Exercices calculs et automatismes

21 Calcul d'intégrale (1)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{1}(2t+1)\mathrm{d}t$ est égale à :

a l'aire sous la courbe entre –1 et 1.

b $\int_{0}^{1}(2t+1)\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(2t+1)\mathrm{d}t$.

c 2.

d 0.

22 Calcul d'intégrale (2)

Les affirmations suivante sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
a) $\int_{0}^{\ln(3)}\frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}x$ est égale à $-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$.	☐	☐
b) $\int_{-2}^{2}x^2-4\,\mathrm{d}x$ est l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre – 2 et 2.	☐	☐

23 Calcul d'intégrale (3)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

	V	F
$\int_{-2}^{2}\frac{x}{x^4+1}\mathrm{d}x$ vaut 0.	☐	☐

24 Propriété de l'intégrale

L'expression suivante est-elle vraie ou fausse ?

	V	F
$3\int_{0}^{\pi}\cos^2(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}3\sin^2(x)\mathrm{d}x=3$	☐	☐

25 Inégalité

L'expression suivante est-elle vraie ou fausse ?

	V	F
$\int_{0}^{\pi}\cos^6(x)\mathrm{d}x\geqslant 4$	☐	☐

26 Intégration par parties

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Soit $I=\int_{-1}^{-2}(x-2)e^x\,\mathrm{d}x$. Alors :

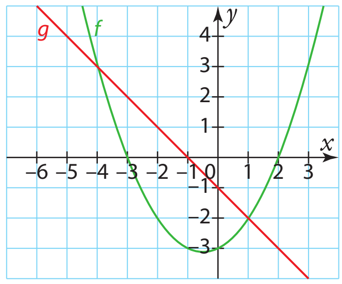
a $I=[(x-2)e^x]_{-1}^{-2}-\int_{-1}^{-2}e^x\,\mathrm{d}x$

b $I=[e^x]_{-1}^{-2}-\int_{-1}^{-2}(x-2)e^x\,\mathrm{d}x$

c $I=-5e^{-2}+4e^{-1}$

d $I=4e^{-1}+5e^{-2}$

Pour les exercices 27 à 31, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}5(x-2)(x+3)$ et $g(x)=-x-1$.



27 Calcul d'intégrale (4)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

a 4,5.

b l'aire d'un demi-carré de côté 3.

c $\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}$.

d $\int_{-4}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x$.

28 Calcul d'intégrale (5)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-4}^{2}g(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

a $2\times\int_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x$.

b l'aire d'un carré de côté 3.

c 9.

d 0.

29 Aire sous la courbe

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

L'aire de la surface entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre $x=-4$ et $x=3$ est :

a $\int_{-4}^{3}f(x)\mathrm{d}x$.

b $2\times\int_{-4}^{-0{,}5}f(x)\mathrm{d}x$.

c $\frac{47}{4}$ u.a.

d $2\,\square\int_{-4}^{-3}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{2}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x$.

30 Estimer une intégrale

Les expressions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
a) $\int_{-1}^{1}f(x)x\,\mathrm{d}x<\int_{-1}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x$	☐	☐
b) $\int_{1}^{2}f(x)x\,\mathrm{d}x<\int_{1}^{2}g(x)\,\mathrm{d}x$	☐	☐

31 Aire entre deux courbes

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

L'aire comprise entre la courbe de f et de g entre $x=-4$ et $x=0$ est égale à :

a $\int_{-4}^{0}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

b $\int_{-4}^{0}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$.

c $[-0{,}5x^2-1{,}5x-0{,}5]_{-4}^{0}$.

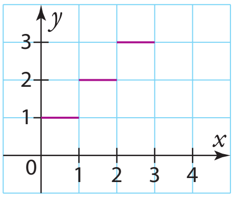
d $\frac{2}{3}$ u.a.

Exercices d'application

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

Méthode 1 p. 243

32 On considère la fonction f affine par morceaux représentée ci-dessous.

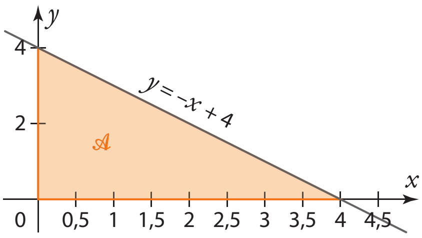


1. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 3.

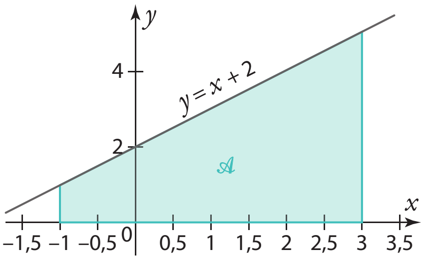
2. On considère la fonction g définie sur $[0,3]$ par $g(x) = f(x) + 2$. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction g entre 0 et 3.

33 Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le point A sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et d'abscisse 2 ainsi que le point B sur la droite d'équation $y = 2x$ et d'abscisse 3.
Déterminer l'aire du triangle OAB.

34 Calculer $\int_0^4 (-x+4)\,\mathrm{d}x$.



35 Calculer $\int_{-1}^3 (x+2)\,\mathrm{d}x$.



36 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,\mathrm{d}t$ **c)** $\int_2^4 (-y+3)\,\mathrm{d}y$

37 Calculer l'aire sous la courbe des fonctions suivantes sur $[0\,;3]$.

a) $x \mapsto x$.

b) $x \mapsto 2$.

c) $x \mapsto -x+3$.

38 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-1\,;2] \\ -t+3 \text{ si } t \in]2\,;3] \\ t+3 \text{ si } t \in]3\,;4] \end{cases}$$

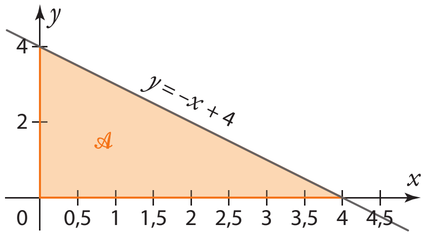
1. Construire la courbe représentative de f sur $[-1\,;4]$.

2. Justifier que f est continue et positive sur $[-1\,;4]$.

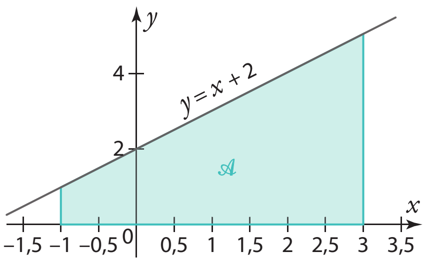
3. Déterminer alors graphiquement $\int_{-1}^4 f(t)\,dt$.

39 Calculer les aires suivantes.

a)



b)



Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

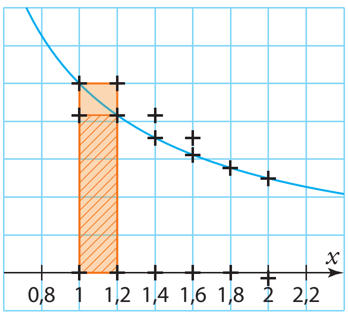
Méthode 2 p. 243

40 On considère la fonction inverse sur $[1\,;2]$.

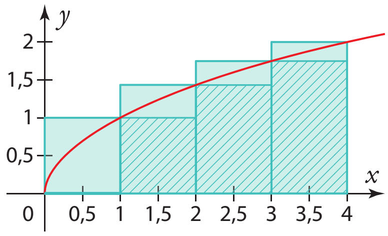
1. On partage l'intervalle $[1\,;2]$ en cinq intervalles de même amplitude.
Quelle est la longueur d'un intervalle ?

2. Quelle est l'aire du rectangle coloré en rouge ? Quelle est l'aire du rectangle hachuré ?

3. En considérant deux séries de rectangles, déterminer un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur $[1\,;2]$.



41 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ a été encadré par deux séries de quatre rectangles de base 1 comme sur le graphique ci-dessous. Estimer $\int_0^4 f(x)\,dx$.



42 **1.** Tracer l'allure de la courbe de la fonction logarithme sur l'intervalle [5 ; 10].
2. En partageant [5 ; 10] en dix intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de $\int_5^{10} \ln(t)\,dt$.

Calculer des intégrales à l'aide d'une primitive

Méthode 3 p. 245

43 Soit la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 6x - 4$.
1. Vérifier que $F : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 4x$ est une primitive de f.
2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

44 Calculer chaque intégrale.
a) $\int_1^2 x^2\,dx$ **b)** $\int_1^3 x^3\,dx$ **c)** $\int_2^{10} \frac{1}{x}\,dx$

45 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes à l'aide des fonctions usuelles utilisées.
a) $\int_0^4 (t-3)\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$
b) $\int_0^{11} (1-x)\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{4} (2t^3 - 3t^2 - 4t + 2)\,dt$

46 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes à l'aide des fonctions usuelles utilisées.
a) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)dt$ **b)** $\int_0^1 e^{1-2x}\,dx$ **c)** $\int_1^3 \frac{1}{u^2}\,du$

47 Calculer chacune des intégrales suivantes en reconnaissant une écriture de la forme $u'f(u)$.
a) $\int_0^1 2te^{t^2}\,dt$ **b)** $\int_0^{\ln(2)} 3t^2e^{t^3}\,dt$
c) $\int_1^e 2\ln(2t)\,dt$ **d)** $\int_1^e (t^2-1)\ln\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)dt$
e) $\int_{-1}^{2} (1-2t)e^{-t^2+t+1}\,dt$

48 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.
a) $\int_0^1 xe^{x^2+2}\,dx$ **b)** $\int_{-1}^{1} x(2-x^2)^3\,dx$
c) $\int_{-2}^{-1} t(t^2-1)\,dt$ **d)** $\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx$

49 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.
a) $\int_1^e \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\int_4^{15} \frac{3}{x-4}\,dx$
c) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$ **d)** $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

50 f est la fonction définie sur [2 ; 3] par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
Calculer $\int_2^3 f(t)\,dt$.

