28 Existence de primitives

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ admet des primitives sur $]2\,;+\infty[$.

b) Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

29 Primitives de x^n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive sur $I =]0\,;+\infty[$.

a) x **b)** $\dfrac{1}{x}$ **c)** x^7

d) $\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $\dfrac{1}{x^3}$ **f)** x^{-5}

30 Logique

Compléter les phrases ci-dessous.

a) Si F est une primitive d'une fonction f sur I, alors toute fonction de la forme **...** est aussi primitive de f sur I.

b) Si deux fonctions f et g continues sur I sont égales, alors leurs primitives **...**

c) Considérant deux fonctions F et G dérivables sur I, on a : $(F - G)' = 0$ **...** $F = G + k$, avec k réel.

d) Pour u et v fonctions dérivables, la fonction **...** admet une primitive de la forme $v \circ u$.

31 Primitives de fonctions usuelles

Choisir la bonne réponse.

1. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0\,;+\infty[$ est :

a $x \mapsto \sqrt{x}$ **b** $x \mapsto 2\sqrt{x}$ **c** $x \mapsto -\sqrt{x}$ **d** $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$ sur $I = \mathbb{R}$ est :

a $x \mapsto \sin(x)$ **b** $x \mapsto \sin(2x)$

c $x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ **d** $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x)$

3. Une primitive de $x \mapsto 3x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ est :

a $x \mapsto x^3 + x^2 + x$ **b** $x \mapsto x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

c $x \mapsto 3\,x^3 + x^2 + x$ **d** $x \mapsto 3x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

4. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

a $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ **b** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **c** $x \mapsto \ln(x)$ **d** $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

32 Équations différentielles

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) La fonction $f(x) = \cos(x)$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

b) La fonction $f(x) = e^{3x}$ est solution de l'équation $y' + 3y = 0$.

c) La fonction $f(x) = 2 - e^{x}$ est solution de l'équation $y' - y = 2$.

d) La fonction $f(x) = 2 + e^{-x}$ est solution de l'équation $y' + y = 2$.

33 Primitives et opérations

Recopier et compléter le tableau en proposant un exemple de fonction f et une primitive F.

Forme (u fonction dérivable)	$f(x)$	Primitive $F(x)$
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$		
$\dfrac{u'}{u^2}$		
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$\dfrac{u'}{u}$		
$u'e^u$		
$v' \times (u' \circ v)$		

34 Équations différentielles du type $y' = ay$

Choisir la bonne réponse.

1. La fonction $x \mapsto 3e^x$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' = 3y$ **b** $y' = -3y$ **c** $y' = -y$ **d** $y' = y$

2. La fonction $x \mapsto 5e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' = 2y$ **b** $y' = -2y$ **c** $y' = 5y$ **d** $y' = -5y$

35 Équations différentielles $y' = ay + b$

Choisir la bonne réponse.

1. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2}y = 10$ est la fonction constante égale à :

a 20 **b** -20 **c** 10 **d** -10

2. Une solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 2$ est :

a $x \mapsto e^{-2x} + 1$ **b** $x \mapsto e^{-2x} - 1$

c $x \mapsto e^{2x} + 1$ **d** $x \mapsto e^{2x} - 1$

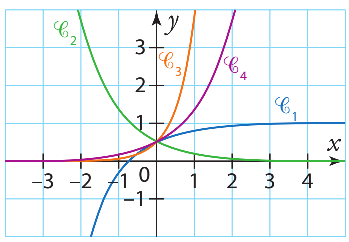
3. La fonction $x \mapsto 2 - e^{4x}$ est solution de l'équation différentielle :

a $y' - 4y = 8$ **b** $y' - 2y = 8$

c $y' - 8y = 4$ **d** $y' + 4y = 8$

36 Équations différentielles

Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ et qui prend en 0 la valeur $\dfrac{1}{2}$.



Exercices d'application

Montrer qu'une fonction est solution de $y' = f$

Méthode 1 p. 207

37 **1.** Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3x + 1$ et $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + e^x$ et $F(x) = \frac{-1}{3}x^3 + e^x + 1$

c) $f(x) = x^4 + x^3 + x$ et $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

2. Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$ et $F(x) = -x^2 + x - 8\ln(x-4)$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ et $F(x) = 2\sqrt{x} + x - 1$

38 **1.** Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = xe^x$

b) $f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2+1)^2}$ et $F(x) = \frac{e^x}{(x^2+1)}$

2. Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = e^x\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)$ et $F(x) = \sqrt{x}e^x$

b) $f(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$ et $F(x) = (x+1)\ln(x) - 1$

39 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = (x+1)^2$ et $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ et $F(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}$ et $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+3x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

40 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = 2\cos(2x+3)$ et $F(x) = \sin(2x+3)$

b) $f(x) = 1 + \tan^2(x)$ et $F(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

41 Vérifier que la fonction F est une primitive de f sur un intervalle I à déterminer.

a) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ et $F(x) = \frac{x}{\ln x}$

b) $f(x) = \frac{-3 + \ln x}{x^2}$ et $F(x) = \frac{x + 2 - \ln x}{x}$

c) $f(x) = x(2\ln x + 1)$ et $F(x) = x^2\ln x - 1$

d) $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$ et $F(x) = (\ln x)^2 + 5$

Primitive d'une fonction usuelle

Méthode 2 p. 207

42 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = e^x$; I = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; I = $]0\,;+\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$; I = $]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$; I = $]0\,;+\infty[$

43 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \frac{5}{3}x^3$; I = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{3}{2}x^2$; I = $\mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{-1}{x^4}$; I = $]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; I = $]0\,;+\infty[$

Ensemble des primitives d'une fonction usuelle, primitive avec conditions initiales

Méthode 3 p. 209

44 Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f admet des primitives, puis donner l'ensemble des primitives F de f.

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = x^7$

45 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

a) $f(x) = e^x$; $x_0 = 0$ et $y_0 = -e$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 4$ et $y_0 = 0$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 1$ et $y_0 = -5$

d) $f(x) = x^2$; $x_0 = -1$ et $y_0 = 2$

46 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

a) $f(x) = x^3$; $x_0 = -2$ et $y_0 = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x_0 = 1$ et $y_0 = \frac{5}{6}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $x_0 = \frac{1}{2}$ et $y_0 = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $x_0 = -1$ et $y_0 = 0$

47 La pente de la tangente en tout point $(x\,;y)$ d'une courbe est égale à $\frac{2}{x^2}$. Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point P(–1 ; –2).

Déterminer une primitive

Méthode 4 p. 209

48 Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1$
b) $f(x) = x^4 + x^2 + 5$
c) $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3$
d) $f(x) = 2\mathrm{e}^x + 3x^2 + 5$
e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + x + 5$

49 Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions f sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x + 2$
c) $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5x$ **d)** $f(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + 1$

50 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$
b) $f(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $f(x) = (3x^2 + 1)\mathrm{e}^{x^3+x} + 4$
d) $f(x) = 3(3x^2 + 1)(x^3 + x + 1)^2$

51 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}$

52 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f, sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+4x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+1}}$
c) $f(x) = \dfrac{2x+4}{(x^2+4x+1)^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2x+4}{(x^2+4x+1)^5}$

53 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f, sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = (x+1)^7$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+4)^3}$
c) $f(x) = 5x^2 - 3x + \dfrac{1}{x-2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$

54 Déterminer une primitive de chacune des fonctions f, sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = \cos(3x+1)$
b) $f(x) = \sin(2x+1)\cos^2(2x+1)$
c) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
d) $f(x) = \dfrac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Déterminer une primitive avec conditions initiales

