors leur intersection d'' est parallèle à ces deux droites.



Propriétés — Parallélisme de droites et de plans

① Une droite est strictement parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

② Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

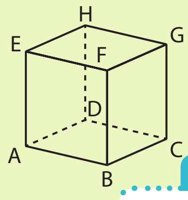
③ Si une droite est parallèle à un plan alors tout plan contenant cette droite et sécant au plan, coupe ce dernier selon une droite parallèle à la première.

Exercices résolus

Méthode 3 Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans

Énoncé

Dans le cube ABCDEFGH, quelles sont les positions relatives de (AB) et (CD) ? (AD) et (BF) ? (ABC) et (EFH) ? (BCF) et (ADG) ?



Solution

(AB) et (CD) sont dans le même plan (ABC), elles sont parallèles car ABCD est un carré. **1** (AD) et (BF) ne sont pas dans un même plan, elles sont non coplanaires. (ABC) et (EFH) sont parallèles car ils correspondent à des faces opposées du cube. **2** (BCF) et (ADG) ont deux points communs, les points G et F donc ils sont sécants selon la droite (FG).

Conseils & Méthodes

1 Observer la figure et repérer les droites et les plans.

2 Repérer les parallélismes éventuels.

À vous de jouer !

5 ABCDEFGH est un cube, donner les positions relatives de :
a) (AB) et (FH) **b)** (AF) et (CH) **c)** (CFH) et (AB)

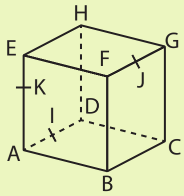
6 ABCD est un tétraèdre, donner les positions relatives de :
a) (AB) et (CD) **b)** (AC) et (BCD) **c)** (AC) et (BD)

↪ Exercices 41 à 43 p. 292

Méthode 4 Construire la section d'un solide par un plan dans l'espace

Énoncé

On considère le cube ABCDEFGH. Les points I et J sont les milieux des segments [AD] et [FG] et le point K est tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$. On cherche à construire la section du plan (IJK) sur le cube, c'est-à-dire que l'on cherche où le plan va couper ou non les faces du cube.



1. Construire le point d'intersection L des droites (EH) et (IK).

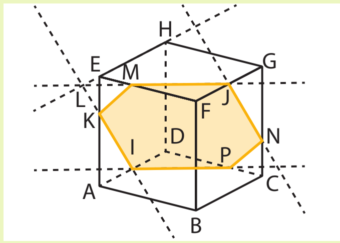
2. En déduire l'intersection des plans (IJK) et (EFG).

3. Construire alors la section du plan (IJK) sur le cube.

Conseils & Méthodes

1 Prolonger les droites en dehors du cube.

2 Chercher les droites sécantes avec les arêtes du cube.



Solution

1. On prolonge les droites (EH) et (IK) pour obtenir L **1**.

2. Les points L et J appartiennent aux deux plans (IJK) et (EFG) donc la droite (JL) est leur droite d'intersection.

3. On trace la parallèle à (JL) passant par I et la parallèle à (IK) passant par J.
On place les intersections avec les arêtes du cube et on obtient la section IKMJNP, qui est un hexagone **2**.

À vous de jouer !

7 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un carré de centre le point O.
Déterminer les intersections suivantes.
a) (SAB) et (SBC) **b)** (SAC) et (SBD)
c) (SB) et (AC) **d)** (SAB) et (SCD)

8 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme. Les points M et N sont sur la face SAB et le point P sur la face SCD.
1. Déterminer l'intersection des plans (MNP) et (SAB), puis celle des plans (MNP) et (SCD).
2. Construire la section du plan (MNP) sur la pyramide.

↪ Exercices 44 à 45 p. 292

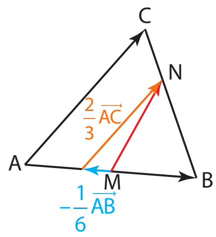
Cours

3 Décomposition de vecteurs dans l'espace

Propriété Relation de Chasles

Comme dans le plan, si A, B et C sont trois points de l'espace alors on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$



Exemple

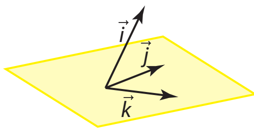
Dans un triangle ABC, on place les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Définition Base

Trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si chacun de ces trois vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.