51 Effectuer le calcul des intégrales suivantes.
a) $\int_{-1}^{2} 4t(2t^2+3)^2\,dt$ **b)** $\int_{-7}^{-2} \frac{t}{(t^2-1)^5}\,dt$

52 On considère la fonction f définie sur [−1 ; 0] par $f(x) = 2xe^x$.
1. Déterminer la dérivée de f sur [−1 ; 0].
2. En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^{0} (2x+2)e^x\,dx$.
3. Justifier pourquoi I correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto (2x+2)e^x$ sur[−1 ; 0].

Calculer une intégrale avec une intégration par parties

Méthode 4 p. 245

53 Calculer $\int_0^1 xe^x\,dx$ en posant $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

54 Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ en posant $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \ln(x)$.

55 Calculer les intégrales suivantes.
a) $\int_0^{10} (2t+1)e^{-t}\,dt$ **b)** $\int_{-\frac{1}{3}}^{0} (4-3t)e^{3t+1}\,dt$

56 Calculer les intégrales suivantes.
a) $\int_{-\pi}^{\pi} (3t-2)\sin(t)\,dt$ **b)** $\int_{-2\pi}^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\,dx$

57 Calculer les intégrales suivantes.
a) $\int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 1)\sin(3x)\,dx$
b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)dt$

58 Calculer les intégrales suivantes.
a) $\int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 1)\sin(3x)\,dx$ **b)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(t + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)dt$

59 **1.** Déterminer $\int_1^5 \ln(x)\,dx$ en posant $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$.
2. Déterminer une primitive de la fonction logarithme.
3. Déterminer $\int_1^5 (\ln(x))^2\,dx$.

Exercices d'application

Utiliser la linéarité de l'intégrale

Méthode 5 p. 247

60 On considère les intégrales suivantes.
$I = \int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,dx$. Calculer $I + J$.

61 On considère deux fonctions f et g, continues sur un segment $[a\,;b]$.
$\int_a^b 1\,dt = 2e$, $\int_a^b f(t)\,dt = 10 + 3e$ et $\int_a^b g(t)\,dt = 1 - e$.
Déterminer les intégrales suivantes.

a) $\int_a^b (f(t) - g(t))\,dt$ **b)** $\int_a^b (3f(t))\,dt$

c) $\int_a^b (3f(t) - g(t))\,dt$ **d)** $\int_a^b (f(t) + t)^2\,dt - \int_a^b f(t)^2\,dt$

62 Soit $t \in [0\,;1]$.

1. Justifier que $\int_0^1 t^3\,dt \leqslant \int_0^1 t^2\,dt$.

2. A-t-on l'inégalité $\int_2^3 t^3\,dt \leqslant \int_2^3 t^2\,dt$?

63 Démo — Montrer que $\int_0^2 (2t^2 - 4t)\,dt \leqslant \int_2^3 t^3\,dt$.

64 f est une fonction continue et on considère quatre réels a, b, c et d.

1. On suppose $\int_a^c f(t)\,dt = 2e$ et $\int_c^d f(t)\,dt = -e$. Donner alors $\int_a^d f(t)\,dt$.

2. On suppose $\int_a^d f(t)\,dt = 5\sqrt{2}$ et $\int_c^d f(t)\,dt = 5$. Donner alors $\int_a^c f(t)\,dt$.

3. On suppose $\int_a^c f(t)\,dt = \ln(2)$, $\int_a^d f(t)\,dt = 3$ et $\int_b^d f(t)\,dt = 2 - \ln(2)$. Donner alors $\int_b^c f(t)\,dt$.

4. On suppose $\int_a^b f(t)\,dt = -2$, $\int_a^d f(t)\,dt = e$ et $\int_c^d f(t)\,dt = e + 2$. Donner alors $\int_b^c f(t)\,dt$.

65 Calculer les sommes suivantes.

a) $I = \int_{-1}^{1} e^{-t}\,dt + \int_{-2}^{-1} e^{-t}\,dt + \int_0^2 e^{-t}\,dt$

b) $J = \int_1^2 \frac{t}{t^3 + 2t^2 - 3t}\,dt + \int_2^1 \frac{t}{t^3 + 2t^2 - 3t}\,dt$

Encadrer une intégrale

Méthode 6 p. 247

66 Donner le signe des intégrales suivantes sans les calculer.

a) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$ **b)** $\int_{-3}^{-1} 2x^2 + 1\,dx$

c) $\int_0^1 2xe^x\,dx$ **d)** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,dx$

67 Donner un exemple de fonction f répondant à chaque situation.

a) $\int_0^{\pi} f(t)\,dt = 0$ **b)** $\int_{-1}^{2} f(t)\,dt \geqslant 0$ **c)** $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 3$

Utiliser la relation de Chasles

68 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1\,;2] \\ -t+3 & \text{si } t \in]2\,;3] \\ t+3 & \text{si } t \in]3\,;4] \end{cases}$$

Calculer alors $\int_{-1}^{4} f(t)\,dt$.

69 On considère la fonction g définie sur $[-6\,;6]$ de période égale à 2. Sur $[-1\,;1]$, la fonction g est égale à $|x|$.

1. Construire la courbe représentative de g sur $[-5\,;5]$.

2. Calculer alors $\int_0^1 g(t)\,dt$.

3. En déduire $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ puis $\int_{-6}^{6} g(t)\,dt$.

70 Soit f définie sur $[0\,;3]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{-x+3}{1} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

Calculer l'intégrale de f sur $[0\,;3]$.

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

71 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les valeurs moyennes sur les intervalles demandés et interpréter à chaque fois le résultat de manière géométrique.

a) $f : x \mapsto x^2 + 3$ sur $[-2\,;2]$.

b) $g : x \mapsto \frac{x}{(x^2-3)}$ sur $[e\,;4]$.

72 Calculer $\int_1^3 g(x)\,dx$ sachant que la valeur moyenne de g sur $[1\,;3]$ est égale à $\ln(2)$.

73 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ sachant que la valeur moyenne de f sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ est égale à $\frac{2}{\pi}$ et que la fonction f est paire.

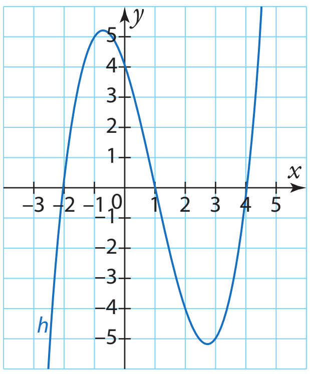
74 Donner la valeur moyenne de toute fonction linéaire sur un segment $[a\,;b]$.

Calculer une aire à l'aide d'une intégrale

Méthode 7 p. 249

75 **1.** Représenter dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1$.
2. Calculer les intégrales suivantes.
a) $\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
3. Déterminer le signe de f sur $[-2\,;3]$.
4. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 1.
5. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 3.

76 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = 0{,}5(x + 2)(x - 1)(x - 4)$
dont une représentation est donnée ci-contre.



1. Déterminer le signe de h sur $[-2\,;4]$.
2. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre 1 et 4.
3. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre -2 et 4.

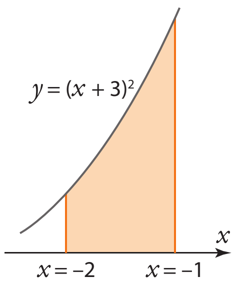
77 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}.$$

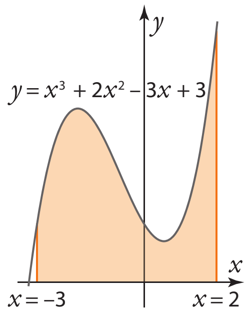
1. Déterminer le signe de f sur $[-5\,;6]$.
2. Déterminer l'aire sous la courbe de f et l'axe des abscisses entre -5 et 6.
3. Calculer $\int_{-5}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$. Comparer les résultats aux questions **2.** et **3.**.

78 Déterminer l'aire de chaque surface proposée.

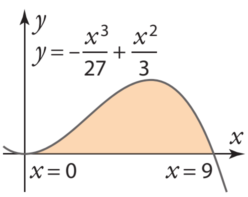
a)



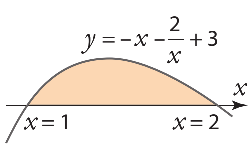
b)



c)



d)



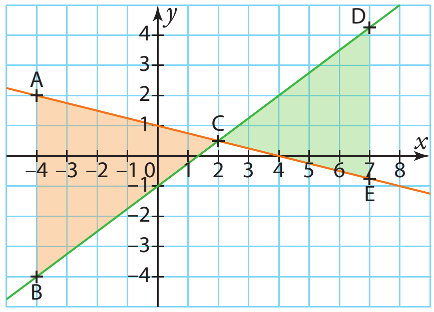
Calculer une aire entre deux courbes

Méthode 8 p. 249

79 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1 \text{ et } g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.