Méthode 3 et Méthode 4 p. 209

55 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = (x+1)^5\,;\ x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
b) $f(x) = \mathrm{e}^{-7x} + x\,;\ x_0 = 0$ et $y_0 = \dfrac{-1}{7}$
c) $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x-2}\,;\ x_0 = \sqrt{2}$ et $y_0 = 1$
d) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-1)^2\,;\ x_0 = -1$ et $y_0 = -1$

56 Déterminer la primitive F de f vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = \dfrac{6x+1}{3x^2+x+1}\,;\ x_0 = 0$ et $y_0 = 0$
b) $f(x) = \dfrac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x+1}}\,;\ x_0 = 0$ et $y_0 = 2$
c) $f(x) = \cos(7x)\,;\ x_0 = \pi$ et $y_0 = 2$
d) $f(x) = \dfrac{2}{(x+4)^2}\,;\ x_0 = -3$ et $y_0 = 1$

57 TICE **1.** Justifier pourquoi la fonction $x \mapsto \ln(x) \times \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

2. À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, déterminer la primitive qui s'annule en 1.

```
deriver(exp(x)*ln(x))
```

$$\mathtt{ln(x)*exp(x)} + \frac{\mathtt{exp(x)}}{\mathtt{x}}$$

Équation différentielle $y' = ay$

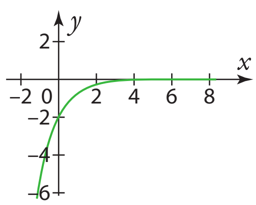
Méthode 5 p. 211

58 Choisir la bonne réponse.

1. Une solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est :
a $x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}$ **b** $x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$ **c** $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ **d** $x \mapsto \mathrm{e}^x$

2. La solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ qui prend la valeur 1 en 0 est :
a $x \mapsto \mathrm{e}^{5x}$ **b** $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-5x}$ **c** $x \mapsto \mathrm{e}^x$ **d** $x \mapsto \mathrm{e}^{-5x}$

3. La courbe ci-dessous représente :
a une fonction solution de l'équation $y' = -y$
b une fonction solution de l'équation $y' = y$
c une fonction solution de l'équation $y'' = 0$
d une fonction solution de l'équation $y'' = x$



Exercices d'application

59 Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 4y$ **b)** $y' = \frac{3}{2}y$

c) $y' + 2y = 0$ **d)** $3y' - y = 0$

60 **1.** Résoudre l'équation $y' - 10y = 0$.

2. Déterminer la solution qui prend en $-0{,}1$ la valeur $\frac{2}{e}$.

61 **1. a)** Résoudre $2y' + 5y = 0$.

b) Déterminer la solution qui prend en 2 la valeur 1.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-5}{2}x+5}$.

a) Vérifier que f est la solution trouvée à la question **1. b)**.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

62 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit l'équation (E) : $y' = y - 1$.

Proposition 1 : Les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{x} - 1$.

2. Proposition 2 : Les fonctions $x \mapsto e^{x}$ et $x \mapsto 0$ sont les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et égales à leur dérivée.

3. Considérons l'équation (F) : $y = y' + x + 1$.

Proposition 3 : La fonction $e^{x} + x + 2$ est solution.

Proposition 4 : Il n'existe aucune fonction affine solution.

63 Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telles que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids P du moment. Pour certaines espèces de coton, $\frac{dP}{dt} = 0{,}21P$.

1. Déterminer la forme de la fonction P.

2. Évaluer le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

64 On considère dans les questions suivantes les fonctions solutions de l'équation $y' = \frac{1}{2}y$ et leurs courbes représentatives.

1. Soit un point M_0 donné de coordonnées $M_0(x_0\,;\,y_0)$. Combien de courbes passent par M_0 ?

2. Montrer que les tangentes à toutes les courbes au point d'ordonnée 2 sont parallèles à la droite $y = x$.

65 Le tableau suivant donne l'évolution des ventes d'un produit commercialisé depuis 2000. **SES**

Rang de l'année à partir de 2000	0	5	10	15	19
Montant des ventes en milliers d'euros	0,8	1,3	2,17	3,59	5,34

1. Ces résultats incitent à ajuster ces ventes par une fonction $f : x \mapsto ae^{bx}$, avec a et b réels.

Déterminer les valeurs de a et de b telles que $f(0) = 0{,}8$ et $f(10) = 2{,}17$.

On donnera une valeur arrondie de b au millième.

2. Écrire l'équation différentielle dont la fonction f est solution.

3. Estimer, en milliers d'euros, le montant des ventes en 2023.

Équation différentielle $y' = ay + b$

Méthode 6 p. 211

66 Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) $y' = 2y - 1$ **b)** $y' = \frac{-1}{4}y + 1$

c) $y' + 2y = 3$ **d)** $2y' - 5y = 1$

67 Choisir la bonne réponse.

1. Une solution de l'équation différentielle $y' + 7y = 21$ est :

a $e^{-7x} + 3$ **b** $e^{7x} - 3$

c $e^{-7x} - 3$ **d** $e^{7x} + 3$

2. La solution de l'équation différentielle $y' = -y + 5$ qui prend la valeur 1 en 0 est :

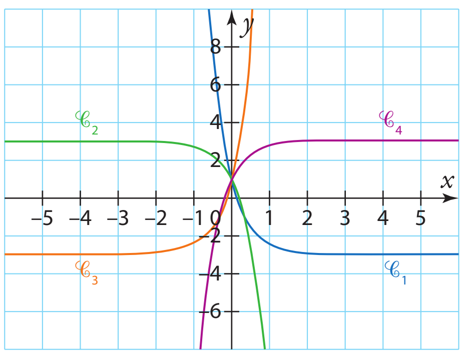
a $5 - 4e^{-x}$ **b** $1 - e^{-5x}$

c e^{x} **d** $5 - 4e^{-5x}$

68 **1.** Résoudre $y' - 2y = 5$.

2. Déterminer la solution qui prend en 0 la valeur 0.

69 Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ et qui prend en 0 la valeur 1.



70 **1. a)** Résoudre l'équation $5y' - y = 4$.
b) Déterminer la solution qui prend en 5 la valeur -5.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$.
a) Vérifier que f est la solution trouvée à la question **1. b)**.
b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Modélisation par une équation différentielle

Méthode 9 p. 214

71 Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f, qui à l'altitude x en kilomètres associe la pression atmosphérique en hectopascal, est la solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}12y = 0$ et qui vérifie $f(0) = 1\,013{,}25$.
1. a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
b) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale.
2. En utilisant la fonction f :
a) Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.
b) Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.

72 Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en minutes). On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $Q'(t) = 0{,}1 - kQ(t)$.
1. Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et t.
2. La limite de $Q(t)$ en $+\infty$ dépend-elle de k ?
Interpréter dans le contexte.
3. Calculer k sachant qu'au bout de 3 heures, Q est égale à la moitié de la valeur limite.

73 Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ohms. En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de t secondes aux bornes du condensateur, u est alors une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle : **Physique**

$$y' + \frac{1}{RC}y = 0.$$

1. Résoudre l'équation et en déduire la fonction u.
2. Pour cette question, $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$.
Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

74 Pour étudier une population N, **SES**
le modèle de Malthus consiste à écrire que le taux de variation de la population vérifie :

$$N'(t) = \beta N(t) - \delta N(t)$$

où β est le taux de fertilité (nombre de naissances par unité de temps et par individu) et δ le taux de mortalité (nombre de décès par unité de temps et par individu), que l'on suppose constants.
1. En notant N_0 la population de départ, exprimer N en fonction de β, de δ et de N_0.
2. Si la fertilité l'emporte sur la mortalité, c'est-à-dire si $\beta > \delta$, le modèle prévoit une croissance « exponentielle ». Justifier cette expression.
3. Si, au contraire, $\beta < \delta$ préciser le type de croissance du modèle.

