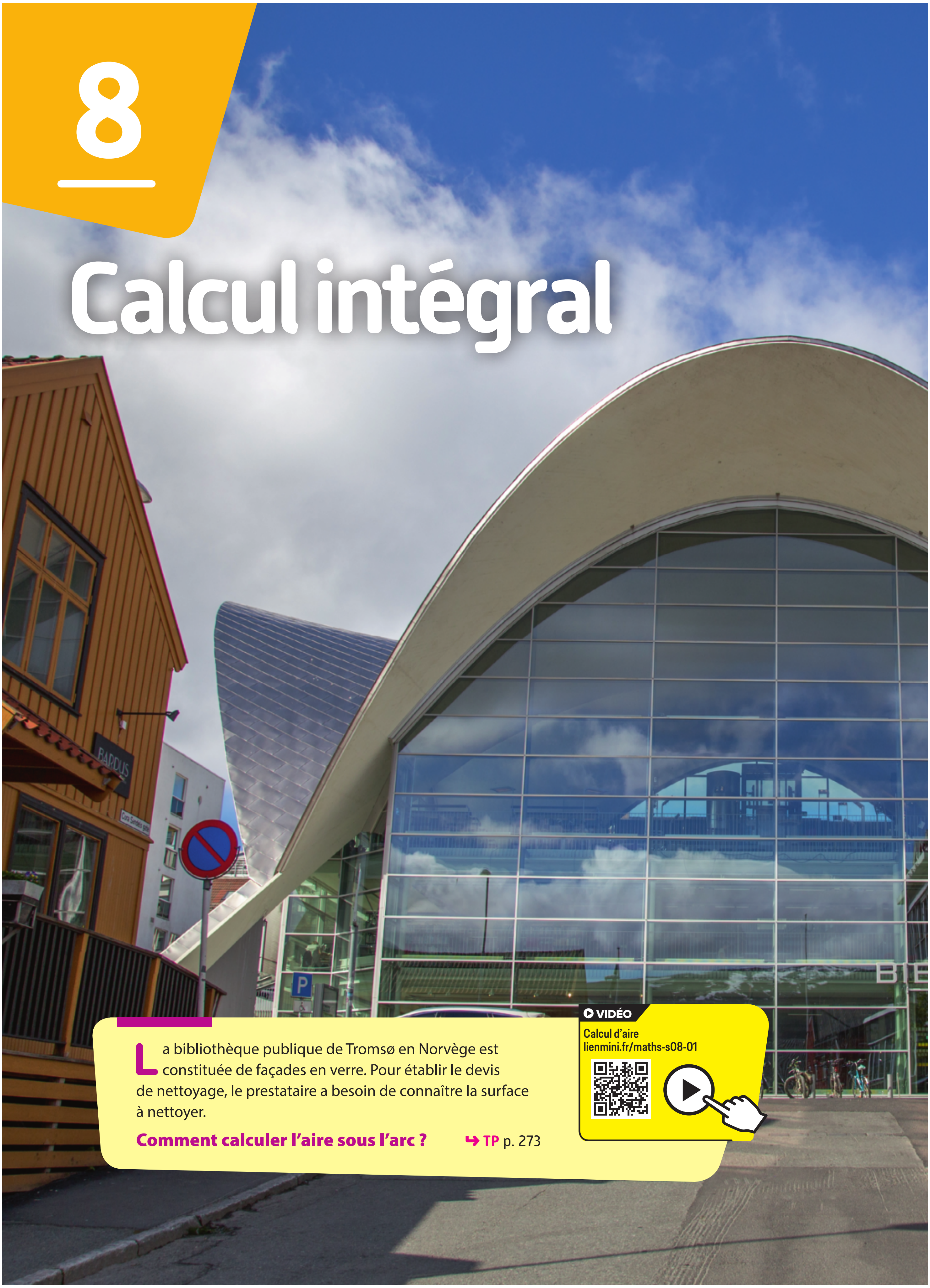
8

Calcul intégral



La bibliothèque publique de Tromsø en Norvège est constituée de façades en verre. Pour établir le devis de nettoyage, le prestataire a besoin de connaître la surface à nettoyer.

Comment calculer l'aire sous l'arc ? ↪ TP p. 273

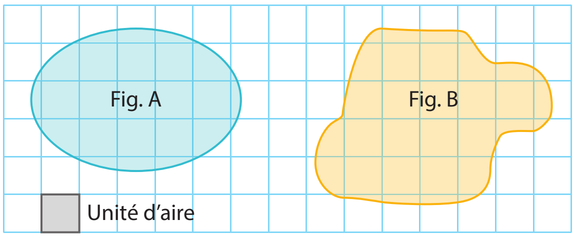
VIDÉO
Calcul d'aire
lienmini.fr/maths-s08-01

Pour prendre un bon départ

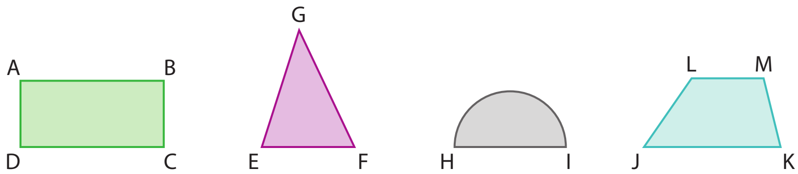
EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s08-02
Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des aires

a) Déterminer un encadrement de l'aire exprimée en unités d'aire pour chaque figure ci-dessous.



b) Écrire les formules des aires des figures suivantes.