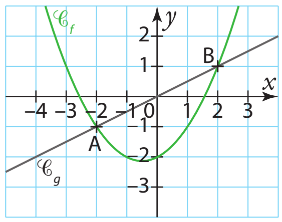


1. Résoudre $f(x) > g(x)$ en déterminant le ou les intervalles de x pour lesquels l'inégalité est vraie.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.
3. Déterminer l'aire entre les deux droites représentant les deux fonctions entre 2 et 7.

80 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \text{ et } g(x) = 0{,}5x$$

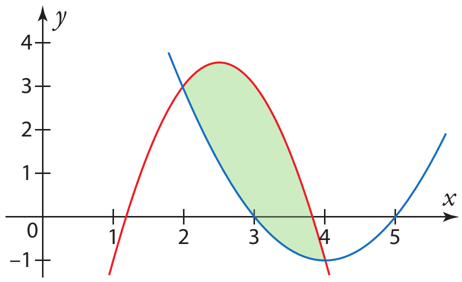
Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.



1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.
2. Résoudre $f(x) < g(x)$.
2. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

81 Calculer l'aire de la surface entre les courbes définies par $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$ entre -1 et 1.

82 Soit $f : x \mapsto x^2 - 8x + 15$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 10x - 9$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont une représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré.

Exercices d'entraînement

Calcul d'intégral à l'aide d'une primitive

83 Effectuer le calcul des intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{2} 4t(2t^2+3)^2\,dt$ **b)** $\int_{-7}^{2} \frac{t}{(t^2-1)^5}\,dt$

84 Effectuer le calcul des intégrales trigonométriques suivantes.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(x)\,(\sin(x))^2\,dx$ **b)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$

85 Effectuer le calcul des intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 e^t(e^t-1)^2\,dt$ **b)** $\int_0^1 \frac{e^{-t}-2}{(e^{-t}-2t)^3}\,dt$

86 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;0]$ par

$$f(x) = 2xe^x.$$

1. Déterminer la dérivée de f sur $[-1\,;0]$.

2. En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^{0}(2x+2)e^x\,dx$.

3. Justifier pourquoi I correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto (2x+2)e^x$ sur$[-1\,;0]$.

87 Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 x^{2n}\,dx$.

1. Déterminer u_0 et u_1.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $u_n = \frac{1}{9}$?

88 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

2. Calculer $\int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx$.

89 On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par

$f(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;1]$ et calculer sa dérivée.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{4-t^2}\,dt$.

90 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_1^x (4t+2)\,dt$.

1. Déterminer $F'(x)$.

2. Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

3. Résoudre $F(x) = 0$.

Intégration par parties

91 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties successives.

a) $\int_0^1 t^2e^t\,dt$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\cos(t)\,dt$

92 Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto x^2e^x$.

93 On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} e^t\sin(t)\,dt$ et $J = \int_0^{\pi} e^t\cos(t)\,dt$.

1. Exprimer I en fonction de J et J en fonction de I.

2. En déduire les valeurs de ces deux intégrales.

94 Soit a, b et c trois réels.

1. Dériver la fonction $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$.

2. En déduire une primitive de la fonction $f : x \mapsto (x^2+x+1)e^x$.

3. Retrouver le résultat précédent en appliquant deux fois une intégration par parties.

95 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{e^t+1} \text{ et } g(t) = \frac{1}{(e^t+1)^2}.$$

1. Démontrer que pour tout réel t, on a:

$$g(t) = 1 - \frac{e^t}{e^t+1} - \frac{e^t}{(e^t+1)^2}.$$

2. a) Déterminer les intégrales $\int_0^1 \frac{e^t}{e^t+1}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt$.

b) En déduire $\int_0^1 g(t)\,dt$.

3. a) En utilisant une intégration par parties, exprimer $\int_0^1 f(t)\,dt$ en fonction de $\int_0^1 g(t)\,dt$.

b) En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 f(t)\,dt$.

c) Interpréter ce résultat de manière géométrique.

96 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = t^3e^{-\frac{t^2}{2\pi}}.$$

1. En intégrant par parties, démontrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = 2\pi^2e.$$

2. Interpréter ce résultat de manière géométrique.

Étudier une fonction définie par une intégrale

97 On s'intéresse à la function $F : x \mapsto \int_0^x 2e^{-3t}\,dt$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $F'(x)$.

98 On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

1. Déterminer $F'(x)$.

2. Déterminer le sens de variation de la fonction $F : x \mapsto \int_2^x \frac{\ln(t^2)}{t-1}\,dt$ sur $[2\,;+\infty[$.

99 On considère la fonction $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de cette fonction.

2. Déterminer sa dérivée F'.

Calculer l'aire d'une surface

100 On considère la fonction f définie sur $[-2\,;0]$ par :

$$f(x) = -2xe^{1-x^2}.$$

1. Vérifier le signe de $f(x)$ sur sur $[-2\,;0]$.

2. En déduire l'aire sous la courbe de f sur cet intervalle.

101 On considère la fonction f définie sur $[e^{-1}\,;1]$ par :

$$f(x) = -x\ln(x).$$

1. Déterminer la dérivée de f et donner le tableau de variations de la fonction sur $[e^{-1}\,;1]$.

2. Déterminer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto x^2\,(2\ln(x) - 1)$ et en déduire une primitive de f sur $[e^{-1}\,;1]$.

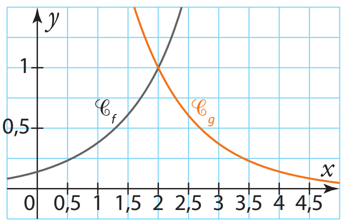
3. En déduire l'aire sous la courbe représentative de f sur cet intervalle.

102 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} \text{ si } x \leqslant 2 \\ e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

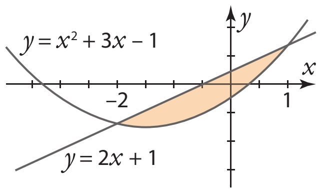
1. Vérifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

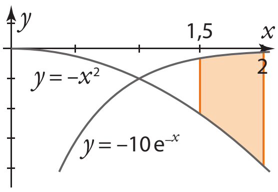


103 Calculer l'aire de chaque surface colorée.

a)



b)



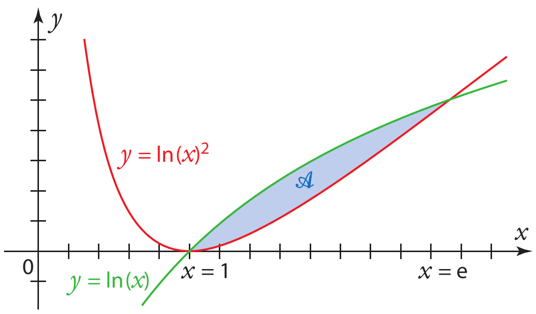
104 On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_1^e \ln(t)\mathrm{d}t \text{ et } J = \int_1^e \ln(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

1. Exprimer J en fonction de I.

2. Résoudre $\ln(x) > (\ln(x))^2$ sur $\mathbb{R}+$

3. Déterminer l'aire de la surface comprise entre les courbes représentant la fonction $x \mapsto \ln(x)$et $x \mapsto \ln^2(x)$ entre 1 et e.



105 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ représentée par leur courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.

2. Sur quel intervalle la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$?

2. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

106 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{et } g(x) = \frac{8}{x+2}.$$

On s'intéresse au domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$ ($a > 0$).

1. a) Montrer que 2 est racine du polynôme :

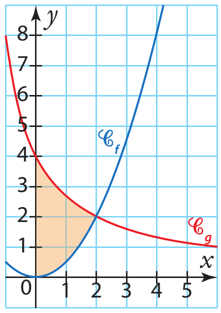
$N(x) = x^3 + 2x^2 - 16.$

b) Déterminer 3 réels b, c et d tels que $N(x) = (x-2)(bx^2 + cx + d)$.

c) En déduire le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. On suppose que $a < 2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

3. On suppose que $a \geqslant 2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

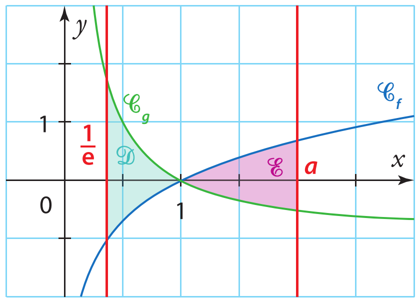


107 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : TICE

$$f(x) = \ln(x) \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

On définit :

- le domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les droites $x = e^{-1}$ et $x = 1$.
- le domaine $\mathscr{E}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les droites $x = 1$ et $x = a$ ($a > 1$).



On cherche a tel que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.

1. a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et proposer une une valeur possible de a.

b) Donner le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. Soit $h(x) = x\ln(x) + x - 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Calculer $h'(x)$. Que peut-on dire de h ?

b) Étudier les variations de la fonction h.

c) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

4. a) Montrer que l'aire du domaine $\mathscr{E}$ est égale à $(a-1)\ln(a)$.

b) Étudier les variations de la fonction $k(x) = (x-1)\ln(x)$.

c) Déterminer a telle que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.

Exercices d'entraînement

Utiliser les propriétés de l'intégrale

108 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ définie sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note $\mathscr{A}$ l'aire sous la courbe représentative de f sur $[0\,;1]$.

1. Justifier que f est continue, positive et décroissante sur $[0\,;1]$.

2. a) Établir que, pour $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b) En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.

3. Encadrer f sur $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ puis sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. En déduire un encadrement plus précis de $\mathscr{A}$.