Exemple

Dans un cube ABCDEFGH, aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ n'est une combinaison linéaire des deux autres donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace.

Propriété Décomposition d'un vecteur dans une base

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire unique des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

On a : $$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

et on dit que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Démonstration

On suppose qu'il existe deux décompositions pour le même vecteur.

Soit les triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

ce qui implique que $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$

et donc que $(x - x')\vec{i} = -(y - y')\vec{j} - (z - z')\vec{k}$

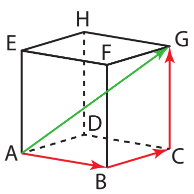
or comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base alors $\vec{i}$ ne peut pas être une combinaison linéaire de $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

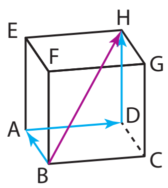
On obtient donc une contradiction et par conséquent l'hypothèse de deux décompositions est fausse, et elle est unique.

Exemple

Dans le cube ABCDEFGH muni de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on peut décomposer les vecteurs ainsi :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$





EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s09-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs

Énoncé

Dans le triangle ABC, le point M est le milieu du segment [AB] et le point N est défini par $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution

Le point N est défini à l'aide du point B donc on va écrire $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$. 1 2

Du coup on va écrire une relation pour le point M à l'aide du point B : $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Finalement $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. 3

Conseils & Méthodes

1 Observer les relations données.

2 Repérer lesquelles on va transformer à l'aide de la relation de Chasles.

3 Repérer quels vecteurs on veut à l'arrivée pour transformer de manière efficace.

À vous de jouer !

9 On considère trois points A, B et C non alignés et les points M et N définis par $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BN} = -3\overrightarrow{BA}$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

10 Dans le cube ABCDEFGH, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB] et [FG]. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

11 Dans le tétraèdre ABCD, I et J sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AD].

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

↪ Exercices 46 à 52 p. 292

Méthode 6 Décomposer un vecteur dans une base par lecture graphique

Énoncé

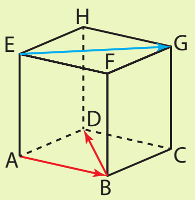
Dans le cube ABCDEFGH, lire la décomposition du vecteur donné dans la base donnée.

a) $\overrightarrow{EG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$. **b) $\overrightarrow{CF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CG})$.**

Solution

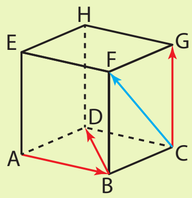
a) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

1 2 3



b) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}$ 1 2 3



Conseils & Méthodes

1 Repérer les plans définis par les points donnés.

2 Observer les parallélismes éventuels.

3 Repérer les vecteurs égaux entre eux et utiliser la relation de Chasles.

À vous de jouer !

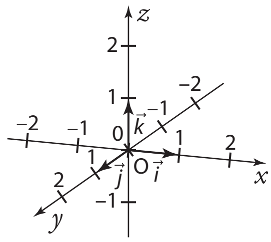
12 Dans le cube ABCDEFGH, lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{DF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

13 Dans le cube ABCDEFGH, on place le point O centre du rectangle BFHD, lire la décomposition du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

↪ Exercices 46 à 52 p. 292

Cours

4 Répérage dans l'espace



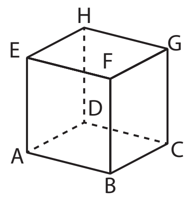
Propriété Repère

On appelle repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace le quadruplet où O est un point de l'espace appelé origine et où le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

Exemple Dans un cube ABCDEFGH, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base et A un point de l'espace donc $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

Corollaire Coordonnées d'un point

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet $(x ; y ; z)$ unique tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ où x s'appelle l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote.



Exemple Dans le cube ABCDEFGH muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées des autres sommets du cube sont C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1) car par exemple : $\overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AE}$.