2 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

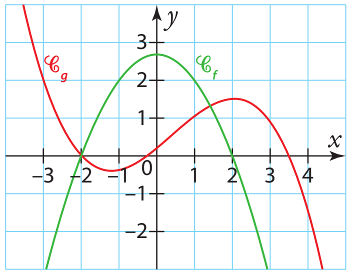
On considère les fonctions f et g dont une représentation graphique est tracée ci-contre.

Déterminer graphiquement :

a) le signe de la fonction f sur $[-3 ; 4]$,

b) le signe de la fonction g sur $[-3 ; 4]$,

c) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur $[-3 ; 4]$.



3 Déterminer le signe d'une fonction

On considère les fonctions $f : x\ f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et $g : x \mapsto x - 1$ définies sur l'ensemble des réels.

1. Étudier le signe des fonctions f et g sur l'ensemble des réels.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble des réels.

4 Justifier qu'une fonction est continue

Déterminer sur quel ensemble les fonctions suivantes sont continues.

a) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ **b)** $g : x \mapsto \dfrac{1}{2x - 1}$ **c)** $h : x \mapsto \sqrt{3 - 2x}$ **d)** $k : x \mapsto |x|$

5 Déterminer une primitive

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto 5x^4 - x^3 + x$

b) $g : x \mapsto \dfrac{2x}{(3 + x^2)^3}$

c) $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2x}}$

d) $h(x) = x^2 \mathrm{e}^{x^3 + 1}$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

f) $k(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Activités

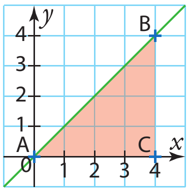
Algo 55 min

1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive

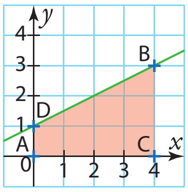
A ▶ Aire sous la courbe d'une fonction

Dans chacun des cas, donner la valeur de l'aire sous chacune des courbes entre les abscisses 0 et 4, en unités d'aire.

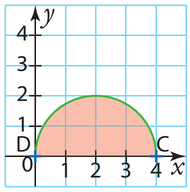
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = 0{,}5x + 1$

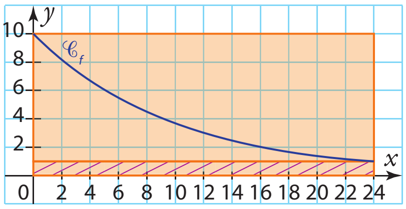


c) $f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2}$

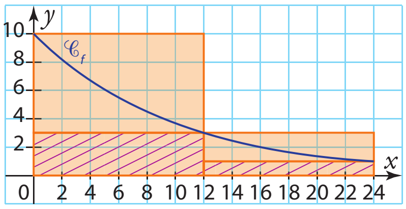


B ▶ Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

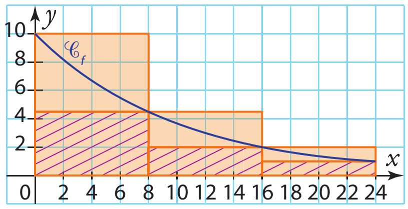
On considère la fonction f sur $[0\,;24]$ définie par $f(x) = -x\ln\left(\frac{9}{24}\right) + \ln(10)$ représentée en bleu ci-dessous. Pour estimer l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe de f entre 0 et 24, on découpe l'aire de deux manières différentes.



Étape 1



Étape 2



Étape 3

1. Proposer un schéma de l'étape 4 puis décrire la construction des rectangles.

2. On note U_n la somme des aires des rectangles hachurés et V_n la somme des aires des rectangles colorés à l'étape n. On a donc $U_1 = 24 \times f(24)$ et $V_1 = 24 \times f(0)$. Exprimer U_2 et V_2 en fonction de f, puis U_3 et V_3.

3. L'intervalle $[0\,;\,24]$ est maintenant découpé en 12. Comment pensez-vous que les deux suites (U_n) et (V_n) évoluent ? Et si le découpage augmente, que se passe-t-il ?

4. Proposer un programme **Python** permettant de déterminer U_n et V_n. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x\mapsto\infty} V_n$?

Remarque Ce nombre, correspondant à l'aire $\mathscr{A}$, se note $\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C ▶ Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles

On considère la fonction $g(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$ et les suites (U_n) et (V_n) représentant les suites des sommes des rectangles définis comme précédemment.

1. Modifier le programme **Python** pour proposer une valeur approchée de $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer U_1 et V_1 en fonction de g, puis U_2 et V_2 et enfin U_3 et V_3.

b) Démontrer que $U_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$. En déduire que $U_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

c) Démontrer que $V_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. En déduire que $V_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

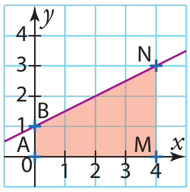
3. Justifier l'encadrement $U_n \leqslant \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant V_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ en appliquant l'encadrement avec n très grand.