4. En partageant l'intervalle $[0\,;1]$ en cinq intervalles de même longueur, donner un encadrement plus précis de $\mathscr{A}$.

109 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}2x \text{ si } x \leqslant 2\\ 4 \text{ si } x > 2\end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3

2. Exprimer u_n en fonction de n.

110 On considère la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par :

$$f(x)=\begin{cases}2x\sqrt{x^2+1} \text{ si } x \in [1\,;3]\\ \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} \text{ si } x \in [0\,;1[\end{cases}$$

1. Vérifier la continuité de f sur $[0\,;3]$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)\,dx$.

111 Démo

Soit $t \geqslant 0$.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$, $1-t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2$.

2. En déduire un encadrement de $\ln(1+x)$ pour tout réel x positif.

112 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{x-2} \text{ si } x \leqslant 2\\ e^{2-x} \text{ si } x > 2\end{cases}$$

1. Vérifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.

113 On s'intéresse aux intégrales suivantes.

$$I = \int_0^{\ln(8)} \frac{e^x+3}{e^x+4}\,dx \text{ et } J = \int_0^{\ln(8)} \frac{1}{e^x+4}\,dx.$$

1. Calculer $I-3J$ et $I+J$.

2. En déduire les valeurs de chacune des deux intégrales.

114 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |2x-4|.$$

1. Exprimer f comme fonction affine par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $\int_{-1}^2 4-2x\,dx$ et $\int_2^3 2x-4\,dx$.

b) En déduire, à l'aide de la relation de Chasles, $\int_{-1}^3 |2x-4|\,dx$.

115 Soit (I_n) la suite définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^n x^2\,dx.$$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre I_n et I_{n+1}.

2. Quelle est la nature de la suite (I_n) ?

116 Soit f la fonction définie sur $[e\,;e^2]$ par $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Établir un encadrement de $f(x)$ sur $[e\,;e^2]$.

3. En déduire que $\dfrac{2(e-1)}{e} \leqslant \int_e^{e^2} f(t)\,dt \leqslant \dfrac{e-1}{e}$.

117 Démo

On considère sur $[0\,;1]$ la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

1. Démontrer que pour tout $t \in [0\,;1]$, $f(t) \leqslant t$.

2. En déduire que $\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \dfrac{1}{2}$.

118 Démontrer que :

$$\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,dt \leqslant 1.$$

Étudier une suite d'intégrales

Méthode 9 p. 250

119 On considère pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

Déterminer, en utilisant la méthode d'intégration par parties, une relation de récurrence reliant I_{n+1} à I_n. On précisera I_0.

120 Étudier le sens de variation de la suite de terme général $u_n = \int_1^2 (2-t)^n e^t\,dt$.

121 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = (1-x)^n e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal du plan d'origine O.

1. Démontrer que le point $A(0\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_n$ quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

a) Interpréter I_n de manière géométrique. En déduire que $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite (I_n).

c) En déduire que cette suite converge.

122 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1. a) Justifier que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Déterminer les variations de la suite (u_n). Converge-t-elle ?
2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0 ; 1]$, on a $(1-t)^n e^t \leqslant e(1-t)^n$.
b) En déduire que $u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite ?

Interpréter une intégrale

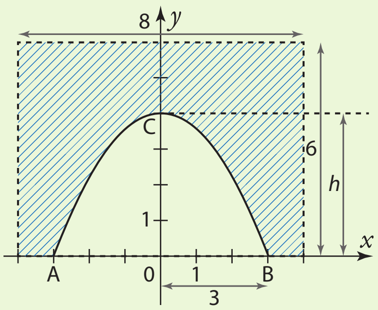
Méthode 10 p. 246

123 La concentration dans le sang d'un médicament en fonction du temps peut être modélisée par f, définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 4te^{-t}$, où t est exprimé en heures et $f(t)$ en grammes par litre de sang.
1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer alors la concentration moyenne du médicament dans le sang pendant la première heure.

124 Afin d'installer un barrage hydroéléctrique sur une rivière, une étude s'est intéressée au débit (en 10^6 m^3) de cette rivière sur une période de 70 jours. Il peut être modélisé par la fonction définie par $f(t) = 45e^{0{,}01t}$, où t désigne le nombre de jours depuis le début de l'étude. Déterminer le débit moyen de cette rivière au cours de l'étude.

125 Démo

Une entreprise est chargée de construire un pont par-dessus une voie ferrée pour laisser passer une autoroute. La longueur totale du pont est de 8 m ; sa hauteur de 6 m. L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur h = 4 m et d'axe de symétrie (Oy).



Les points A et B sont tels que OA = OB = 3 m.
Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieure ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.
1. On considère le repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) où 1 cm représente 1 m. Une équation de la parabole dans ce repère est de la forme : $y = ax^2 + c$. Déterminer c, puis a.
2. Déterminer l'aire de l'ouverture formée par l'arc.
3. Vérifier que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges exposées dans l'énoncé.

D'après Bac pro Travaux publics 1993

126 Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur. Celui-ci propose des prix au kg, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés. Pour une commande de x kg de fruit, le prix $P(x)$ en € par kg de fruits est donné pour $x \in [100 ; +\infty[$ par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100}.$$

Par exemple si le supermarché achète 300 kg de fruits, ils lui sont vendus $P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}50$ € le kg. Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1{,}5 = 450$ € au fournisseur pour cette commande.

A ▶ Étude du prix proposé par le fournisseur
1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.
2. Montrer que $P'(x) = \frac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100 ; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction P.

B ▶ Étude de la somme S à dépenser par le supermarché
On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kg de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ € par kg). Pour $x \in [100 ; +\infty[$, cette somme est donc égale à : $S(x) = xP(x)$
1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[$:

$$S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x+100)^2}.$$

3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[$:

$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x+100}.$$

4. En déduire une primitive T de S sur $[100 ; +\infty[$.

C ▶ Étude de différentes situations
1. Le magasin dispose d'un budget de 900 € pour la commande de fruits. Préciser, au kg près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.
2. Le supermarché estime acheter régulièrement, selon les saisons, entre 400 et 600 kg de fruits à ce fournisseur. Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400 ; 600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.

D'après Bac ES Amérique du nord 2011

Travailler le Grand Oral

127 Effectuer des recherches sur les densités de probabilités et leur lien entre le calcul intégral. Que permet de faire cette théorie pour les probabilités ?

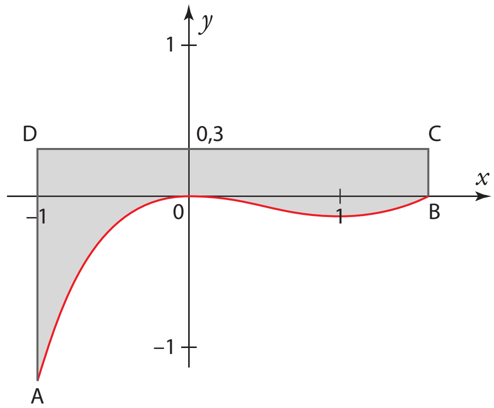
128 Effectuer un exposé afin de présenter l'évolution du calcul intégral, du XVII^e au XX^e siècles. On pourra évoquer les noms de Leibniz, Simpson, Riemann et Lebesgue.

Exercices bilan

129 Aire et intégrale

Une chaîne de parfumerie projette de commander à une entreprise de menuiserie, un certain nombre de consoles de présentation de produits de beauté.

Le graphique ci-dessous représente la face latérale de la console dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique égale à 2 cm.



1. On fait l'hypothèse que la courbe qui joint le point A au point B est la courbe représentative d'une fonction numérique f définie sur l'intervalle $]-1\ ;1{,}59]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + d\,x\mathrm{e}^{-x}$$

où a, b, c, d désignent quatre constantes réelles.

a) Exprimer pour tout réel $x \in [-1\ ;1{,}59]$, $f'(x)$ en fonction de x.

b) Sachant que la courbe représentative de f passe par les points de coordonnées $(0\ ;0)$ et $\left(1\ ;\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\right)$ et qu'elle admet en ces points une tangente horizontale, déterminer les valeurs des réels a, b, c, d.

2. On admet désormais que la courbe qui joint le point A au point B est la courbe représentative de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[-1\ ;1{,}59]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + x\mathrm{e}^{-x}$$

a) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{1{,}59} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire en cm² de la face latérale ABCD de la console. Déterminer l'approximation de la valeur de $\mathscr{A}$ à l'unité près la plus proche.

D'après concours admisson en formation des ingénieurs 2012

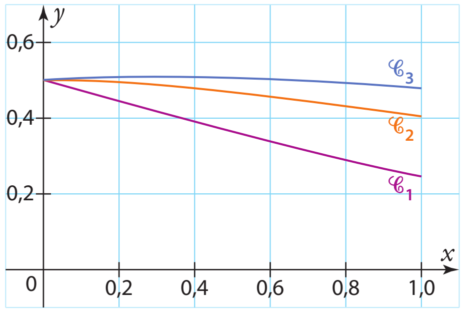
130 Suite et intégrale

La famille de fonctions f_n est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\ ;1]$ par :

$$f_n(t) = \frac{t+1}{t+2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la courbe représentative de la fonction f_n et on considère ensuite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Sur le graphique suivant on a représenté les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.



a) Que représentent les nombres u_1, u_2 et u_3 pour les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$?

b) À l'aide du graphique dire quel semble être le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pourquoi ?