Remarque Les opérations sur les coordonnées dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriété Coordonnées d'un vecteur

Comme dans le plan si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Exemple Dans le cube ABCDEFGH muni du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FC}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 1=0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriété Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite passant par le point A $(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb \\ z = z_A + kc \end{cases}$ où k est un réel.

Démonstration

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires équivaut à $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb. \\ z - z_A = kc \end{cases}$

Remarque On peut trouver une autre représentation paramétrique de la même droite en changeant de point et/ou en prenant un autre vecteur directeur colinéaire au précédent.

Exemple Une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point A(–1 ; 2 ; –3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 4k \\ z = -3 - 2k \end{cases}$ où k est un réel.

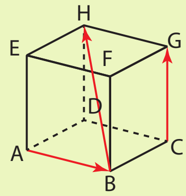
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s09-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Déterminer une base ou un repère d'un plan ou de l'espace par le calcul

Énoncé

Dans un cube ABCDEFGH, démontrer que le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CG})$ est bien une base de l'espace.



Solution

On suppose qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BH}$ (1) **1** **2**
et on considère le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Dans ce repère. les vecteurs ont pour coordonnées :

$\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ ce qui donne en identifiant les coordonnées

dans la relation (1) le système : $\begin{cases}0 = a - b\\0 = b\\1 = b\end{cases}$. Donc ce système n'a pas de solution

et les réels a et b n'existent pas, donc ce triplet est bien une base de l'espace. **3**

Conseils & Méthodes

1 Observer la figure.

2 Écrire une combinaison linéaire des trois vecteurs.

3 Déterminer par le calcul si les coefficients existent ou pas.

À vous de jouer !

14 Dans le cube ABCDEFGH, démontrer que le triplet $(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BH})$ est bien une base de l'espace.

15 Dans le tétraèdre ABCD, démontrer si le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC})$ est une base de l'espace.

↪ Exercices 53 à 58 p. 293

Méthode 8 Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Énoncé

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) où A(0 ; 1 ; 2) et B(–2 ; 1 ; 3).

Solution

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ **1** Et la colinéarité donne $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ **2**

D'où le système $\begin{cases}x - 0 = -2k\\y - 1 = 0k\\z - 2 = 1k\end{cases}$ **3** Donc une représentation est $\begin{cases}x = -2k\\y = 1\\z = 2 + 1k\end{cases}$

Conseils & Méthodes

1 Calculer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.

2 Exprimer la colinéarité de ce vecteur avec le vecteur $\overrightarrow{AM}$ par exemple.

3 En déduire le système par comparaison des coordonnées.

À vous de jouer !

16 Donner une représentation paramétrique de la droite (DK) où D(2 ; 3 ; 0) et K(5 ; 6 ; 1).

17 Donner une représentation paramétrique de la droite (CG) où C(–3 ; 4 ;–2) et G(–1 ; –1 ; 2).

18 Donner une représentation paramétrique de la droite (NY) où N(–2 ; –1 ; 0) et Y(–3 ; 1 ; –4).

19 Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par le point G(2 ; 9 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

↪ Exercices 71 à 78 p. 294

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s09-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Étudier géométriquement des problèmes de configuration dans l'espace

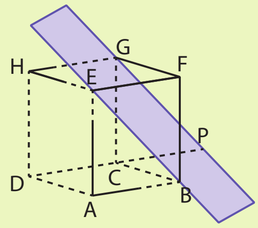
Cours 2 p. 282, 3 p. 284, 4 p. 286

Énoncé

Dans le cube ABCDEFGH, démontrer que le point P symétrique du point D par rapport au point C appartient au plan (BEG) en utilisant :

a) le calcul vectoriel. **b) les coordonnées.** **c) des positions relatives.**

Solution



a) On a $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ donc le point P appartient à la droite parallèle à la droite (EG) passant par B qui est bien incluse dans le plan (BEG). 1

b) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, les points ont pour coordonnées : B(1 ; 0 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1) et P(2 ; 1 ; 0) d'où $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sont égaux et on conclut de même. 2

c) Le plan (ACE) contient deux droites parallèles (EG) et (AC), le plan (ABC) contient la droite (AC) et le plan (BEG) contient la droite (EG) donc d'après le théorème du toit, ces deux plans sont sécants selon une droite qui est à la fois parallèle à (AC) et à (EG). 3
Mais comme le point B appartient à ces deux plans, alors cette droite d'intersection passe aussi par B. De plus dans le plan (ABC), cette droite coupe la droite (CD) en un point X tel que ABXC est un parallélogramme et donc comme ABCD est aussi un parallélogramme, on en déduit que le point X est le point P donné.