↪ Cours 1 p. 242

20 min

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

A ▶ Intégrale d'une fonction affine



On considère la fonction $f(t)=\dfrac{2}{3}t+2$ sur $\mathbb{R}^+$. M est un point de coordonnées $(t\,;0)$ et N le point de la courbe de f d'abscisse t.

1. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(t)$ du trapèze AMNB est égale à $\mathscr{A}(t)=\dfrac{1}{3}t^2+3t$.

2. Exprimer, à l'aide d'une intégrale, cette aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et t.

3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathscr{A}$. Quel lien peut-on faire entre la fonction f et $\mathscr{A}$?

B ▶ Intégrale de la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t)=\sqrt{t}$ et dont la courbe représentative est notée $\mathscr{C}$. Soit un réel $x>0$, on désigne par $\mathscr{S}_x$ la surface sous $\mathscr{C}$ pour $0\leqslant t\leqslant x$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire de la surface $\mathscr{S}_x$.

1. Justifier la notation $\mathscr{A}(x)=\int_0^x\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $h\in\mathbb{R}$, tel que $x+h\in\mathbb{R}_+$. Si $h>0$, représenter l'allure de $\mathscr{C}$ et la surface d'aire $\mathscr{A}(x+h)-\mathscr{A}(x)$.

3. Démontrer que $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{\mathscr{A}(x+h)-\mathscr{A}(x)}{h}\leqslant\sqrt{x+h}$ et déterminer un encadrement de $\dfrac{\mathscr{A}(x+h)-\mathscr{A}(x)}{h}$ lorsque $h<0$.

4. Démontrer que $x\mapsto\mathscr{A}(x)$ est dérivable pour tout $x>0$ et en donner la fonction dérivée.

↪ Cours 2 p. 244

15 min

3 Introduire l'intégration par partie

On considère la fonction $f: x\mapsto x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on donner directement une primitive de f ?

2. Calculer sa dérivée et montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-f'(x)$. Donner une primitive de e^{-x} et en déduire une primitive de f.

3. Soit u et v des fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ et leurs dérivées u' et v' continues. Montrer que $\int_a^b uv'=[uv]_a^b-\int_a^v v'u$.

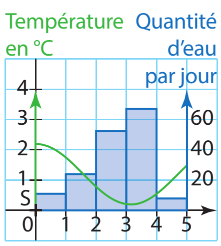
↪ Cours 2 p. 244

15 min

4 Comprendre la valeur moyenne

Une station météo relève la température et la quantité d'eau tombée et affiche les données suivantes.

Jour	1	2	3	4	5
Quantité d'eau en mm	12	24	52	64	8



1. Donner la valeur moyenne de cette série et son interprétation géométrique.

2. La courbe des températures est modélisée par $f=1{,}2+\cos(x)$ sur $[0\,;5]$.

a) Exprimer l'aire sous la courbe.

b) Quelle est la hauteur du rectangle de longueur 5 qui a la même aire que celle sous la courbe ?

↪ Cours 4 p. 248

Cours

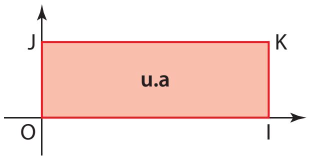
1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition **Unité d'aire**

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$,
l'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle ayant pour côté [OI] et [OJ]

Exemple

Dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ci-contre, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ. Si OI = 3 cm et OJ = 1 cm alors 1 u.a. = 3 cm^2.



Définition **Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle**

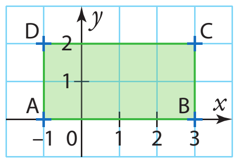
Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].
L'intégrale de *a* à *b* de la fonction *f* **est l'aire de la surface (aussi appelée domaine sous la courbe de *f* sur [*a* ; *b*]) délimitée par :**
- **la courbe,**
- **l'axe des abscisses,**
- **les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire.**

On la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple

Soit *f* la fonction constante définie par *f*(*x*) = 2.

Alors $\int_{-1}^{3} f(x)$c$=$ Aire(ABCD) $= 2 \times 4 = 8$ u.a.



Remarques

① $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel positif.

② $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car cette intégrale est l'aire d'un segment.

③ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que des valeurs de *a*, *b* et *f*. La variable *x* est dite « muette » on peut la remplacer par une autre lettre : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \ldots$

Propriété **Méthode des rectangles**

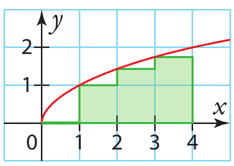
Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*]. On partage l'intervalle [*a* ; *b*] en *n* intervalles de même amplitude et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».
On note $\mathcal{A}_i$, resp. $\mathcal{A}_s$, l'aire des rectangles inférieurs (resp. supérieurs).

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_s = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

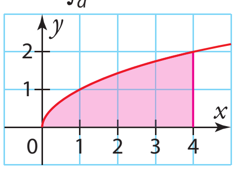
De plus, si la fonction est monotone : $\mathcal{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{A}_s$.