2. Démontrer que le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celui observé à la question précédente.

3. Vérifier que $\frac{t+1}{t+2} = 1 - \frac{1}{t+2}$.

4. Déterminer alors $J = \int_0^1 \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t$.

5. Montrer alors que $J\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. En déduire que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

D'après concours Admisson en formation des ingénieurs 2015

131 Suite d'intégrale

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;1]$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

b) En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

2. Calculer u_1.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

D'apres Bac

Préparer le BAC L'essentiel

Existence d'une primitive

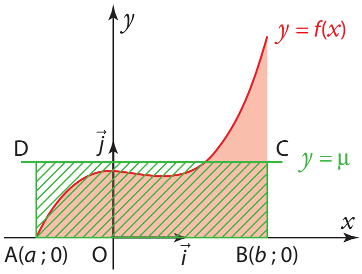
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par :

$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$

et a pour dérivée f.

Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Intégration par parties

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

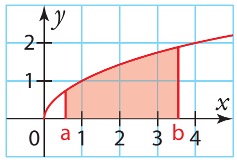
Définition de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Calcul d'aire

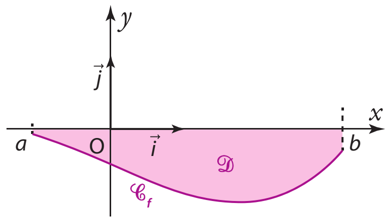
- **Aire sous la courbe d'une fonction positive**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



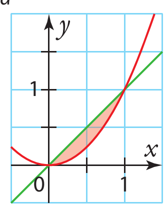
- **Aire sous la courbe d'une fonction négative**

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- **Aire entre deux courbes**

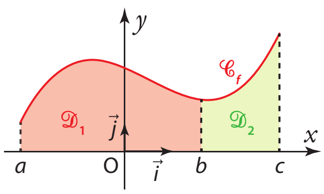
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$



Propriétés

- **Relation de Chasles**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



- **Inégalités**

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$,

alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier : si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

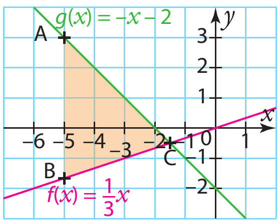
Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de …

			Parcours d'exercices
▶ Estimer une intégrale	Méthode 1, Méthode 2	→	1, 2, 32, 33, 3, 4, 40, 41
▶ Calculer des intégrales	Méthode 3, Méthode 4, Méthode 5	→	5, 6, 43, 44, 7, 8, 53, 54, 9, 10, 60, 61
▶ Encadrer une intégrale	Méthode 6	→	11, 12, 66, 67
▶ Calculer une aire	Méthode 7, Méthode 8	→	13, 14, 75, 76, 15, 16, 79, 80
▶ Étudier une suite d'intégrales	Méthode 9	→	17, 18, 119, 120
▶ Interpréter une intégrale	Méthode 10	→	19, 20, 123, 126

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-s08-07

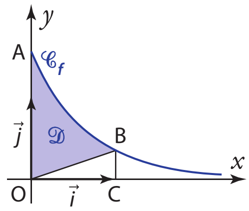
QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
132 	L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est égale à $\int_{-5}^{-1,5}[f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$	L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est égale à $\int_{-5}^{-1,5}[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x$	L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est égale à $\frac{31}{6}$	L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est égale à $\frac{49}{6}$
133 Soit $I = \int_0^{\ln(2)} 3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, alors :	$I = 3$	$I = 6$	$I = -3$	$I = 3\ln(2)$
134 Une primitive F de $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ définie sur $\mathbb{R}$ est :	$F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$	$F(x) = -(1 + x)\mathrm{e}^{-x}$	$F(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$	$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$
135 $\int_0^1 (x\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x$ est :	positive	négative	0,5(e − 1)	0,5(1 − e)
136 $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(2u+1)}\mathrm{d}u$ vaut :	$-\frac{\ln(3)}{2}$	$-\frac{\ln(2)}{3}$	$\frac{-\ln(3)}{3}$	$\frac{\ln(3)}{2}$
137 Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [0\,;3]$, alors :	$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$	$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$	on ne peut pas comparer $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x$	$\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_2^3 g(x)\mathrm{d}x$
138 On peut écrire :	$0 \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 1$	$-1 \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$	$0 \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 3$	$-3 \leqslant \int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$
139 $\int_0^6 \lvert 3x - 6\rvert\,\mathrm{d}x$ vaut :	3	12	30	36
140 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ vaut :	$\frac{\pi}{8} - 1$	$\frac{\pi}{4} - 1$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$1 - \frac{\pi}{2}$

141 Aire sous la courbe

Soit la fonction $f : x \mapsto ke^{-kx}$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, où k est un nombre réel strictement positif. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

On considère le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 et le point B de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1. Le point $\mathscr{C}$ a pour coordonnées (1 ; 0).



1. Déterminer une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

2. Exprimer, en fonction de k, l'aire du triangle OCB et celle de la surface D délimitée par l'axe des ordonnées, $\mathscr{C}_f$ et le segment [OB].

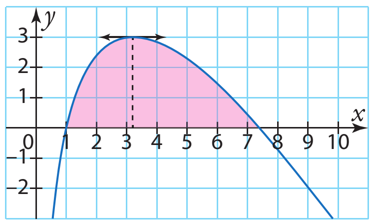
3. Montrer qu'il existe une unique valeur du réel k strictement positive telle que l'aire de la surface D vaut le double de celle du triangle OCB.

Méthode 3 p. 245, Méthode 7 p. 249

D'après Bac S Polynésie 20 juin 2018

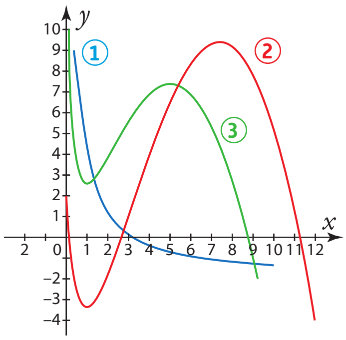
142 Bénéfice d'une entreprise

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers d'euros, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction $f : x \mapsto -2x + (e^2 - 1)\ln(x) + 2$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La courbe de f est donnée ci-dessous.



1. Vérifier que $f(1) = f(e^2) = 0$.

2. Parmi les courbes proposées ci-contre, une seule correspond à celle d'une primitive de f. Déterminer la courbe qui convient en expliquant votre choix.



3. En déduire, par une lecture graphique, une valeur approchée (en u.a.) de l'aire du domaine coloré dans la figure de l'énoncé.

4. a) Démontrer que la fonction $x \mapsto x\ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise sur l'intervalle où ce bénéfice est positif ou nul.

Méthode 3 p. 245, Méthode 7 p. 249, Méthode 10 p. 251

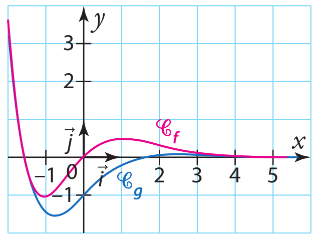
D'après Bac ES Polynésie juin 2007

143 Aire entre deux courbes

Soit $f : x \mapsto e^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1)$ et $g : x \mapsto -e^{-x}\cos(x)$ deux fonctions définies sur l'ensemble des réels.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur représentation graphique dans un repère orthonormé.

L'unité graphique est de 2 centimètres.



1. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble des réels.

2. Soit H la fonction définie sur l'ensemble des réels par

$$H(x) = \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right)e^{-x}.$$

a) Vérifier que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x) + 1)e^{-x}$ sur l'ensemble des réels.

On note D la surface délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ainsi que les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

b) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface D, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

Méthode 3 p. 245, Méthode 7, Méthode 8 p. 249, Méthode 9 p. 250

D'après Bac S Antilles-Guyanne 19 juin 2018

144 Suite d'intégrale

Soit n un entier naturel non nul. on appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1 + x^n)\,dx$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$

1. a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;+\infty[$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat (on pourra utiliser le résultat suivant : pour $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$).

2. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

b) Étudier les variations de la suite (I_n).

c) En déduire que (I_n) est convergente.

3. Soit $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

a) Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b) En déduire le signe de g sur $[0\,;+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel non nul, et pour tout $x > 0$, on a $\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$.

c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Méthode 3, Méthode 4 p. 245, Méthode 6 p. 247, Méthode 9 p. 250

D'après Bac S Pondichery 21 avril 2010

Exercices vers le supérieur

145 Intégration par partie et linéarité

1. On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}}\,dt$$

$$J = \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}}\,dt$$

$$K = \int_2^3 \sqrt{t^2 - 3}\,dt.$$

a) Vérifier que $J = K + 3I$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3\sqrt{6} - 2 - J$.

2. On introduit la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$.

a) Justifier que est f est dérivable sur [2 ; 3] et donner sa dérivée.

b) En déduire la valeur de I.

3. Déterminer J et K.

146 Linéarité

On considère les intégrales suivantes.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 9}\,dt$$

$$J = \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 - 9}\,dt$$

1. Vérifier que $J = 1 + 9I$.

2. On introduit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3 + x}{3 - x}\right)$.

a) Justifier que est f est dérivable sur [2 ; 3] et donner sa dérivée.

b) En déduire la valeur de I, puis celle de J.

147 Fonctions rationnelles

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in 0\,;1$, $f(x) = a + \frac{b}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [2\,;3]$, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_2^3 g(x)\,dx$.