Thomas Robert Malthus (1766-1834), économiste britannique, a le premier énoncé ce modèle en 1798.
Ce modèle, s'il peut convenir pour des populations isolées de bactéries sur un intervalle de temps court, est beaucoup trop simpliste pour rendre compte de populations interagissant avec leur milieu, comme la nôtre.

75 L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence. Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.
La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes.
On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}12y = 0{,}003$.
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de 0,5 mole par litre ($\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$).
1. a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
b) Donner $f(0)$.
c) Vérifier que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 0{,}475e^{-0{,}12t} + 0{,}025$.
2. a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenir une concentration en octane dans la cuve de 0,25 mole par litre.
4. a) Calculer, en justifiant, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
Interpréter le résultat dans le contexte.
b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure.
Expliquer ce choix.

Exercices d'entraînement

Transformer l'écriture d'une fonction pour trouver ses primitives

76 **1.** Montrer que, pour tout x réel, on a :
$$\sin^3(x) = \sin(x) - \sin x \times \cos^2(x).$$
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin^3(x)$.
3. Déterminer la primitive qui s'annule en π.

77 **1.** On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = (1 + 2x)e^{2x}.$$
En développant $h(x)$, identifier une forme $u'v + uv'$ et en déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
2. Procéder de la même façon pour déterminer une primitive de g telle que $g(x) = (-\sin(x) + \cos(x))e^x$.

78 En remarquant que $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui prend la valeur 1 en e.

79 À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, **TICE**
déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ qui s'annule en 1.

```
deriver(ln(sqrt(x^2+1)))
```
$$\frac{x}{x^2+1}$$

80 On considère une fonction F de la forme $F(x) = axe^{1-x}$.
1. Déterminer le réel a de sorte que F soit une primitive de la fonction $f(x) = (2 - 2x)e^{1-x}$.
2. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
En particulier, donner la primitive qui prend en 0 la valeur 2,75.

Étude complète d'une fonction primitive

81 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = te^{t-1} + 1.$$
1. Montrer que, pour tout réel t, f est une primitive de $(t+1)e^{t-1}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

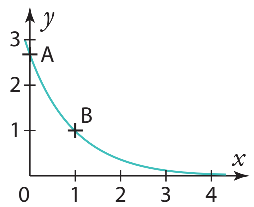
82 On considère la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$F(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction F dans le repère (O ; I, J).
1. Montrer que, pour tout réel x, appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, F est une primitive de la fonction $f(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de F sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

83 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{e^x+1}.$$
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. a) Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + 2 + \ln(4) - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$.
b) En déduire l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

84 On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ sur $]1\,;+\infty[$.
1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$, $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$.
2. En déduire l'ensemble des primitives de g sur $]1\,;+\infty[$.
3. Soit G une primitive quelconque de g sur $]1\,;+\infty[$. Déterminer la limite de G en $+\infty$ et en 1.

85 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 10$.
Proposition 1 : Les fonctions $x \mapsto e^{2x} + 5$ et $x \mapsto 5$ sont les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E).
Proposition 2 : Les solutions sont de la forme $x \mapsto e^{2x} + 5k$, avec k réel.
2. Considérons l'équation (F) : $y = y' + x^2$.
Proposition 3 : La fonction $x \mapsto e^x - x^2$ est solution.
Proposition 4 : Si un polynôme P est solution, alors il est du second degré.

86 On a représenté ci-dessous, **Algo**
dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$.



1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit c un réel donné de l'intervalle [1 ; e].
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = c$ d'inconnue x.
3. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^{1-x}$.
4. On considère l'algorithme écrit en langage **Python**.

```python
from math import*
def fonction_solution(x):
    return(e**(1-x))
p=int(input( "p=", ))
x=0
while fonction_solution(x)>10**(-p):
    x=x+1
print(x)
```

Pourquoi est-on certain que, pour n'importe quel entier naturel p rentré, l'algorithme va s'arrêter ?

Modéliser avec des équations différentielles

87 Dans un environnement où la température est maintenue à zéro degré Celsius, la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Dans une pièce où la température est maintenue à 0 °C, un objet chauffé à 100 °C voit sa température chuter à 45 °C en dix minutes.
On note $T(t)$ la température (en °C) de l'objet après t minutes.
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction T. Déterminer la fonction T solution.
2. En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25 °C ? Arrondir à la minute.

88 Le nombre de bactéries B d'une culture passe de 600 (à l'instant 0) à 1 800 en 2 heures. Algo SVT
On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes.
1. Trouver :
a) une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
b) une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ au temps t.
c) le nombre de bactéries après 4 heures.
d) le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.
2. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne le résultat attendu à la question **1. d)** (à la demi-heure près).

```
t←0
B←600
Tant que …
12 000
t←…
Fin tant que
```

89 La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four, et la température est de 1 400 °C à la sortie du four. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.
1. a) Résoudre sur $[0 ; +\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.
b) Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 1\,370\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 30$.
2. a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
b) Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?
D'après Bac Sti2d, France métropolitaine, 2017.

90 Dans une économie keynésienne simple, SES
la consommation C s'exprime par l'égalité : $C = 360 + 0{,}8Y$ et $I = 120$, où Y est le revenu et I l'investissement.
Lorsque le marché est hors de l'équilibre, on peut supposer que le taux d'ajustement du revenu Y vérifie l'équation :
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0{,}25\,(C + I - Y).$$
À la période initiale, le revenu Y_0 est égal à 2 000.
1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction Y.
2. Déterminer la fonction Y.
3. Étudier la limite de la fonction Y en $+\infty$ et en déduire une conclusion sur la stabilité de l'équilibre de cette économie.

91 **1.** Soit l'équation différentielle $y' = -0{,}7y$. SES
La solution f de cette équation, telle que $f(0) = \mathrm{e}^{2{,}1}$, représente la fonction de demande d'un produit. Elle met en correspondance le prix $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix. Donner l'expression de $f(x)$.
2. La fonction g définie par $g(x) = 0{,}5x + 0{,}7$ est la fonction d'offre de ce produit. Elle met en correspondance le prix $g(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité x, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.
On appelle h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.
a) Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
b) Étudier le signe de $h'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$. En déduire que la fonction h est strictement monotone sur cet intervalle.
c) Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note p_0 le prix d'équilibre et q_0 la quantité échangée sur le marché à ce prix. Dans la situation étudiée, on a donc $f(q_0) = g(q_0)$. Déduire des questions précédentes la valeur de q_0, puis calculer p_0.

92 Lors de la fabrication du clinker, un constituant du ciment, une grande quantité de CO_2 est libérée. Dans une cimenterie, sa fabrication s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de 900 000 dm^3. À 20 h, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.
1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de 5 400 dm^3.
2. Pour diminuer ce taux durant la nuit, l'entreprise a installé une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20 h, exprimé en minutes. t varie dans l'intervalle $[0 ; 690]$. On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}01y = 4{,}5$.
a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
b) Vérifier que, pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 690]$, $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 450$.
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21 h ?

Exercices d'entraînement

93 En biologie, un modèle proposé pour la croissance d'êtres vivants est le suivant : tout individu de taille maximale M admet une vitesse de croissance proportionnelle à la taille manquante. Autrement dit, si on note $C(t)$ la taille à l'instant t, cette fonction est solution de l'équation différentielle $C'(t) = k(M - C(t))$ où k est un réel positif. **SVT**

1. En supposant $C(0) = 0$, exprimer, en fonction de k et de M, les solutions de cette équation différentielle.

2. Vérifier que C est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.

3. Une espèce de maïs a une taille maximum de 180 cm et met 15 jours pour atteindre la moitié de celle-ci. Au bout de combien de jours sera-t-elle à moins de 10 cm de sa taille maximale ?