Exemple Pour $n = 4$

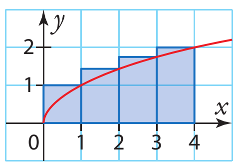
$\mathcal{A}_i$



$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



$\mathcal{A}_s$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s08-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer une intégrale par calcul d'aire

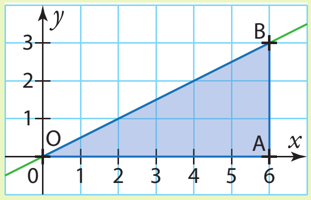
Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x$

Solution

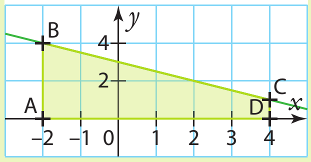
a) On trace la courbe représentative de f définie par $f(x)=0{,}5x$ **1** sur $[0\,;6]$ et f est une fonction linéaire continue et positive sur $[0\,;5]$. **2**



$\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle OAB. **3**

D'où $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$.

b) On trace la courbe représentative de g définie par $g(x) = 3 - 0{,}5x$ sur $[-2\,;4]$ et on identifie le domaine sous la courbe. **1**



g est continue et positive sur $[-2\,;4]$ et $\int_{-2}^4 3-0{,}5x\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze ABCD. **2**

D'où $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{AD \times (AB+DC)}{2} = \dfrac{6 \times (4+1)}{2} = 15$. **3**

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal et identifier le domaine sous la courbe.

2 Vérifier que la fonction est continue et positive sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.

3 Déterminer l'aire du domaine sous la courbe.

À vous de jouer !

1 Calculer $\int_2^5 2x\,\mathrm{d}x$.

2 Calculer $\int_{-4}^{-1} -2u-1\mathrm{d}u$.

↪ Exercices 32 à 39 p. 254

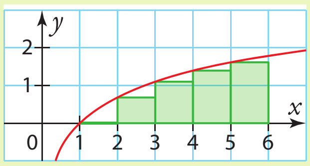
Méthode 2 Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

Énoncé

En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

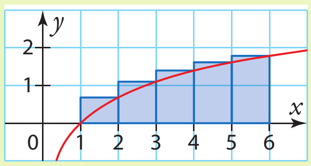
Solution

1



$\mathcal{A}_i = 0 + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5)$

$\mathcal{A}_i = \ln(120)$



$\mathcal{A}_s = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) + \ln(6)$

$\mathcal{A}_s = \ln(720)$

2 On en déduit $\ln(120) \leqslant \int_1^6 f(x)dx \leqslant \ln(720)$.

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de f et tracer les rectangles inférieurs et supérieurs.

2 Calculer l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs.

À vous de jouer !

3 En divisant l'intervalle [1 ; 6] en 10 intervalles égaux, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Soit $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2x+1)}{6}$.

Diviser $[-2\,;2]$ en 10 intervalles égaux, estimer $\int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

↪ Exercices 40 à 42 p. 254

2 Intégrale et primitive

Théorème **Existence d'une primitive**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s08-04

Remarque La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Théorème **Condition suffisante d'existence d'une primitive d'une fonction**

Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Démonstration

On admet qu'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in[a\,;b]$, $f(x)\geqslant m$. On considère alors la fonction g définie sur $[a\,;b]$ par $g(x)=f(x)-m\cdot g$ est positive sur $[a\,;b]$. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel pour les fonctions positives, la fonction définie par $G(x)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, pour $a\in[a\,;b]$, est une primitive de g.
La fonction $F: x\mapsto G(x)+mx$ est donc dérivable sur $[a\,;b]$ et $F'(x)=G'(x)+m=(f(x)-m)+m=f(x)$.
La fonction F est donc une primitive de f.

Exemples

La fonction ln est continue sur $[1\,;20]$, donc ln admet des primitives sur $[1\,;20]$.
D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F définie sur $[1\,;20]$ par $F(x)=\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Propriété **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$
On a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$. On notera communément $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Définition **Généralisation de la définition de l'intégrale**

Soit une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive quelconque de sur $[a\,;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Remarque $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ car $F(b)-F(a)=-(F(a)-F(b))$: le cas où $a>b$ devient possible.

Théorème **Intégration par parties**

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ qui admettent des dérivées u' et v' continues.
Alors $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

La dérivée du produit uv est donnée par $(uv)'=u'v+uv'$.
Alors uv est une primitive de $u'v+uv'$ sur $[a\,;b]$. Donc

$$[u(x)v(x)]_a^b=\int_a^b (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b (u'(x)v(x))\,\mathrm{d}x+\int_a^b (u(x)v'(x))\,\mathrm{d}x,$$ d'où la formule.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s08-05

Remarque

L'intérêt du théorème est de se ramener à une intégrale $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ plus facilement calculable que $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercices résolus

Méthode 3 Calculer des intégrales à l'aide d'une primitive

Énoncé

Déterminer chacune des intégrales suivantes et interpréter leurs valeurs de manière géométrique.

a) $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{1}\frac{t^2}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t$

Solution

a) La fonction $x \mapsto -x^2 + 3x + 4$ admet pour primitive la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$. **1**

$\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4} = \frac{269}{6}$. **2**

b) La fonction $g : t \mapsto \frac{t^2}{(t^3+1)^2}$ est définie et continue sur $[0\,;1]$.