3. Calculer l'intégrale $\int_2^3 \frac{1}{1 - x^2}\,dx$.

148 Dérivée d'une fonction intégrale

Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\,dt.$$

1. Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = F(2x) - F(x)$, où $F(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt$.

2. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de sa dérivée sans signe intégrale.

149 Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^t)\,dt.$$

1. Étudier la fonction en répondant aux questions suivantes.

a) Vérifier $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$ pour tout réel t.

b) Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$.

2. Démontrer que F est dérivable et de dérivée continue.

3. Déterminer une expression sans signe intégrale de $F(x)$ en fonction de x. On pourra utiliser une intégration par parties. Vérifier que $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln(2)$.

4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer ensuite $\lim\limits_{x \to -\infty} (F(x) - x)$. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de F ?

150 Suite et aire

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 - x + 2\ln(x)$.

1. a) Étudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;2[$ et $]2\,;4[$.

Soit α la solution appartenant $]2\,;4[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 10–2

2. a) Montrer que $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que, pour tout réel $x \geqslant 4$, la double inégalité suivante est vraie : $0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

3. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan définie par les inégalités suivantes.

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

a) Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$, notée $\mathcal{A}(\alpha)$, en unités d'aire. On utilisera une intégration par parties.

b) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2 - \frac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $\mathcal{A}(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4. Soit la suite (I_n) définie pour n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx.$$

a) Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4, la double inégalité suivante est vraie : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

c) Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$. Calculer S_n puis la limite de la suite (S_n).

D'après Bac S 2003 Asie

151 Encadrer une intégrale

On considère la fonction f définie sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(t)=\frac{e^{-t}}{1-t}$.

1. Démontrer que, pour tout $t\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $1\leqslant f(t)\leqslant\frac{2}{\sqrt{e}}$.

2. a) Simplifier, pour $x\in\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ l'expression :

$$(1+x)e^{-x}+x^2f(x).$$

b) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}}(1+t)e^{-t}\,dt$.

3. Donner un encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}}t^2f(t)\,dt$.

4. Déduire un encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)\,dt$.

152 Une suite définie par une intégrale

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\int_0^n\frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t}\,dt.$$

1. Justifier pourquoi $\int_0^n e^{-\frac{t}{n}}\ln(1+t)\,dt$ est positive.

2. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant\frac{1}{e}\ln(n+1)$.

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

153 Convergence d'une suite

Démo

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité :

$\int_1^n\ln(t)\,dt\leqslant\ln(n!)\leqslant\int_1^{n+1}\ln(t)\,dt$.

2. En déduire que la suite de terme général $\left(\frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}\right)$ converge et déterminer sa limite.

154 Dérivées

Soit f une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ et deux réels a et b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par :

$$g(x)=\int_{x+a}^{x+b}f(t)\cos(t-x)\,dt.$$

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

2. On suppose que f' est continue.

Montrer que $g'(x)=\int_{x+a}^{x+b}f'(t)\cos(t-x)\,dt$.

155 Étude de la fonction cosh

La fonction cosinus hyperbolique notée cosh est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

1. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\cosh(x)=1+\int_0^x(x-t)\cosh(t)\,dt$, pour $x\in\mathbb{R}$.

2. Démontrer que pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\cosh(x)=1+\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{6}C(t)\,dt.$$

avec C constante d'intégration.

156 Suite récurrente

Soit $n>1$ un entier naturel.
Pour $p\in\{1\,;\ldots;n\}$, on pose :

$$I_p=\int_0^1 x^p(1-x)^{n-p}\,dx.$$

Déterminer une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}.

157 Constante d'Euler

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

a) Justifier, pour $x\in[k\,;k+1]$, l'encadrement $\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{k}$.

b) Calculer $\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$.

c) Déduire des questions précédentes l'encadrement $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(n)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

2. On pose $u_n=S_n-\ln(n)$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $0\leqslant u_n<1$.

b) Démontrer l'inégalité $\ln(1+X)\leqslant X$, pour $X>0$.

c) En calculant la différence u_n-u_{n-1}, démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

d) En déduire alors la convergence de la suite.

Euler

e) Donner une valeur approchée de sa limite.

On appelle constante d'Euler, notée γ, la limite de cette suite.

158 Intégrale impropre

MPSI PCSI

Soit la fonction $f : x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

1. a) Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$ pour tout $n>1$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx$.

Cette limite est la valeur de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Que représente cette valeur géométriquement ?

2. a) Calculer $\int_1^n f(x)\,dx$ pour tout $n>1$.

b) En déduire l'éventuelle valeur de $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$.

Que peut on en déduire géométriquement ?

3. En utilisant le même principe, calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^0\frac{e^x}{\sqrt{e^x}}\,dx$

c) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx$

Exercices vers le supérieur

159 Irrationalité de e MPSI PCSI

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{1-t}\,dt.$$

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

2. Établir la relation $I_{n+1} = (n+1)\,I_n - 1$, pour $n \in \mathbb{N}$.

3. On pose $J_n = e \times n! - I_n$

a) Montrer que J_n est un entier naturel.

b) Montrer que si $n > 1$, I_n n'est pas un entier.

c) En déduire que $e \times n!$ n'est pas entier.

3. Montrer que e n'est pas rationnel.

160 Valeur moyenne Démo

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ et telle que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

et

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx = 1.$$

Montrer alors que pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) = 1$. On pourra considérer la fonction $g = (1-f)^2$.

161 Égalités en puissance

On considère une fonction f continue sur un segment $[a\,;b]$ et telle que :

$$\int_a^b (f(t))^2\,dt = \int_a^b (f(t))^3\,dt = \int_a^b (f(t))^4\,dt.$$

En développant $(f^2 - f)^2$, démontrer que f est constante, égale à 1, ou à la fonction nulle sur $[a\,;b]$.

162 Lemme de Riemann-Lebesgue MPSI

On considère une fonction f continue et dont la dérivée est continue sur un segment $[a\,;b]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

En utilisant une intégration par parties, dont on vérifiera les hypothèses, montrer que l'on a :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = u_n + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt$$

où u_n est une quantité dont on explicitera la valeur.

2. a) Justifier que la fonction f' est majorée par un réel M sur $[a\,;b]$.

b) En utilisant l'inégalité triangulaire démontrer que :

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{M(b-a)}{n}.$$

3. Déterminer la limite de U_n et en déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Riemann Lebesgue

163 Série harmonique Algo

On considère la suite (H_n) définie pour tout entier n par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Cette suite est appelé la série harmonique.

1. a) Soit k un entier naturel non nul.

Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqslant H_n$.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$.

2. a) Soit k un entier naturel tel que $k \geqslant 2$.

Montrer que $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{k}$.

b) En déduire que $\displaystyle 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx \geqslant H_n$.

3. Déduire que $\ln(n) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n+1)$.

4. Soit la suite (U_n) définie par $U_n = H_n - \ln(n)$ pour tout entier n. On considère le programme **Python** suivant.

```python
import math
def H(n) :
   s=...
   for i in range(1,...) :
      s=...
   return s
def U(n) :
   return H(n)-math.log(n)
```

a) Compléter les pointillés afin que la fonction `H(n)` renvoie la valeur de H_n pour une valeur de n entrée.

b) Écrire et exécuter ce programme dans un IDE Python, l'utiliser pour calculer U_{100}, $U_{1\,000}$ puis $U_{10\,000}$.

La suite U_n semble-t-elle converger ?

Vers quelle valeur approximativement ?

Remarque Cette valeur est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

164 Intégrales de Wallis MPSI

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1.

2. On considère à présent $n > 1$.

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)\cos^2(t)\,dt.$$

b) En déduire la relation, pour $n > 1$:

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}.$$

3. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \square \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

165 Développement en série de l'exponentielle

Démo

Le but de l'exercice est de démontrer la convergence suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

1. Soit $x > 0$, pour tout $t \in [0\,;x]$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^t.$$

a) Montrer que :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{(x-t)^n}{n!} e^x$$

b) En déduire alors que $\int_0^x f_n(t)\,dt \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!} e^x$.

c) Montrer que la suite de terme général $\int_0^x f_n(t)\,dt$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Démontrer par un raisonnement par récurrence sur n que :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt\,.$$

3. En déduire alors le résultat.

166 Suite d'intégrales

Santé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. (Unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement.

2. Calculer $f'(x)$ en fonction de x.

3. Déterminer les variations de f et dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

4. Montrer que $I_1 = 1 - 2e^{-1}$.

5. Démontrer que $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$ pour $n \geqslant 2$.

6. Déterminer la valeur exacte de I_2 et I_3.

7. Déterminer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

D'après concours école de santé de Bron

167 Placements avec un taux d'intérêt instantané variable

Sciences Politiques

A ▶ Somme de départ

La somme S0 est placée pour tout réel t positif au taux d'intérêt instantané $i(t)$ où t représente la durée du placement, exprimée en années.

Soit la fonction S qui à chaque réel t positif associe la somme $S(t)$, disponible au bout de t années.

On suppose que la fonction S est :

- dérivable sur $[0\,;+\infty[$,
- solution de l'équation différentielle $y' = i(t)y$.

On a $y(0) = $ S0.

1. Déterminer la fonction S lorsque la fonction i est une fonction constante sur $[0\,;+\infty[$, c'est-à-dire telle qu'il existe un réel strictement positif b pour tout t de $[0\,;+\infty[$ tel que $i(t) = b$.