94 La loi de Newton dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la différence entre sa température T et la température ambiante T_0 (supposée constante), ce qui se traduit par l'équation : $T' = \alpha(T - T_0)$, où α est appelé constante de proportionnalité et est déterminée par des expériences en laboratoire. Si la température initiale est 100 °C, alors on établit que $\alpha = -0{,}1$. La pièce est supposée maintenue à une température de 20 °C. **Physique**

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction T dans cette situation.

2. a) Vérifier que la fonction constante égale à 20 est solution de l'équation.

b) En déduire la solution T.

95 On considère l'équation différentielle $100y' + 12y = 0$ avec pour condition initiale $y(0) = 100$. **Algo**

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. On considère l'algorithme suivant, en langage Python. Indiquer à quoi correspondent les valeurs de a et de b obtenues en sortie de cet algorithme ?

```
from math import*
def f(x):
    return(100*exp(-0.12*x))
a=0
b=5
while(abs(b-a)>0,01)0:
    m=(a+b)/2
    if f(m)>80:
        a=m
    else:
        b=m
print(a,b)
```

Équation différentielle $y' = ay + \varphi$ ou s'y ramenant

Méthode 10 p. 215

96 On considère les équations différentielles suivantes définies sur $\left]\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

(E) : $y' + (1 + \tan(x))y = \cos(x)$

(F) : $y' + y = 1$

1. a) Trouver une fonction constante solution de (F).

b) Donner l'ensemble des solutions de (F).

2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\left]\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos(x)$.

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (F).

3. En déduire la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

97 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = e^{2x}$.

1. Déterminer le réel a tel que la fonction $x \mapsto p(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

3. Déterminer la solution particulière vérifiant que $y(0) = 1$.

98 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}.$$

A ▶ Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.

2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E′).

3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

B ▶ On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

D'après Bac S, Antilles Guyane, 2008.

Travailler le Grand Oral

99 **Oral** Présenter le travail suivant.

1. Trouver un exemple de situation en sciences physiques (chute verticale, …) ou en SES (offre et demande, équation logistique) pouvant être modélisé par une équation différentielle ou un système d'équations différentielles.

2. Expliquer le modèle et la méthode de résolution.

100 **Oral** Présenter le travail suivant : rechercher des équations différentielles d'ordre supérieur à 1 et proposer un exposé sur une méthode de résolution d'une de ces équations.

101 Temps de refroidissement

Algo

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C.
Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C.
Théo lui rétorque que quand il sera à 37 °C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g dépendant du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(\text{E}) : y' + 0{,}04y = 0{,}8.$$

1. a) Trouver une fonction constante solution de (E).
b) En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
c) Donner sa solution g définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, répondre aux questions suivantes.
a) La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 °C ?
b) Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.
c) Écrire un algorithme qui permet de trouver la minute à partir de laquelle le plat est à une température de 30 °C. Programmer cet algorithme sur la calculatrice.

Bac STI2D, Polynésie, 2013.

102 Équation de la forme $y' = ay + \varphi$ où φ est une fonction

On cherche à résoudre l'équation (E) $y' = y + e^x$.
1. Montrer que la fonction $g(x) = xe^x$ est solution de l'équation (E).
2. a) Montrer l'équivalence suivante : une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $y' = y$.
b) En déduire la forme de la fonction $f - g$, puis celle de f.
3. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend en 1 la valeur 2.

103 Déterminer une primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-x^2 + x + 2)e^x.$$

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, F' désigne la dérivée de F sur $\mathbb{R}$.
1. Déterminer $F'(-1)$ et $F'(2)$.
2. On admet qu'il est possible de trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $F(x) = (ax^2 + bx - 1)e^x$.
a) Exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de a et b.
b) En utilisant les résultats trouvés à la question **1.**, démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x.$$

104 Un modèle de bénéfice

SES

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 2009.
Chaque année est identifiée par son rang. À l'année 2009, est attribué le rang 0 et à l'année 2009 + n le rang n. Ainsi, 2011 a le rang 2.
Le tableau suivant indique pour chaque rang d'année x_i le bénéfice ou la perte réalisé(e), exprimé(e) en milliers d'euros et noté(e) y_i.

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	– 25,000	– 3,111	9,892	17,788	22,598	25,566

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction.
On fait l'hypothèse que la fonction f solution de l'équation $2y' + y = 30$ permettra une bonne modélisation.
1. Déterminer la fonction f.
2. On considère que l'approximation des bénéfices par f est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées y_i et les valeurs approchées x_i est inférieure à 0,5. L'approximation par f est-elle satisfaisante ? (Le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question.)
3. En considérant toujours ce modèle :
a) En quelle année le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera-t-il 29 800 euros ?
b) Ce bénéfice atteindra-t-il 30 000 euros ? Justifier.

105 QCM

On considère l'équation (E3) : $2y' + y = 10$.
On appelle g la fonction solution de (E3) telle que :

$$g(2) = 11.$$

Choisir la bonne réponse.
1. La limite de g en $-\infty$ est égale à :
a $+\infty$ **b** $-\infty$ **c** 0 **d** 10

2. La courbe représentative de g admet au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation :
a $y = -x$ **b** $y = x$ **c** $y = \frac{1}{2}x$ **d** $y = \frac{-1}{2}x$

Exercices bilan

106 Fonctionnement d'un stimulateur cardiaque

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certaines personnes dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant. Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad ;
- un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^{6} ohms.

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

A ▶ La tension U, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction dépendant du temps t, en secondes. On admet que $u(0) = 5{,}6$ et que cette fonction u, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, vérifie pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ la relation $u'(t) + \dfrac{1}{RC}\, u(t) = 0$, où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. a) Vérifier que la fonction u est solution sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle $y' + 1{,}25y = 0$.

c) Montrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a $u(t) = 5{,}6\mathrm{e}^{-1{,}25t}$.

2. a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) Ce résultat était-il prévisible ? Justifier la réponse.

B ▶ En réalité, lorsque la tension U aux bornes du condensateur a perdu 63 % de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est à nouveau égale à 5,6 volts.

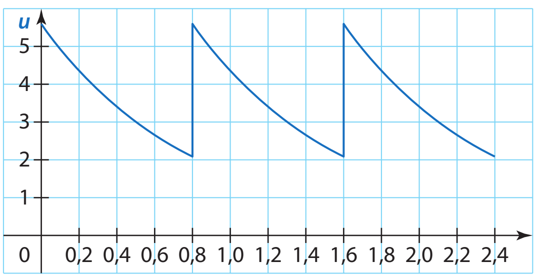
1. a) Vérifier que la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.

b) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'équation :

$$5{,}6\mathrm{e}^{-1{,}25t} = 2{,}072.$$

c) Interpréter le résultat trouvé.

2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute. On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 seconde.



Ce rythme correspond-il à celui d'un adulte au repos et en bonne santé ? Justifier la réponse.

Bac STI2D, France métropolitaine, La Réunion, 2017.

107 Satellites

Algo

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé rentrée atmosphérique. Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h de son orbite, exprimée en kilomètres. Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

A ▶ Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y :

$$(\mathrm{E}) : 40y' - y = 0.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2\,000$.

B ▶ Étude d'un deuxième satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à un deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0{,}012\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.

On considère l'algorithme suivant, en langage **Python**.

```python
from math import*
def fonction_coefficient(K,h):
    return(K*0.012*exp(0.025*(h-150)))
K=0
while fonction_coefficient(K,500)<1400:
    K=K+0.5
print(K)
```

1. Quel est le rôle de cet algorithme ?

2. Quelle valeur K affiche-t-il en sortie ?

C ▶ Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11. La fonction T, associée à ce satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $T(h) = 0{,}132\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}$.