On reconnaît une expression ressemblant à $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u(t) = t^3 + 1$.

Elle admet la fonction $G : x \mapsto \frac{-1}{3}\frac{1}{x^3+1}$ comme primitive. **3** $\int_{0}^{1}\frac{t^2}{(t^3+1)^2}\mathrm{d}t = G(1) - G(0) = \frac{1}{6}$.

Conseils & Méthodes

1 Chercher une primitive de f notée F.

2 Calculer l'intégrale c'est calculer $F(4) - F(-1)$.

3 Un candidat de primitive est $\frac{1}{u}$.

$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = \frac{-3t^2}{(t^3+1)^2}$ d'où la primitive de g.

À vous de jouer !

5 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{2}^{3}\frac{3x^2-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$

6 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{2}\frac{1}{(2x-3)^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{1}2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_{1}^{2}x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

↪ Exercices 43 à 52 p. 255

Méthode 4 Calculer une intégrale avec une intégration par parties

Énoncé

Calculer l'intégrale suivante avec la méthode d'intégration par parties : $\int_{1}^{\mathrm{e}}x\ln(x)\mathrm{d}x$.

Solution

On pose $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$. **1**

$u' : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Les fonctions u, v, u' et v' sont continues. **2**

Par intégration par parties, on a:

$\int_{1}^{\mathrm{e}}u(x)v(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_{1}^{\mathrm{e}} - \int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$. **3**

Conseils & Méthodes

1 On ne reconnaît pas une forme usuelle pour le calcul de primitive. Dans le produit, on recherche quelle fonction a une forme usuelle pour le calcul de primitive. Ici, on ne connaît pas la primitive de ln mais celle de x donc on pose $u'(x) = x$.

2 Définir u, v, u' et v' et vérifier que les fonctions sont continues.

3 Appliquer la formule.

À vous de jouer !

7 Calculer les intégrales suivantes avec la méthode d'intégration par parties.

a) $\int_{0}^{\pi}x\cos(x)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

8 Calculer les intégrales suivantes avec la méthode d'intégration par parties.

a) $\int_{1}^{\mathrm{e}}(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{\pi}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos(x)\mathrm{d}x$

↪ Exercices 53 à 59 p. 255

Cours

3 Propriétés

On considère dans cette section deux fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Propriété Linéarité de l'intégrale

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (\lambda f(t))\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b (f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

On pose F une primitive de f et G une primitive de g. Ainsi, la fonction $x \mapsto \lambda F(x)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda f(t)$. $\int_a^b (\lambda f(t))\mathrm{d}t = \lambda F(b) - (\lambda F(a)) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

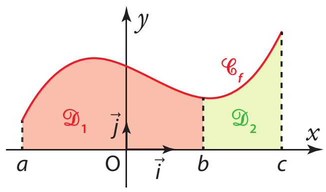
Propriété Relation de Chasles

Soit a, b, c trois réels.

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

On considère F une primitive de f. Peu importe l'ordre des trois valeurs a, b, c dans l'intervalle, on a :
$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.



Remarque Si f est continue et positive et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents.
$\mathscr{A}_{totale} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$ ou $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$

Propriété Intégrales et inégalités

Soit a et b deux réels. Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.
En particulier : si $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Démonstration

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) - g(x) \geqslant 0$. La fonction $f - g$ est donc continue et positive sur $[a\,;b]$. D'où, $\int_a^b (f(t) - g(t))\mathrm{d}t \geqslant 0$ par définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive. Ensuite, par linéarité de l'intégrale, on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.
On obtient alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Remarque Attention, les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.

① $\int_0^4 (t^2 - 2t)\mathrm{d}t = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^4 = \frac{16}{3} \geqslant 0$. Pourtant la fonction $t \mapsto t^2 - 2t$ n'est pas positive sur $[0\,;4]$: l'image de 1 par cette fonction est -1.

② $\int_0^2 (1 - t^2)\mathrm{d}t = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$ et $\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$. Ainsi, $\int_0^2 (1 - t^2)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t$, pourtant la fonction $t \mapsto 1 - t^2$ n'est pas tout le temps inférieure à la fonction $t \mapsto t^2$ sur $[0\,;2]$.

Propriété Inégalité en fonction des bornes d'intégration

Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et M un réel. Si $f(x) \leqslant M$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant M|b - a|$.

De même, si $m \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout x entre a et b, $f(x) \geqslant m$, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant m|b - a|$.

Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser la linéarité de l'intégrale

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Montrer que F définie par $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $\int_0^1 (3t - 2)e^x \, dx$.

Solution

1. F est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x = f(x)$. **1** F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. $\int_0^1 (3t-2)e^t \, dt = \int_0^1 (3te^t - 2e^t) dt = \int_0^1 (3te^t) dt - \int_0^1 (2e^t) dt = 3\int_0^1 te^t \, dt - 2\int_0^1 e^t \, dt$. **2**

Or $\int_0^1 te^t \, dt = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 1$. **3** $\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$. **3**

Finalement, $\int_0^1 (3t-2)e^t \, dt = 3 - 2(e - 1) = 4 - 2e$.