2. On suppose que la fonction i est continue sur $[0\,;+\infty[$. Soit I la primitive de i sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Exprimer $I(t)$ à l'aide d'une intégrale pour tout t de $[0\,;+\infty[$.

b) Soit ϕ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\phi(t) = e^{I(t)}\,S(t)$. Montrer que ϕ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et calculer $\phi'(t)$ pour tout t de $[0\,;+\infty[$.

En déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S0 et de $I(t)$ pour tout t de $[0\,;+\infty[$.

B ▶ Application numérique

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose pour tout t de $[0\,;+\infty[$: $i(t) = b(1 + a\sin(t) \times e^{-t})$.

1. Calculer $\int_0^t \sin(x) \,\square\, e^{-x}\,dx$, pour tout t de $[0\,;+\infty[$ en utilisant le théorème d'intégration par parties.

2. Quelle est la somme $S(t)$ obtenue au bout de t années de placement ?

168 Série et intégrale

Santé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Donner la fonction dérivée de f. En déduire le sens de variation de f.

2. Calculer et simplifier $f(e)$, $f(e^2)$ et $f\left(\frac{1}{e}\right)$.

3. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 3$ par :

$$u_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Comparer u_n à $\int_1^{n+1} f(t)\,dt$ et en déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

5. Montrer qu'il existe un seul couple d'entiers naturels non nuls $x < y$ tels que : $e^{x\ln(y)} < e^{y\ln(x)}$.

D'après concours école de santé de Bron

Travaux pratiques

Algo TICE 55 min Chercher Raisonner

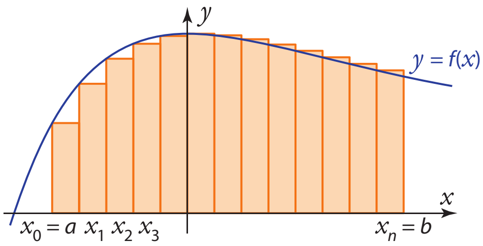
1 Méthodes numériques de calcul intégral

Lorsqu'une intégrale ne peut pas se calculer avec les méthodes de calcul traditionnel, on se contente d'en chercher une valeur approchée.
Différentes méthodes numériques sont possibles.
On considère une fonction f continue sur $[a\,;b]$ et on découpe l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de la forme $[x_0\,;x_1]$, $[x_1\,;x_2]$, …, $[x_{n-1}\,;x_n]$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.
Ainsi, pour tout $k \in \{0\,;1\,;\dots\,;n\}$, $x_k = a + k \times \dfrac{b-a}{n}$.
Commencer par importer **`math, numpy`** et **`matplotlib.pyplot`** puis écrire sous **Python** la fonction f de paramètre x qui renvoie $(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 1$.
Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. On vérifiera que chaque méthode fonctionne en comparant avec I les valeurs approchées calculées.

A ▶ Méthode des rectangles

On approche la valeur de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par la somme des aires des rectangles de dimensions $\dfrac{b-a}{n}$ et $f(x_k)$. On note I_n cette aire.

1. Donner l'aire du k-ième rectangle puis en déduire la formule de calcul de I_n en fonction de n .

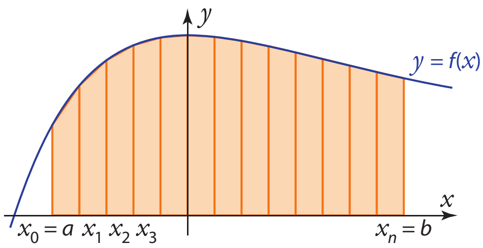


2. On propose ci-contre un programme en langage **Python** définissant la fonction **`rectangle(f,a,b,n)`**.
a) Que renvoie l'appel de la fonction **`rectangle(f,0,1,10)`** ?
b) Écrire le programme afin de calculer la valeur approchée I_n de I. Donner alors I_{10}, I_{100} et $I_{1\,000}$.

```
def rectangle(f,a,b,n):
    S=0
    for k in range(0,n):
        S=S+f(a+k*(b-a)/n)
    return S*(b-a)/n
```

B ▶ Méthode des trapèzes

Afin de gagner en efficacité on remplace les rectangles par des trapèzes, construits sur le même principe. On note J_n la somme des aires des n trapèzes.
1. Donner l'aire du k-ième trapèze puis en déduire la formule de calcul de J_n en fonction de n.
2. Sur le même modèle que celui de la partie précédente, écrire en langage **Python** une fonction **`trapeze(f,a,b,n)`** qui donne une valeur approchée J_n de I, avec la méthode des trapèzes.



C ▶ Comparaison des méthodes

Les méthodes de calcul classiques ne permettent pas de déterminer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Donner une valeur de I_n avec la méthode des rectangles ainsi qu'une valeur de J_n avec la méthode des trapèzes. On prendra $n = 10$, $n = 100$, $n = 1\,000$.
2. Le programme suivant renvoie la liste des valeurs approchées I_n pour $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ avec N un entier fixé. Écrire de la même manière une fonction **`liste_trapeze(f,a,b,N)`** qui renvoie la liste des valeurs approchées J_n.

```
def liste_rectangle(f,a,b,N):
    L=[]
    for k in range(1,N+1):
        L=L+[rectangle(f,a,b,k)]
    return L
```

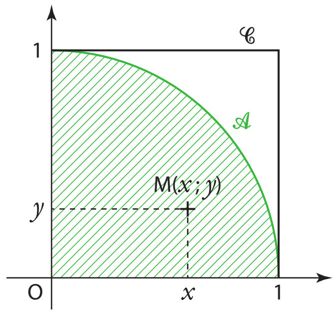
3. Représenter sur un même graphique les suites (I_n) et (J_n).
4. En définissant les erreurs de chaque méthode comme $|I - I_n|$ et $|I - J_n|$, écrire une liste des erreurs. Qu'en déduire quant à l'efficacité des deux méthodes ?

Algo | Histoire des maths | TICE | 55 min | Chercher Raisonner

2 Méthode de Monte Carlo

Développées sous l'impulsion de Von Neumann et Ulam, les méthodes de Monte Carlo permettent d'approximer des intégrales avec des simulations probabilistes.

A ▶ Aire d'un quart de cercle



Soit, dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$, un carré $\mathscr{C}$ de côté 1 et le quart de disque $\mathscr{A}$ de centre O et de rayon 1.

1. Calculer l'aire du quart de disque $\mathscr{A}$.

2. Soit M(x ; y) un point du plan, où x et y sont deux nombres aléatoires compris entre 0 et 1.

a) Justifier que le point M est dans le carré $\mathscr{C}$.

b) À quelle condition sur x et y, M est-il dans le quart de cercle $\mathscr{A}$?

c)Calculer l'aire de $\mathscr{A}$ et l'aire de $\mathscr{C}$.

En déduire la probabilité que le point M soit dans $\mathscr{A}$.

Le programme suivant, écrit en langage **Python**, simule n points M(x ; y) où x et y sont pris aléatoirement entre 0 et 1.

3. Compléter les pointillés afin que le programme compte (avec la variable C) le nombre de points à l'intérieur du quart de cercle.

4. Justifier que la valeur retournée par la fonction $\left(\frac{C}{n}\right)$ se rapproche de l'aire de $\mathscr{A}$ lorsque n tend vers l'infini.

```
import random
def monteCarlo1(n):
   C=0
   for k in range(n):
      x=random.random()
      y=random.random()
      if...:
         C=C+1
return C/n
```

B ▶ Généralités et application à d'autres calculs d'aire

Soit une fonction f définie sur un intervalle contenant [0 ; 1] et telle que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \in [0\,;1]$.

Soit M(x ; y) où x et y sont prises aléatoirement entre 0 et 1. Ce point appartient donc au carré de côté 1.

1. Exprimer l'aire de la surface sous la courbe de f entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ en fonction de $f(x)$.

En déduire la probabilité que le point M soit sous la courbe de f en fonction de $f(x)$.

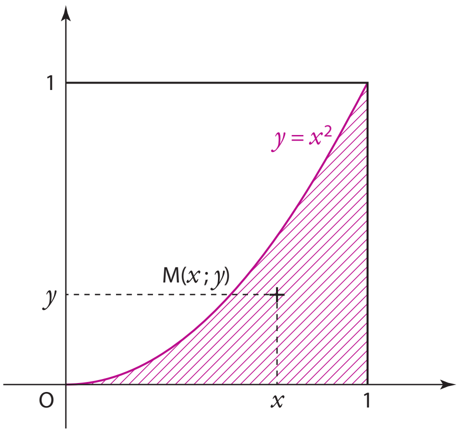
2. À quelle condition sur x, y et $f(x)$ le point M est sous la courbe de f ?

3. À partir des questions précédentes et en modifiant le programme de la partie **A**, écrire deux fonctions `monteCarlo2` et `monteCarlo3` :

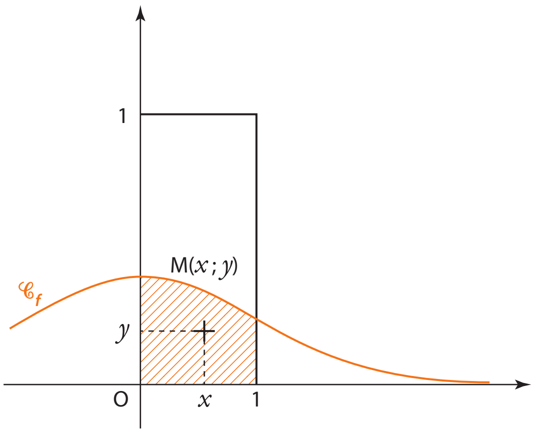
a) `monteCarlo2` approche la valeur de $\int_0^1 x^2\,dx$ (figure ①).

b) `monteCarlo3` approche celle de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ (figure ②).