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.

2. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

a) Montrer que $T(h + 10) = \mathrm{e}^{0{,}25} \times T(h)$.

b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

D'après Bac STI2D, Antilles-Guyane, 2019.

Déterminer la primitive d'une fonction

Fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F avec k réel
$f(x) = a$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x^n$, n entier négatif non nul sauf -1	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + k$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + k$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + k$

Fonctions composées

Forme de la fonction	Primitive à une constante près
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$

Résoudre une équation différentielle

$y' = f$

Trouver une solution revient à trouver une primitive de f.

$y' = ay$

Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

$y' = ay + b$

- Une solution particulière constante est de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a}$.
- Les solutions générales sont de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a} + Ke^{ax}$, avec K réel.

$y' = ay + \varphi$

- Une solution particulière constante est de la forme $x \mapsto P(x)$.
- Les solutions générales sont de la forme $x \mapsto P(x) + Ke^{ax}$, avec K réel.

Préparer le BAC — Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle	Méthode 1	1, 2, 37, 38
▶ Déterminer une primitive	Méthode 2, 3, 4, 7	4, 6, 8, 14, 42, 44, 48, 55, 76
▶ Résoudre l'équation $y' = ay$ ou $y' = ay + b$	Méthode 5, 6	10 à 13, 58, 66
▶ Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$	Méthode 8	18, 19, 69, 70
▶ Modéliser des phénomènes	Méthode 9	20, 21, 71, 72
▶ Résoudre une équation $y' = ay + \varphi$ (a réel non nul, φ fonction)	Méthode 10	22, 23, 96, 97

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-s07-07

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
108 La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de :	e^{-2x}	$-2\mathrm{e}^{-2x}$	$-2x\mathrm{e}^{-2x}$	$(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$
109 La fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2\ln(x)$ est une primitive de :	$x(1+2\ln(x))$	$x(1+\ln(x))$	$x-2x\ln(x)$	$2x\ln(x)$
110 La solution f de l'équation différentielle $y' = 2y - 6$ et qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est :	$f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 3$	$f(x) = -2\mathrm{e}^{2x} + 3$	$f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} - 3$	$f(x) = -2\mathrm{e}^{2x} - 3$
111 Une solution g de l'équation différentielle $y'' + y = -3$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :	$g(t) = \cos(t) + 3$	$g(t) = \cos(t) + \sin(t) - 3$	$g(t) = \cos(3t) + \sin(3t)$	$g(t) = 2\cos(t) - \sin(t)$
112 La fonction $f(x) = \cos(x)$ est solution de l'équation différentielle :	$y' + y = 0$	$y' - y = 0$	$y'' + y = 0$	$y'' - y = 0$
113 On considère l'équation (E1) : $y' = 2 - 2y$. On appelle u la fonction solution de (E1) telle que $u(0) = 0$. On a alors $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)$ égal à :	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{-1}{2}$	1	-1
Pour les exercices **114** et **115**, on considère l'équation (E2) : $y' = -y + 2$. On appelle f la fonction solution de (E2) telle que $f(\ln 2) = 1$.				
114 La limite de f en $+\infty$ est égale à :	$+\infty$	$-\infty$	0	2
115 La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur :	2	-2	0	$\dfrac{1}{2}$

116 Découvrir une primitive

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

Pour tout réel x, on pose $G(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{x-1} + x$ où a et b sont des nombres réels.
Déterminer les valeurs de a et de b de sorte que G soit une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
(On pourra vérifier que $h(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.)

Méthode 7 p. 212

117 Culture de microbes

SVT

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer, en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

Méthode 5 p. 211

118 Étude d'une fonction

On considère les deux équations différentielles :

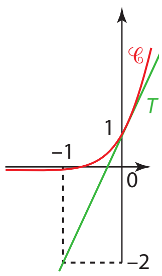
$$(1) : y' = 2y \text{ et } (2) : y' = y.$$

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles, sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormal. Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

où f_1 est une solution de l'équation (1) et f_2 une solution de l'équation (2).



a) À partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$, puis montrer que la droite T a pour équation $y = 3x + 1$. En déduire $f'(0)$.

b) À l'aide des valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$ trouvées à la question précédente, déterminer les fonctions f_1 et f_2.
En déduire que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$.

c) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis, en mettant e^x en facteur dans l'expression de $f(x)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

d) Calculer la valeur exacte de l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

Méthode 5 p. 211

119 Primitive et aire sous une courbe

Algo

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. a) Soit u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = x \text{ et } v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

Vérifier que $f = 2(u'v + uv')$.

b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

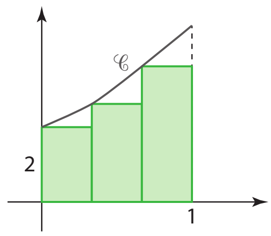
2. On donne l'algorithme suivant où les variables k et n sont des nombres entiers naturels et la variable s est un nombre réel.

```
Saisir n
s←0
Pour k allant de 0 à n-1
s←s+(1/n)f(k/n)
Fin pour
```

On note s_n le nombre calculé à la fin de cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine en vert sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?



Méthode 4 p. 209

D'après Bac S, France métropolitaine, 2013

120 Problème ouvert (1)

Résoudre l'équation $y'(x) + y(x) = g(x)$ avec $y(0) = 0$ en utilisant la définition suivante pour $g(x)$:

- $g(x) = 1$ si $x \leqslant 2$;
- $g(x) = 0$ si $x > 2$.

Méthode 10 p. 215

121 Problème ouvert (2)

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions suivantes :
$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^x$ avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$.

Méthode 10 p. 215

Exercices vers le supérieur

122 Deux modèles pour une même étude

Algo

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année. Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

A ▶ Un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n. On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. On considère l'algorithme suivant en langage Python qui donne la liste de certaines valeurs de la suite (u_n).

```
from math import*
N=int(input())
L=[ ]
u=1
L.append(u)
for i in range (1,N) :
      u=(((u*(20-u))/10)
      L.append(u)
print(L)
```

a) À quoi correspond l'instruction `L.append(u)` ?
b) Combien de nombres seront dans la liste L si on rentre au départ un entier N égal à 50 ?

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$.
a) Étudier les variations de f sur $[0\,;20]$.
b) En déduire que, pour tout $x \in [0\,;10]$, $f(x) \in [0\,;10]$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

5. Modifier l'algorithme afin qu'il s'arrête dès que u_n dépasse 5.

B ▶ Un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E1) : $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$.
b) Résoudre l'équation (E1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{10}{9e^{\frac{-1}{2}x} + 1}.$$

3. Étudier les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. Écrire un algorithme qui permet de calculer en quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement a dépassé un million.

D'après Bac S, Pondichéry, 2008.

123 Progression d'une épidémie

Algo

Dans cet exercice, on étudie une épidémie dans une population.
Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0{,}01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$\text{(E)} : y' = 0{,}05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;30]$ par :

$$f = \frac{1}{y}.$$

Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si f satisfait aux conditions $f(0) = 100$ et $f' = -0{,}5f + 0{,}05$.

2. a) Déterminer une expression de f, puis en déduire celle de la fonction y.
b) Indiquer à quoi sert l'algorithme suivant, en langage Python, dans le contexte de cette étude.

```
from math import*
def epi(x):
      return(1/(99.9*exp(-0.5*x)+0.1))
x=1
while epi(x)<5:
      x=x+1
print(x)
```

3. a) Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.
b) Étudier la limite de y en $+\infty$ et l'interpréter.