Conseils & Méthodes

1 Vérifier que F est dérivable et que $F' = f$.

2 Décomposer l'intégrale en utilisant la linéarité.

3 Calculer chaque terme séparément.

À vous de jouer !

9 On considère f et g deux fonctions telles que $\int_0^1 f(t) dt = 3$ et $\int_0^1 g(t) dt = -5$. Calculer $\int_0^1 (2f(t) - g(t)) dt$.

10 Calculer $\int_1^2 \ln(t) dt + \int_1^2 \left(t + \ln\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

Exercices 60 à 65 p. 256

Méthode 6 Majorer (ou minorer) une intégrale

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

2. En déduire un encadrement de $\int_1^2 f(x) dx$.

Solution

1. Une exponentielle est positive donc $f(x) \geqslant 0$. **1**

Si $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$ donc $-x^2 \leqslant -x$. **2**

La fonction exponentielle est croissante, donc $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. On en déduit $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

2. $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$ et les 3 fonctions $x \to 0$; f et $x \to e^{-x^2}$ sont continues.

On en déduit que $\int_1^2 0 \, dx \leqslant \int_1^2 f(x) dx \leqslant \int_1^2 e^{-x} \, dx$. **3**

$\int_1^2 e^{-x} \, dx = [-e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2} \leqslant e^{-1}$ puisque $e^{-2} > 0$. On a donc $0 \leqslant \int_1^2 f(x) dx \leqslant \frac{1}{e}$.

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.

2 Utiliser l'hypothèse $x \geqslant 1$.

3 À partir de l'inégalité de la fonction, en déduire l'inégalité des intégrales.

À vous de jouer !

11 On considère une fonction f telle que, pour tout $x \in [2 ; 4]$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

En déduire un encadrement de $\int_2^4 f(t) dt$.

12 Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction f_n telle que, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $e^{-n} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la convergence de la suite $\left(\int_0^1 f_n(t) dt\right)$.

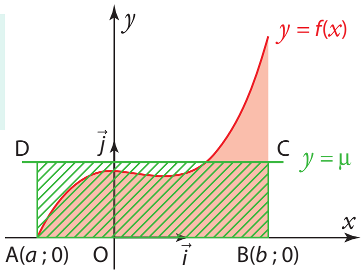
Exercices 66 et 67 p. 256

Cours

4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Remarque Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

Lorsque f est une fonction positive, on peut dire que l'aire sous la courbe de la fonction f entre a et b est donc égale à l'aire du rectangle ABCD de « largeur » $b-a$ et de « hauteur » μ.

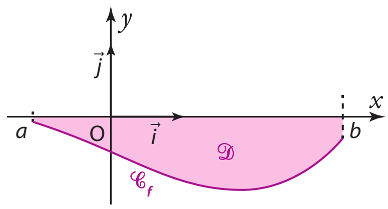
5 Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriété Aire sous la courbe d'une fonction continue et négative

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

L'aire du domaine $\mathscr{D}$, délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, est égale à :

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ (exprimée en unités d'aire).}$$



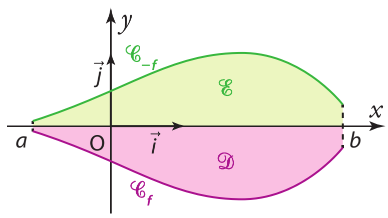
Démonstration

Par symétrie, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine E, c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par $g(x) = -f(x)$.

g étant continue et positive, l'aire de $\mathscr{D}$ est donc égale à :

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ (exprimée en u.a.).}$$

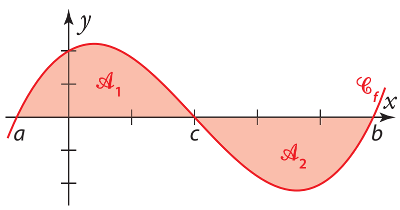
La primitive de g, G, est égale à l'opposé de la primitive de F : $G = -F$.



Remarque

Pour calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, on décompose l'intervalle en sous-intervalles où la fonction est de signe constant.

$$\mathscr{A}_{totale} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Propriétés Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x$$

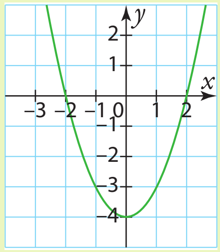
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s08-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Énoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer :
a) l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.
b) l'aire $\mathscr{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = 1$.



Solution

a) f est négative entre –2 et 2. **1** $\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)\mathrm{d}x$ **2**

Une primitive de $x^2 - 4$ est $\frac{x^3}{3} - 4x$ donc :

$$\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = -\left(-8 + \frac{8}{3}\right) + \left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$ **3**

b) f est positive sur [–5 ; –2] et négative sur [–2 ; 1]. **1**

$$\mathscr{B} = \int_{-5}^{-2}(x^2 - 4)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1}(x^2 - 4)\mathrm{d}x$$ **4**

$$\mathscr{B} = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-5}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{1} 3 = 36$$ **3**

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x)$ entre –2 et 2.
2 Écrire l'égalité entre aire et intégrale. f étant négative, c'est l'opposé de l'intégrale de f qui est égale à l'aire.
3 Vérifier que le résultat est positif.
4 Décomposer l'intervalle [–5 ; 1] en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant, puis calculer l'intégrale ou son opposé sur chacun des intervalles.