Conseils & Méthodes

1 Utiliser la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs.

2 Choisir astucieusement un repère dans lequel donner les coordonnées de points puis de vecteurs.

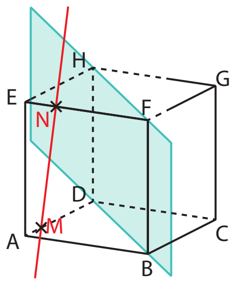
3 Utiliser le théorème du toit

À vous de jouer !

20 On considère un cube ABCDEFGH et les points M et N qui sont définis par :

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EN} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{EF}$.

On cherche à démontrer que la droite (MN) est parallèle au plan (BDH).



1. À l'aide du calcul vectoriel :

a) exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$.

b) en déduire le parallélisme.

2. À l'aide des coordonnées dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

a) exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$.

b) montrer que $\overrightarrow{MN}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DH}$.

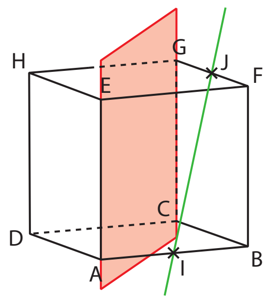
c) conclure.

21 On considère un tétraèdre ABCD, le point I milieu du segment [CD] et le point K tel que $4\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
Démontrer que les points B, I et K sont alignés en utilisant :

a) des coordonnées dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

b) une équation de la droite (BI).

22 On considère un cube ABCDEFGH et les points I et J milieux des arêtes [AB] et [FG]. On cherche à étudier la position relative de la droite (IJ) et du plan (ACE).



1. À l'aide du calcul vectoriel :

a) exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) en déduire la position relative cherchée.

2. À l'aide des coordonnées dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

a) exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b) conclure.

Exercices 65 à 70 p. 294

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s09-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

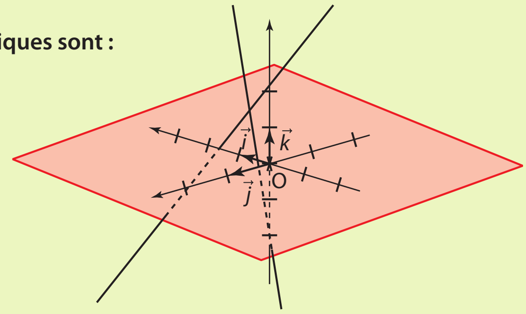
Méthode 10 Chercher l'intersection de droites dans l'espace

Cours 2 p. 284, 3 p. 285, 4 p. 286

Énoncé

On considère les droites d et d' dont les représentations paramétriques sont :

$$d\begin{cases}x=9+k\\y=-1+2k\\z=-3k\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=-1+t\end{cases}$$ **où k et t sont des réels.**



1. Vérifier si les droites sont parallèles ou non.

2. Déterminer si leur point d'intersection existe, sinon conclure.

Solution

1. Un vecteur directeur de d est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est le vecteur $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ **1**. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles et par conséquent elles sont sécantes ou non coplanaires **2**.

2. On cherche à déterminer s'il existe une valeur de k et une valeur de t qui vérifient les trois équations suivantes.

$$\begin{cases}9+k=t\\-1+2k=2-t\\-3k--1+t\end{cases}$$ Pour cela, on peut, par exemple, résoudre le système formé des deux premières équations : $\begin{cases}9+k=t\\-1+2k=2-t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9+k=t\\-1+2k=2-(9+k)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9+k=t\\-1+2k=-7-k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=7\\k=-2\end{cases}$ **3**