D'après Bac S, Amérique Nord, 2009.

124 Équations de la forme $y' = ay + \varphi$

On considère l'équation différentielle (E) :

$$2y' - y = \cos(x).$$

1. Déterminer une solution particulière g sous la forme $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

125 Sans aide

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.
a) $2y' - y = \cos x$
b) $y' - 2y = x\,e^{2x}$

126 En économie

SES

On considère une fonction f qui modélise sur l'intervalle $[0\,;14]$ la fonction coût total de production, en euros, d'un produit.

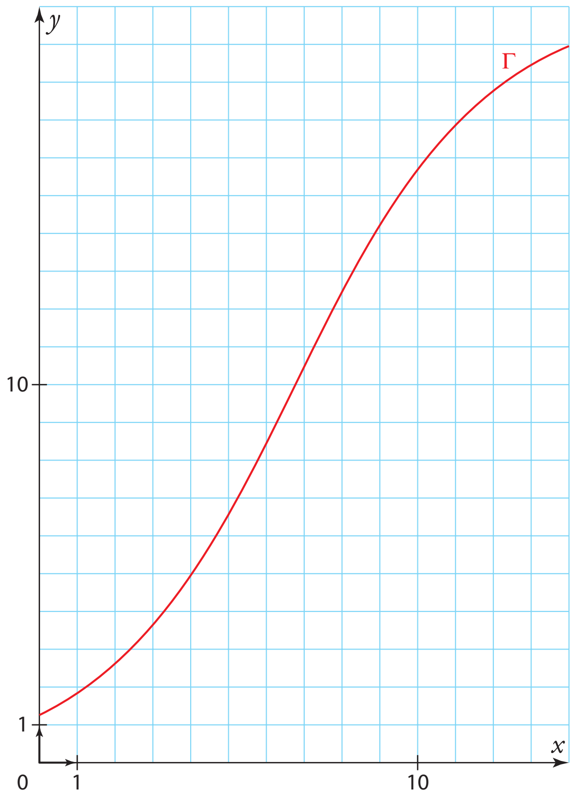
Les lois de la logistique ont permis d'établir que la fonction $P=\frac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle $P'=-0{,}4P+0{,}02$ avec $P(0)=\frac{4}{5}$.

1. Déterminer la fonction P, puis vérifier que la fonction f s'écrit $f(q)=\frac{20}{1+15e^{-0{,}4q}}$.

Préciser la valeur de $f(0)$.

2. Étudier les variations de f sur $[0\,;14]$.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique Γ de la fonction f.



Pour tout q dans l'intervalle $[0\,;14]$, le quotient $\frac{f(q)}{q}$ est appelé coût moyen de production de q tonnes de produit.

a) Pour q dans l'intervalle $[0\,;14]$, soit Q le point d'abscisse q de la représentation graphique Γ de la fonction f.

Montrer que le coefficient directeur de la droite (OQ) est égal au coût moyen $\frac{f(q)}{q}$.

b) L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production.

Par lecture graphique, indiquer la valeur de q qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

127 Équation différentielle et changement de variable

On considère l'équation différentielle (E) $y'=-\frac{1}{20}y(3-\ln y)$.

1. Démontrer l'équivalence suivante :

une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0\,;+\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)[3-\ln f(t)]$

si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ vérifie, pour tout t de $[0\,;+\infty[$, $g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$.

2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{H}) : z'=\frac{1}{20}z-\frac{3}{20}.$$

3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0\,;+\infty[$:

$$f(t)=\exp\left(3+C\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

(la notation exp désigne la fonction exponentielle).

4. Dans cette question on considère la solution f définie par :

$$f(t)=\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

c) Résoudre dans $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t)<0{,}02$.

128 Équation différentielle du second ordre

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout nombre réel x, $(f'(x))^2-(f(x))^2=1$ (1)
- $f'(0)=1$ (2)
- la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ (3)

1. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

b) Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la propriété (1), démontrer que :

pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f. (4)

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a) Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b) Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c) En déduire les fonctions u et v.

d) En déduire que, pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

4. a) Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. a) Soit m un nombre réel.

Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer cette solution lorsque $m=3$ (on en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

129 QCM

PACES

Choisir la bonne réponse.

1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^{-x}(x^2 + x + 1).$$

Dans ce cas précis on cherche une solution particulière de la forme :

a $e^{-x}(x^2 + x + 1)$

b $e^{-x}(ax^3 + bx^2 + cx)$

c $e^{-x}(ax^2 + bx + c)$

d $x^2e^{-x}(ax^2 + bx + c)$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit l'équation différentielle (E) : $y'(x) - y(x) = e^x - 2x$.

On a déterminé une solution de l'équation sans second membre Ke^x, avec K réel.

On cherche une solution particulière $y_p(x)$ en posant :

a $y_p(x) = k(x)(e^x - 2x)$,

où k est une fonction de x.

b $y_p(x) = k(x)e^x$,

où k est une fonction de x.

c $y_p(x) = a(e^x - 2x)$, avec a réel.

d $y_p(x) = e^x - 2x$

130 Commande d'une substance radioactive

En gynécologie, on utilise une substance radioactive, le 51 Cr, dont la période radioactive (demi-vie) est de 27,8 jours, pour localiser le placenta chez une femme enceinte. Ce produit doit être spécialement commandé dans un laboratoire médical.

Si l'examen requiert 35 unités du produit et qu'il faut compter deux jours pour la livraison, quel est le nombre minimum d'unités à commander ?

131 Équation logistique

BCPST

Un biologiste observe la croissance d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1 000 bactéries. Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en heures).

Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :

$$N'(t) = 0{,}07N(t)(1 - 10^{-3}N(t)).$$

On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul.

On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

En déduire l'expression de P, puis celle de N.

132 Réaction chimique

Chimie

Dans une réaction chimique, l'évolution de la concentration $C(t)$ d'une substance, en fonction du temps t, est souvent modélisé par une équation différentielle $C'(t) = -\mathrm{k}C^n(t)$ où k est une constante positive appelée constante de réaction et n est un entier égal à 0 ; 1 ou 2 appelé ordre de la réaction.

Résoudre cette équation différentielle pour chacune des trois valeurs de n et avec une concentration initiale C_0 pour $t = 0$.

133 Croissance d'une population

On considère un milieu, ayant une capacité d'accueil maximale de 10 000 individus, qui contient initialement 1 000 individus. Ici $p(t)$ représente le nombre d'individus après t années. On utilise le modèle de croissance logistique (on rappelle l'équation : $p' = kp(M - p)$ avec $k > 0$ et $p(0) = p_0$) avec un taux de croissance $k = 0{,}0001$.

1. Déterminer la taille de la population en fonction du temps.

2. Quelle est la taille de la population après 2 ans ? 5 ans ?

3. Après combien de temps atteint-on la taille limite ?

4. Donner un graphe de cette fonction.

134 Vrai ou faux ? (1)

Répondre par vrai ou faux sans justifier.

1. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 3y = e^{3x}$.

Soit f la solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-3x}$. On a alors :

a) $f'(0) = 4$.

b) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1$.

c) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{3x}$.

2. a) $y = Ce^{2x}$, avec C réel, est solution générale de l'équation $y' + 2y = 0$.

b) $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ est solution générale de l'équation $y' + 2y = x^2 + x - 2$.

c) $y = \dfrac{x^2}{2} - 1 + 10e^{2x}$ est solution générale de l'équation $y' + 2y = x^2 + x - 2$.

d) $y = \dfrac{1}{4}(\sin 2x - \cos 2x)$ est solution générale de l'équation $y' + 2y = \sin 2x$.