À vous de jouer !

13 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = -3$.

14 Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^3 + 1$.
1. Montrer que la solution de $g(x) = 0$ est $x = 2$.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -3$ et $x = 4$.

↪ Exercices 75 à 78 p. 257

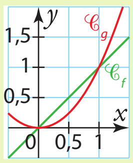
Méthode 8 Calculer une aire entre deux courbes

Énoncé

Soit f et g définies sur]0 ; +∞[par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Déterminer l'aire entre les deux courbes et entre $x = 0$ et $x = 1$.

Solution

Sur [0 ; 1], on a $x < x^2$ donc $f(x) \leqslant g(x)$. **1**
L'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\mathscr{A} = \int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$ u.a **2**



Conseils & Méthodes

1 Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.
2 Écrire une égalité entre intégrales et aire et on calcule les intégrales

À vous de jouer !

15 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x + 1$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle [–1 ; 2].

16 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 0{,}25x^2 - x - 3$ et $g(x) = 0{,}5x^2 - x + 9$.
Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle [–4 ; 4].

↪ Exercices 79 à 82 p. 257

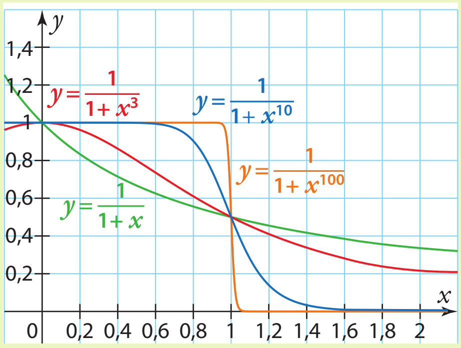
Méthode 9 Étudier une suite d'intégrales

Cours 3 p. 246

Énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^n}$ et on pose $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On donne les représentations graphiques de f_1, f_2, f_{10} et f_{100}.



1. a) Interpréter de manière géométrique l'intégrale I_n.

b) Conjecturer graphiquement le sens de variation de la suite (I_n) ainsi que sa convergence éventuelle.

2. Montrer que pour tout $t \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - t^n \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$.

3. Calculer $\int_0^1 (1-t^n)\,\mathrm{d}t$ et en déduire un encadrement de I_n.

4. Montrer que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

Solution

1. a) Si $t \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{1+t^n} \geqslant 0$ pour tout entier n.
I_n est l'intégrale d'une fonction positive donc correspond à l'aire sous la courbe représentative de la fonction f_n sur $[0\,;1]$. **1**

b) On peut conjecturer que si $n < m$, alors $f_n(x) < f_m(x)$ pour $x \in [0\,;1]$. $I_n < I_m$ d'où la conjecture de croissance de (I_n). **2**
La courbe représentative de f_n semble se rapprocher de la droite horizontale d'équation $y = 1$ sur $[0\,;1]$, dont l'aire sous la courbe vaut 1 u.a..

2. **3** Pour tout $t \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $t^n \geqslant 0$,

d'où : $1 + t^n \geqslant 1$

Donc : $\dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$. **4**

On étudie le signe de $1 - t^n - \dfrac{1}{1+t^n}$. **5** $1 - t^n - \dfrac{1}{1+t^n} = \dfrac{(1-t^n)(1+t^n)-1}{1+t^n} = \dfrac{-(t^n)^2}{1+t^n} < 0$ pour $t \in [0\,;1]$

donc $1 - t^n \leqslant \dfrac{1}{1+t^n}$. D'où pour $t \in [0\,;1]$: $1 - t^n \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$.

3. Une primitive de la fonction $t \mapsto 1 - t^n$ est $t \mapsto t - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ d'où $\int_0^1 (1-t^n)\,\mathrm{d}t = \left[x - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Comme pour $t \in [0\,;1]$, $1 - t^n \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$, on obtient : $\int_0^1 (1-t^n)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}t$. **6**

I_n vérifie l'encadrement $1 - \dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant 1$.

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$. D'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 1.

Conseils & Méthodes

1 L'interprétation d'une intégrale d'une fonction positive est une aire.

2 Utiliser la définition d'une suite croissante.

3 Établir séparément chaque inégalité pour obtenir un encadrement.

4 Construire l'inégalité à partir d'une inégalité simple.

5 Construire l'inégalité en étudiant le signe de la différence.

6 Pour obtenir une inégalité entre intégrales, il est possible d'intégrer une inégalité sur les fonctions.

À vous de jouer !

17 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on dire quant à sa convergence ?