①



②



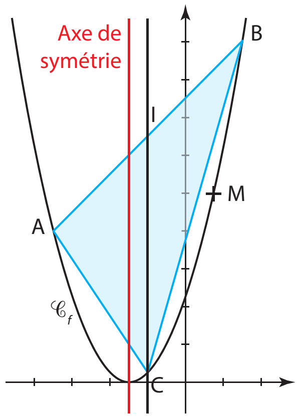
Travaux pratiques

Histoire des maths | TICE | 55 min | Chercher, Raisonner

3 Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

A ▸ Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

Étape 0



Soit la parabole d'équation $y = (x + 2)^2$ et A et B les points de la parabole d'abscisses respectives –4 et 1.

1. À l'aide de **GeoGebra**, tracer cette parabole, placer les points A, B et I le milieu de [AB].

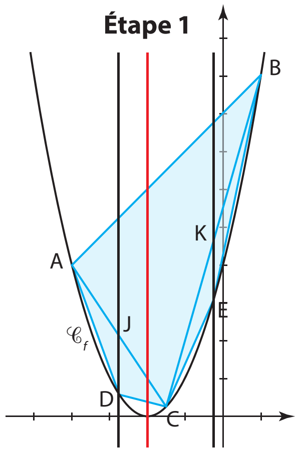
2. Placer C le point de la parabole et de la droite passant par I et parallèle à l'axe de symétrie de la parabole.
Quelle est la valeur de l'aire de ABC (notée a_0) affichée par le logiciel ?

3. Créer un point M libre sur la parabole et afficher l'aire du triangle ABM. Vérifier que ABC est bien le triangle de base [AB] d'aire maximale.

4. Calculer $\frac{4}{3}a_0$ et comparer ce nombre à l'aire $\mathscr{A}$ du secteur bleu clair.

B ▸ Démonstration de l'égalité $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ Aire (ABC)

Étape 1



Archimède démontre ce résultat : il approche l'aire $\mathscr{A}$ en construisant une suite (a_n) des sommes d'aires de triangles construits à l'intérieur de ce domaine.

1. On recommence le procédé de construction de triangles (vu en **A**) avec les deux secteurs de parabole de bases [AC] et [CB].

a) Tracer les triangles ACD et CBE d'aire maximale dans ces deux secteurs et constater que ACD et CBE ont la même aire.

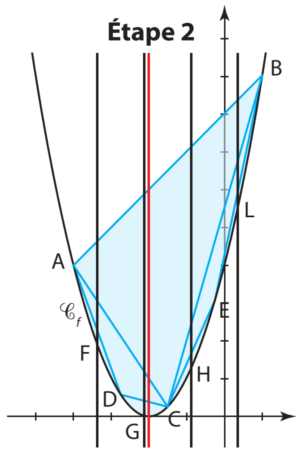
b) On note a_1 la somme des aires de ces deux triangles. Vérifier que $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.

c) On contruit les triangles d'aire maximale dans chacun des secteurs de parabole de bases [AD], [DC], [CE] et [EB]. On note a_2 la somme des aires de ces quatre triangles.
Calculer l'aire des quatre triangles puis $\frac{a_1}{a_2}$.

d) On note (a_n) l'aire des triangles obtenus à l'étape n. Quelle semble être la nature de la suite (a_n) ?

e) Que représente $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$?

Étape 2



2. Quelle que soit la parabole, on peut construire avec le même procédé de tels triangles.
On note a_0 l'aire de ABC et an la somme des aires des triangles construits à l'étape n.
On admet que la suite (a_n) est toujours une suite géométrique de même raison q.

a) D'après l'exemple précédent, préciser la raison q puis exprimer a_n en fonction de a_0 et n.

b) Exprimer $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ en fonction de a_0 et n.

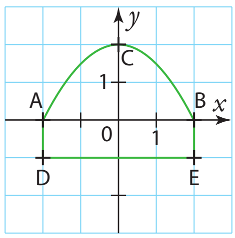
c) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ et conclure que = $\frac{4}{3}$ a_0.

TICE 55 min Chercher Raisonner

4 Calculer une surface

La bibliothèque publique de Tromsø emploie un prestataire pour nettoyer sa façade. Pour établir un devis, il doit établir la surface à nettoyer.
On cherche donc à calculer la surface de la façade du bâtiment de la bibliothèque de Tromsø. Elle se compose d'un rectangle surmonté par une surface délimitée par une courbe.

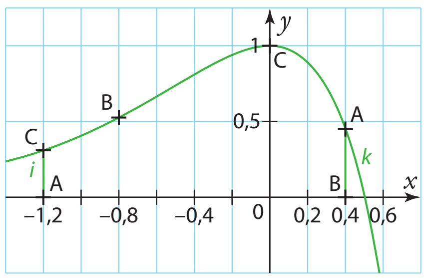
A ▶ 1e approximation : la courbe est une parabole



On définit un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé d'unité 10 mètres. La hauteur [OC] de la parabole est égale à 20 mètres et sa largeur [AB] est égale à 40 m.
1. La parabole est la courbe représentative d'une fonction f de la forme $f(x) = b - ax^2$ avec a et b deux réels positifs. Déterminer a et b.
2. Déterminer l'aire de la façade en u.a. puis en m^2.

B ▶ 2e approximation : la courbe est une fonction de type $f(x) = (ax + b)e^{2x}$

On définit un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 20 mètres. A, B et C sont les points de coordonnées A (0,4 ; 0,5), B(–0,8 ; 0,5) et C(0 ; 1). Le point C est le point le plus haut de la courbe.
1. Ouvrir Géogebra et réaliser les opérations suivantes.
a) Créer deux curseurs a et b.
b) Placer les points A, B et C.
c) Créer la fonction f définie par $f(x) = (ax + b)e^{2x}$.
d) Trouver a et b tel que la courbe de f passe par A, B et C.
2. Le point C est le point le plus haut de la courbe.
a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
b) Déterminer une relation entre a et b.
c) En déduire la fonction f.
3. La façade du bâtiment de la bibliothèque de Tromsø se compose d'un rectangle surmonté par une surface délimitée par une courbe d'équation $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$. Déterminer la surface de la façade du bâtiment.



PARTIE 2

Algèbre et géométrie

Euclide
(vers 300 av. J.-C.)

Vers 300 avant J-C, les *Éléments* d'Euclide présentent des prémices du raisonnement par récurrence.

↪ Dicomaths p. 461

Blaise Pascal
(1623-1662)

En 1665, Pascal publie dans son *Traité du triangle arithmétique* la 1e utilisation explicite du raisonnement par récurrence. Il y démontre les relations entre les coefficients binomiaux.

↪ Dicomaths p. 463

Jacques Bernoulli
(1654-1705)

En 1686, Jacques Bernoulli montre par récurrence la formule de la somme des n premiers entiers naturels en mettant en avant le passage du rang n au rang $n+1$.

↪ Dicomaths p. 460

William Rowan Hamilton
(1805- 1865)

Au début du XIXe siècle, Hamilton invente le mot « vecteur » à l'occasion de sa découverte des quaternions et Grassmann étend cette notion de vecteur à l'espace et lui associe plusieurs règles de calcul comme le produit scalaire.

↪ Dicomaths p. 462

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes

- J'ai étudié les différents ensembles de nombres, les suites numériques et j'ai appris à résoudre des équations du 2nd degré.

En Terminale générale

- Je vais étudier la combinatoire et le dénombrement.
- Je vais approfondir mes connaissances sur le calcul vectoriel en étudiant des vecteurs, des droites, des plans de l'espace avec leurs équations paramétriques.
- Je vais aussi découvrir les notions d'orthogonalité et de distance dans l'espace.

Edouard Lucas (1842-1891)

Giuseppe Peano (1858-1932)

James Clerk Maxwell (1831-1879)

Au milieu du XIXe siècle, Edouard Lucas, invente des jeux basés sur la combinatoire tels que *La Pipopipette* ou les fameuses *tours de Hanoï* tandis que son ami Henri Delannoy étudie les carrés magiques et les échiquiers arithmétiques.

↪ Dicomaths p. 463

En 1889, Peano formalise le raisonnement par récurrence dans son *Arithmetices principia, nova methodo exposita*.

↪ Dicomaths p. 463

À la fin du XIXe siècle, des scientifiques tels que Heaviside, Gibbs, Maxwell, rapprochent les mathématiques et la physique en définissant notamment la structure d'espace vectoriel.

↪ Dicomaths p. 463

Au XXIe siècle, les « mathématiques discrètes » se développent du fait de l'essor de l'informatique et de l'intelligence artificielle.
La combinatoire revêt plusieurs formes : algébrique, analytique, probabiliste, topologique, géométrique etc.

Domaines professionnels

- Un·e **créateur·trice de jeux** se servira de la combinatoire pour déterminer les probabilités de gagner ou de perdre une partie.
- Un·e **chercheur·se** se servira de la combinatoire en théorie des nombres ou en théorie des graphes.
- Un·e **ingénieur·e** appliquera le calcul vectoriel pour simuler le mouvement mécanique d'un objet dans l'espace.
- Un·e **physicien·ne** utilisera les vecteurs pour représenter des forces, des vitesses, des accélérations ou encore un champ électrique, un champ magnétique etc.
- Un·e **architecte** utilisera les plans et intersections de plan pour concevoir un projet en 3D.