3. On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-x}\sin x$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-1}{2}e^{-x}(\cos x - \sin x)$.

a) f est dérivable sur et $f'(x) = e^{-x}\cos x$.

b) f est l'unique solution de (E) qui s'annule en 0.

c) Si g est une solution de (E), la courbe représentant g possède une tangente au point d'abscisse 0 dont une équation est $y = (1 - 2x)\, g(0)$.

135 Vrai ou faux ? (2)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x}$.

Affirmation 1 : La fonction $F(x) = x + \dfrac{\ln(x^2 + 2x)}{2}$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Affirmation 2 : la fonction g est paire.

Affirmation 3 : la fonction g s'écrit $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ et une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $\ln(e^x + e^{-x})$.

3. Affirmation 4 : Si une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors sa primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est paire.

136 Croissance d'une population de rongeurs
BCPST

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t (exprimé en heures), est notée $g(t)$ (exprimée en centaines d'individus). Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle (E1) $y' = \dfrac{y}{4}$.

a) Résoudre l'équation différentielle (E1).
b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions (E2) :

$u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u^2(t)}{12}$, pour tout nombre réel t positif ou nul, et $u(0) = 1$.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction h définie par $\dfrac{1}{u}$.
Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E3)

$h'(t) = -\dfrac{h(t)}{4} + \dfrac{1}{12}$, pour tout nombre réel t positif ou nul, et $h(0) = 1$.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{12}$.
En déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.
c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

137 Approche d'une solution par la méthode d'Euler
MPSI

Utiliser la méthode d'Euler pour approximer la solution de l'équation différentielle $y' = y - x$, avec comme conditions initiales $y(0) = 2$, $n = 10$ et $h = 0{,}1$.
Que peut-on dire de cette approximation ?

138 Démontrer l'unicité d'une solution
Démo

Montrer que l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

139 Résoudre par disjonction de cas
Le but de cet exercice est d'étudier certaines solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = |y(x) - x|$ et de donner l'allure des courbes correspondantes (encore appelées courbes intégrales de cette équation).
1. Étudier les solutions y telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \geqslant x$, et donner l'allure des courbes intégrales.
2. Étudier de même les courbes intégrales qui restent dans le demi-plan d'équation $y \leqslant x$.

140 Équations et conditions
On se propose de déterminer toutes les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{E}) : f'(x) - 3f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$$

et qui vérifient $f(0) = 0$.
Soit une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E).
On désigne par f' sa dérivée.
On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-3x} f(x)$.
On désigne par h' la dérivée de h.
1. a) Exprimer $h'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et de $f(x)$ pour tout réel x.
b) Expliquer pourquoi la dérivée $h'(x)$ vérifie, pour tout réel x, $h'(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{-3x}}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$.
2. Déterminer alors toutes les fonctions h possibles.
Justifier la réponse.
3. En déduire toutes les fonctions f solutions de (E).
4. Déterminer la fonction f_0, solution de (E), qui vérifie $f_0(0) = 0$.

Concours Geipi, 2007.

141 Chute d'une goutte d'eau
On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie solution de l'équation (E) $y' = \dfrac{-1}{q}y + 9{,}81$ et $y(0) = 0$, la constante q étant dépendante de la masse de la goutte et d'un coefficient lié au frottement de l'air.
1. a) Déterminer une solution constante g de l'équation (E).
b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation $y' = \dfrac{-1}{q}y$.
En déduire la solution v satisfaisant au problème.
2. a) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81q$.
Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.
b) Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $5q$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite.
Cette affirmation est-elle correcte ?

Travaux pratiques

Algo | 55 min | Chercher Raisonner

1 Méthode d'Euler pour approcher la courbe d'une solution d'équation différentielle

A ▸ Courbe d'Euler et solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ avec $y(0) = 1$

1. Présentation de la méthode

Grâce à l'équation de la tangente à une courbe en un point, on sait que, pour une fonction f dérivable en x_0, et pour un réel h assez petit, $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.
La méthode d'Euler utilise cette approximation et l'égalité $f'(x) = 3f(x) + 5$, pour tout x réel, pour reproduire des couples $(x_n\,;y_n)$ représentant des points tels que $y_n \approx f(x_n)$.
Pour obtenir les valeurs successives $y_1\,;y_2\,;\ldots\,;y_n$, les calculs s'enchaînent de la manière suivante.

- Conditions initiales $y(0) = 1$, on choisit le pas h, fixe et petit.
- On calcule $y'(0)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(0) = 3y(0) + 5$.
- On calcule $y(1)$ en utilisant l'approximation affine $y(1) = y(0) + y'(0) \times h$.
- On calcule $y'(1)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(1) = 3y(1) + 5$.
- On calcule $y(2)$ en utilisant l'approximation affine $y(2) = y(1) + y'(1) \times h$.
- …
- On calcule $y'(i)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(i) = 3y(i) + 5$.
- On calcule $y(i+1)$ en utilisant l'approximation affine $y(i + 1) = y(i) + y'(i) \times h$.
- …
- On s'arrête à $y(n) = y(n-1) + y'(n-1) \times h$.

L'ensemble des points $A_i(x_i\,;y_i)$ donne une courbe représentant la fonction $y(t)$, avec une bonne approximation lorsque h est petit.

2. Mise en œuvre

a) Écrire un algorithme qui permet, prenant les valeurs initiales, la valeur de n et le pas h, de calculer les couples $(x_i\,;y_i)$ pour tout entier i de 1 à n.

b) On souhaite traduire cet algorithme en **Python** et en utilisant des listes.
Compléter le programme ci-dessous, dans lequel la fonction `methode_euler` prend pour arguments les coordonnées d'un point de départ, un pas h et un nombre d'itérations n.
Elle doit renvoyer la liste des abscisses et celle des ordonnées des points de la courbe d'Euler.

```
def méthode_euler(x, y, h, n):
    X_liste=[x]
    Y_liste=[y]
    for ...
        ...
    return X_liste, Y_liste
```

c) Voici une mise en œuvre de la fonction `methode_euler` permettant de récupérer les deux listes de coordonnées, dans deux variables X et Y :
`X,Y=méthode_euler(0,1,0.1,100)`
Si on souhaite les points d'abscisses négatives alors on peut rappeler la fonction `méthode_euler` pour récupérer les coordonnées dans deux variables X1 et Y1, avec h négatif :
`X1,Y1=méthode_euler(0,1,-0.1,100)`.

Reprendre l'algorithme de la question **2. b)** et le compléter afin d'obtenir l'ensemble des points $A_i(x_i\,;y_i)$.

B ▸ Pour aller plus loin

Reprendre l'algorithme précédent pour obtenir l'ensemble des points $A_i(x_i\,;y_i)$ de la courbe solution de l'équation différentielle $y' = 2y + x\cos(x)$ et $y(\pi) = 0$. (Ne pas oublier d'exprimer l'angle en radians.)

Maths & Histoire

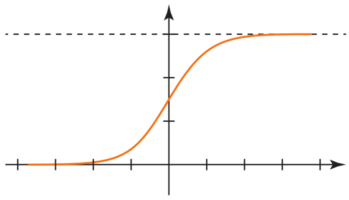
40 min

Chercher
Raisonner

2 Étude d'un exemple de dynamique de population

A ▸ Présentation

Le modèle de Verhulst de croissance d'une population est un modèle pour lequel la croissance initiale est presque exponentielle puis ralentit, devenant presque linéaire pour atteindre une position asymptotique où il n'y a quasiment plus de croissance.
La fonction associée, dite fonction logistique, est représentée par une courbe en forme de S et admettant en $+\infty$ l'asymptote $y = \mathrm{K}$.
La constante K est interprétée comme le nombre maximum d'individus que l'environnement peut supporter.