Si ces deux valeurs ne vérifient pas la troisième équation alors les droites ne sont pas coplanaires et dans le cas contraire, elles sont sécantes en un point qu'on détermine en remplaçant les valeurs de k ou de t dans les représentations paramétriques des droites. Ici on vérifie que $-3(-2)=-1+7$donc les droites sont sécantes au point de coordonnées $(7\ ;-5\ ;6)$. **4**

Conseils & Méthodes

1 Observer les équations.

2 Vérifier que les droites ne sont pas parallèles.

3 Déterminer en premier les valeurs des paramètres si possible en résolvant des systèmes.

4 Déduire les coordonnées du point d'intersection dans le cas de droites sécantes. Sinon les deux droites ne sont pas coplanaires.

À vous de jouer !

23 On considère les droites d et d' dont les représentations paramétriques sont :

$$d\begin{cases}x=1-2k\\y=2+k\\z=3k\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=2-4t\\y=-2t\\z=-1+t\end{cases}$$ où k et t sont réels.

1. Vérifier si les droites sont parallèles ou non.

2. Déterminer si leur point d'intersection existe, sinon conclure.

24 On considère les droites d et d' dont les représentations paramétriques sont :

$$d\begin{cases}x=4-k\\y=-3+k\\z=-k\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=2t\\y=3-2t\\z=-1+2t\end{cases}$$ où k et t sont réels.

1. Vérifier si les droites sont parallèles ou non.

2. Déterminer si leur point d'intersection existe, sinon conclure.

25 On considère les droites d et d' dont les représentations paramétriques sont :

$$d\begin{cases}x=-2-3k\\y=k\\z=-1-2k\end{cases} \text{ et } d'\begin{cases}x=1+3t\\y=-3+t\\z=1+2t\end{cases}$$ où k et t sont réels.

1. Vérifier si les droites sont parallèles ou non.

2. Déterminer si leur point d'intersection existe, sinon conclure.

Exercices 65 à 70 p. 296

Exercices apprendre à démontrer

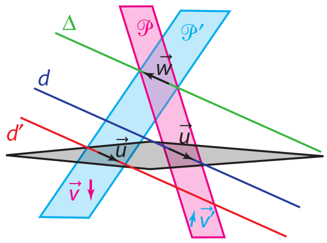
La propriété à démontrer

Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contiennent respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles alors leur intersection Δ est parallèle à ces deux droites.

On souhaite démontrer cette propriété en utilisant les combinaisons linéaires et des définitions du cours.

Comprendre avant de rédiger

- Faire une figure avec les plans et les droites.
- Traduire les définitions de plan et de droite à l'aide de vecteurs.
- Penser à la combinaison linéaire des vecteurs



Rédiger

Étape 1
Définir des vecteurs directeurs pour les droites et pour les plans.

Étape 2
Définir un vecteur directeur de la droite d'intersection.

Étape 3
Déterminer une combinaison linéaire pour ce vecteur car la droite d est dans le plan $\mathscr{P}$.

Remarquer que le vecteur $\vec{w}$ appartient aux deux plans.

Étape 4
Faire de même pour le même vecteur dans le plan $\mathscr{P}'$.

Étape 5
En déduire une relation vectorielle.

Étape 6
Chercher une contradiction.

Étape 7
Conclure.

La démonstration rédigée

Les droites d et d' sont parallèles donc elles ont le même vecteur directeur $\vec{u}$. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont définis par les couples de vecteurs non colinéaires $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{u'},\vec{v'})$.

On appelle $\vec{w}$ un vecteur directeur de la droite Δ.

Dans le plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b tels que : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

De même, dans le plan $\mathscr{P}'$, le vecteur $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ c'est-à-dire qu'il existe deux réels a' et b' tels que : $\vec{w} = a'\vec{u} + b'\vec{v'}$.

On en déduit que $(a - a')\vec{u} + b\vec{v} = b'\vec{v'}$.

Or les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ étant sécants, l'un de ces trois vecteurs ne peut pas être une combinaison linéaire des deux autres, donc : $a - a' = b = b' = 0$.

Par conséquent $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire que la droite Δ est parallèle aux deux droites d et d'.

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante.

Un point M de l'espace appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que

$$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$