18 On pose $u_n = \int_0^1 (t-1)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on dire quant à sa convergence ?

Exercices 119 à 122 p. 260

Méthode 10 Interpréter une intégrale

Cours 3 p. 246

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par :

$$f(x) = 4\ln(3x+1) - x + 3.$$

1. On note F la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par :

$$F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x.$$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

2. On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

D'après Bac ES 2012

Solution

1. a) $F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x$ est dérivable sur [0,5 ; 18] et

$F'(x) = \frac{4}{3}(3x+1) \square \frac{3}{3x+1} + 4\ln(3x+1) - \frac{2x}{2} - 1$ **1**

$F'(x) = 4 + 4\ln(3x+1) - x - 1$

$F'(x) = f(x)$ F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = F(8) - F(1) = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{64}{2} - 8 - \frac{16}{3}\ln(4) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5.$

$\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x \approx 61{,}4$ à 10^{-1} près.

2. x est exprimé en centaines de pièces donc une production entre 100 et 800 pièces correspond à $1 \leqslant x \leqslant 8$. **2**

La valeur moyenne de la fonction f est égale à $\mu = \frac{1}{8-1}\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\mu = \frac{1}{7}\left(\frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5\right)$; $\mu \approx 8{,}772\,755$.

f s'exprime en milliers d'euros donc $\mu \approx 8{,}772\,755$ milliers d'euros ou $\mu \approx 8\,772{,}755$ euros. **2**

Une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près est 8 700 euros.

Conseils & Méthodes

1 Calculer la dérivée de F.

2 Étudier les unités du problème.

À vous de jouer !

19 L'entreprise NVIDIO, spécialisée dans la fabrication de cartes graphiques, contrôle la qualité des condensateurs. D'après le cahier des charges, un condensateur est supposé conforme si l'énergie consommée est inférieure à 20 J. Cette énergie (en Joules) correspond à l'aire de la surface sous la courbe de la puissance instantanée p (exprimée en Watts) entre 0 et 10 secondes. Expérimentalement, on établit que la puissance instantanée d'un condensateur est donnée par la fonction :

$$f(t) = 20te^{-t}.$$

1. Montrer que $F(t) = (-20x - 20)e^{-x}$ est une primitive de f.

2. Les condensateurs ainsi fabriqués correspondent-ils au cahier des charges ?

20 On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)e^{-0{,}5x}.$$

La fonction f modélise la demande d'un produit informatique. $f(x)$ représente la quantité, en milliers, d'objets lorsque le prix unitaire est de x centaines d'euros.

1. Étudier les variations de f

2. Montrer que F définie par :

$$F(x) = (-2x - 20)e^{-0{,}5x}$$

est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

3. Calculer la demande pour un un prix unitaire de 200 euros à un produit près.

4. Déterminer la valeur moyenne de la demande, à 10 produits près, pour un prix compris entre 200 et 400 euros.

D'après bac ES Liban juin 2008

Exercices 123 à 126 p. 261

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s08-04

La propriété à démontrer

Soit f une fonction continue positive et croissante sur $[a\,;b]$.
Déterminer la dérivée de la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

On souhaite démonter cette propriété.

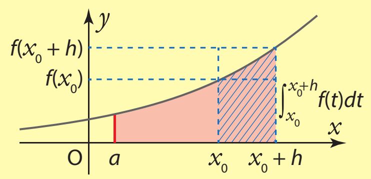
Comprendre avant de rédiger

On ne peut pas utiliser les théorèmes de dérivation classique. On revient donc à la définition de la fonction dérivée. On détermine $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}$ Cette limite est obtenue en calculant la limite à gauche puis à droite. Cela signifie que la fonction F_a est une primitive de f.

Rédiger

Étape 1 On s'intéresse à la limite à droite.

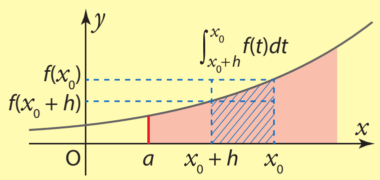
$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$ correspond à l'aire de la surface hachurée en bleu.



Par croissance de f, l'aire de la surface sous la courbe de f entre x_0 et x_0+h est encadrée par l'aire du rectangle de dimensions h et $f(x_0)$ et celle du rectangle de dimensions h et $f(x_0+h)$.

Étape 2 On s'intéresse à la limite à gauche.

Cette fois $x_0+h < x_0$, on obtient un encadrement de $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ par une aire de rectangle.



Étape 3 On conclut.

$F_a(a) = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$, F_a est la primitive de f qui s'annule en a.

La démonstration rédigée

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in [a\,;b]$.

Si $h > 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$$F_a(x_0+h)-F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

f est croissante, on a l'encadrement suivant :

$$hf(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant hf(x_0+h)$$

D'où : $f(x_0) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

f est continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Ainsi :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Si $h < 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$$F_a(x_0)-F_a(x_0+h) = -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

f est croissante, on a l'encadrement suivant :

$$-hf(x_0+h) \leqslant -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant -hf(x_0)$$

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0) \text{ et donc}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

La limite à gauche est égale à la limite à droite de 0 donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. F_a est dérivable sur $[a\,;b]$ et $F_a' = f$.

Pour s'entraîner

Démontrer le théorème d'existence d'une primitive dans le cas où la fonction est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.