Une fonction logistique est solution d'une équation :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{\mathrm{K}}\right)$$

(avec r qui s'appelle le taux de croissance intrinsèque et K qu'on appelle la capacité biotique).

Pierre François Verhulst, 1804-1849, mathématicien belge, a présenté ce modèle en 1838.

1. En utilisant l'équation, prouver que N' s'annule lorsque $N = 0$ et $N = \mathrm{K}$; que $N' > 0$ lorsque N est compris entre 0 et K ; enfin que $N' < 0$ sinon.
2. Justifier ce bilan : aussi longtemps que la population $N(t)$ reste inférieure à sa capacité biotique K, elle ne cesse de croître. À l'inverse, si $N(t)$ est supérieure à cette capacité, $N(t)$ décroît.

B ▸ Exemple : un problème économique, le nombre de franchises

En mars 2019, deux ingénieurs ont mis au point un produit alimentaire révolutionnaire composé pour l'essentiel d'insectes. Ils sont parvenus à créer leur start-up et à commercialiser le produit.
Devant le succès croissant de ce produit, la société a décidé de se développer en formant un réseau de franchises.
Elle prévoit que le nombre de franchises croîtra de façon logistique avec un taux de croissance intrinsèque r égal à 0,4 et une capacité maximale de franchises K égale à 1 000 (fixée par la législation en vigueur).
L'objectif est de retrouver l'expression de la fonction logistique associée.
1. On compte initialement 100 franchises.
En notant $N(t)$ le nombre de franchises à la date t, écrire l'équation différentielle logistique associée.
2. On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul.
On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
Vérifier que $P'(t) = \dfrac{-N'(t)}{N^2(t)}$ puis montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.
En déduire l'expression de $P(t)$, puis celle de $N(t)$.
Montrer que les solutions sont les fonctions de la forme $N(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}$.
3. Combien de temps faudra-t-il pour que la société puisse compter 500 franchises ?

Travaux pratiques

TICE — Algo — 55 min — Chercher Raisonner

3 La radioactivité et les équations différentielles $y' = ay$

Parmi tous les types de noyaux atomiques existant dans la nature, certains sont instables, c'est-à-dire qu'ils se transforment spontanément en d'autres noyaux ; cette transformation s'accompagne simultanément de l'émission d'une particule et d'un rayonnement électromagnétique.
Ce phénomène s'appelle **radioactivité**.

A ▸ Simulation de l'évolution du nombre de noyaux restants

Modélisation : On considère un nombre *n* de noyaux radioactifs.
On suppose qu'à chaque étape (représentant un intervalle de temps), chaque noyau se désintégrera avec une probabilité *p*, et ce indépendamment des autres noyaux.

1. Le programme suivant, écrit en langage **Python**, doit permettre de renvoyer le nombre de noyaux restants après une étape.
Le compléter.

```
from random import*
def compte_noyaux_restants(n,p):
    N=n
    for i in range(n):
        if … p:
            N=N-1
    return N
```

2. Compléter le programme suivant afin qu'il permette de créer la liste contenant le nombre de noyaux restants à chaque étape jusqu'à ce qu'il n'en reste plus que 1 % du nombre initial.

```
def Liste_nb_noyaux_restants(n,p):
    L=[ ]
    N=n
    while …:
        L.append(n)
        N=compte_noyaux_restants(n,p)
    return L
```

3. Dans le cas d'un échantillon contenant au départ 40 000 noyaux instables, la probabilité de désintégration de chacun est de $\frac{1}{10}$.
Le programme suivant permet de représenter graphiquement la courbe d'évolution du nombre de noyaux restants.

a) Expliquer la commande `plot(range(m),L,"r.")`.

b) Quel type de courbe obtient-on ?

```
from pylab import*
n=40000
L=Liste_nb_noyaux_restants(n,1/10)
m=len(L)
plot(range(m),L, "r." )
show( )
```

Coup de pouce Pour tracer un graphique, il faut solliciter en début de programme la bibliothèque `from pylab import*`.
Les instructions auront la structure suivante :

```
from pylab import*
instructions
show()
```

B ▸ Étude mathématique

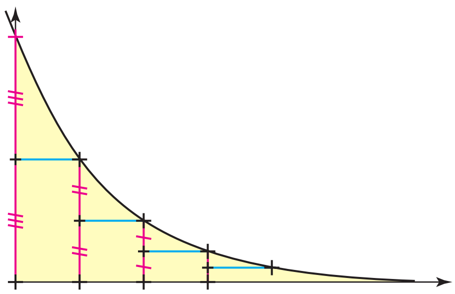
La probabilité que présente un noyau radioactif de se désintégrer pendant l'unité de temps s'appelle la constante radioactive λ. Elle s'exprime comme l'inverse d'un temps, en s^{-1}.
Ce caractère probabiliste fait qu'on ne connaît jamais le moment où un noyau donné va se désintégrer.
En revanche, on peut statistiquement prédire le comportement d'un grand nombre de noyaux.
Le comportement d'un échantillon de matière radioactive a conduit à considérer que le nombre $N(t)$ de noyaux présents dans le corps radioactif à la date t définit une fonction N solution de l'équation différentielle $N' = -\lambda \times N$, où λ est la constante radioactive caractéristique de la matière considérée.
L'équation $N' = -\lambda \times N$ avec condition initiale $N(0) = N_0$ a pour solution la fonction $t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction $t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$.
Tracer l'allure de sa représentation graphique.

2. a) La tangente au point d'abscisse 0 de la représentation graphique de la fonction $t \mapsto N(t)$ coupe l'axe des abscisses en un temps noté τ qui est appelé constante de temps.

Montrer que $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$.

b) Est-il vrai d'affirmer qu'après 5 constantes de temps, 99 % des atomes se sont désintégrés ?



3. On appelle demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ d'un échantillon de noyaux radioactifs la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs de l'échantillon présents à la date t soit désintégrée à la date $t + t_{\frac{1}{2}}$.

Montrer que $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$. Exprimer cette demi- vie en valeur approchée, à l'unité près, en secondes, puis en heures, puis en jours. Donner ensuite une relation entre τ et $t_{\frac{1}{2}}$.

C ▸ La méthode de datation au carbone 14

Utiliser un échantillon radioactif en tant qu'horloge, c'est demander de pouvoir déterminer une date t, connaissant la constante λ caractéristique de la matière radioactive. Un échantillon de la matière radioactive est un moyen de mesurer le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs présents à la date t que l'on cherche ainsi que le nombre N_0 de noyaux à la date $t = 0$.
La méthode de datation au carbone 14 repose sur l'hypothèse que la teneur en carbone 14 de tous les organismes vivants reste identique au cours du temps. On a donc un moyen de connaître N_0. Lorsqu'un organisme vivant meurt, son carbone 14 n'est plus renouvelé. Le carbone 14 qu'il contient se désintègre de manière exponentielle, en étant divisé par 2 tous les 5 570 ans.

1. Déterminer la constante radioactive λ (en année^{-1}) du carbone 14.

2. On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. Des mesures montrent qu'ils ont perdu 30 % de leur teneur en carbone. Déterminer l'âge de ces fragments d'os.

3. On a retrouvé dans le Massif Central des morceaux de bois carbonisés lors d'une éruption volcanique. La mesure de la radioactivité au carbone 14 de ce bois carbonisé donne 4,8 désintégrations par gramme et par minute, alors qu'un bois vivant en donne 13,5. Évaluer la date de l'éruption volcanique.

4. On estime que, pour un organisme mort il y a plus de 35 000 ans, la plus grande partie des noyaux de carbone 14 ont été désintégrés et que le comptage ne peut donc plus se pratiquer.
Contrôler cette affirmation par un calcul.