7

Primitives et équations différentielles

Le carbone possède plusieurs formes – ou « isotopes » – parmi lesquelles le carbone 14, ou ^{14}C. Cet élément est radioactif, et sa radioactivité décroît au fil du temps à un rythme parfaitement régulier. Les scientifiques s'en servent donc comme « chronomètre » pour estimer l'âge d'objets très variés : œuvres d'art, roches, fossiles…

On analyse des fragments d'os trouvés dans une grotte. Des mesures montrent qu'ils ont perdu 30 % de leur teneur en carbone 14.
Quel est l'âge de ces fragments d'os ? ↪ TP 3 p. 236

VIDÉO
Carbone 14
lienmini.fr/maths-s07-01

Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s07-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des dérivées de fonctions usuelles

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = \ln(x)$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ **c)** $f(x) = \cos(x)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = x^4$

2 Calculer des dérivées de fonctions de la forme $u \times v$, $\dfrac{u}{v}$ ou $\dfrac{1}{v}$

On considère u et v des fonctions dérivables (v est non nulle quand elle est en dénominateur).
Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = \dfrac{e^{3x+1}}{x}$ **b)** $f(x) = (x+1)e^x$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$

d) $f(x) = x\ln(x)$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{(x+5)^2}$ **f)** $f(x) = x\sqrt{x}$

3 Calculer des dérivées de fonctions composées

Calculer la dérivée de f dans chacun des cas suivants, en précisant le domaine de dérivabilité.

a) $f(x) = e^{-x+1}$ **b)** $f(x) = \ln(x^2+3)$ **c)** $f(x) = \sin(3x+1)$

d) $f(x) = 4(x+1)^5$ **e)** $f(x) = \sqrt{(x^2+4)}$ **f)** $f(x) = e^{3x^2-5}$

4 Identifier si deux fonctions ont la même dérivée

Pour chaque cas, indiquer si les deux fonctions f et g ont la même dérivée sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \ln(x+1) + \ln(x+5) + \ln(2)$
et $g(x) = \ln(x^2+6x+5)$, $\mathrm{I} =]-1\,;+\infty[$.

b) $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$ et $g(x) = \sin(2x) + \cos(2x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

5 Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes.

a) $10e^{-3t} = 5$ avec $t \in \mathbb{R}$

b) $-4e^{5t} = 12$ avec $t \in \mathbb{R}$

c) $\dfrac{7}{2}e^x = 50$ avec $x \in \mathbb{R}$

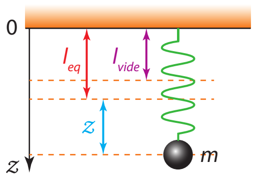
d) $8e^{-\frac{t}{2}} = 40$ avec $t \in \mathbb{R}$

Activités

Physique Maths & Histoire 10 min

1 Découvrir la notion d'équation différentielle

On considère un ressort vertical à l'extrémité duquel on a placé une masse m. On note $f(t)$ l'allongement du ressort à l'instant t par rapport à son équilibre statique et on note k (k > 0) la constante de raideur.
Les deux forces en présence sont la gravité et la force de rappel du ressort, qui est proportionnelle à l'allongement $f(t)$.



L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit sous la forme $m\dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \mathrm{k}f(t) = 0$

ou encore $mf''(t) + \mathrm{k}f(t) = 0$, où f'' est la dérivée seconde de la fonction f.
Vérifier que les fonctions suivantes sont solutions $f(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)$

avec $\omega = \sqrt{\dfrac{\mathrm{k}}{m}}$ et A et B des constantes.
Une équation qui relie une fonction à sa dérivée ou à ses dérivées successives est appelée une **équation différentielle**.

Il existe des notations différentes pour désigner une dérivée d'une fonction f ou y, par exemple $\dot{y}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (lorsque la variable est x), $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (lorsque la variable est t).
La notation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ fut utilisée par Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716), la présence de dy et dx définit la dérivée comme étant le rapport $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ quand ces variations deviennent infiniment petites.

La notation $\dot{y}$ est due à Sir Isaac Newton (1642-1727) qui parlait de fluxions.

La notation f' a été amenée par le comte Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813).

Wilhelm Gottfried Leibniz

↪ Cours 1 p. 206

30 min

2 Découvrir la notion de primitive

1. a) Déterminer une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $y'(x) = \mathrm{e}^x + 3$.

b) Déterminer une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $F'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1$.

2. On cherche à déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $g(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^x$.
a) Peut-on déterminer G de la même manière que dans les situations précédentes ?
b) En supposant que $G(x)$ est de la forme $(ax + b)\mathrm{e}^x$, déterminer les valeurs a et b convenables. Conclure.

3. On cherche à déterminer une fonction H dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et dont la dérivée est $h(x) = \ln(x)$.
Un logiciel de calcul formel propose cette expression pour $H(x)$.
Démontrer que la fonction H a bien pour dérivée h.
On dit alors que H est une **primitive** de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

```
int(ln(x),x)
                                   x*ln(x)-x
```

4. Démontrer l'équivalence suivante : deux fonctions f et g ont la même dérivée sur un intervalle I si et seulement si la fonction $f - g$ est constante sur I.

↪ Cours 2 p. 208

TICE 30 min

3 Introduire l'étude des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

A ▸ L'équation $y' = y$

1. Quelle fonction usuelle et non nulle est solution de l'équation $y' = y$?

2. Si une fonction f est solution de l'équation différentielle $y' = y$, la fonction Kf, où K est un réel quelconque, est-elle aussi solution de l'équation $y' = y$?

3. En déduire d'autres solutions de $y' = y$.

B ▸ L'équation $y' = ay$ et les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K et a réels

1. Vérifier que la fonction $x \mapsto e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$.
En déduire d'autres solutions de l'équation.

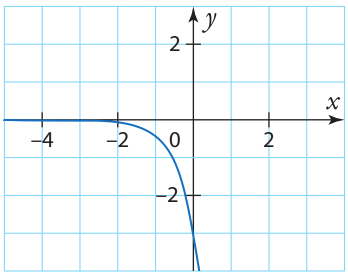
2. Proposer des solutions des équations $y' = 5y$ et $y' = -y$.

3. À l'aide de GeoGebra, en créant des curseurs a et K, étudier les courbes représentatives des fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$.

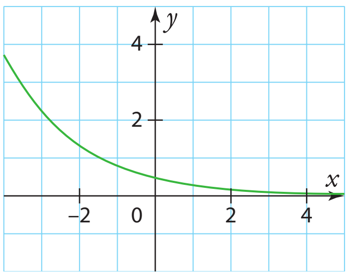
4. Associer chaque fonction f ci-dessous à sa courbe représentative et donner l'équation différentielle dont elle est solution.

a) $f(x) = -3e^{2x}$ **b)** $f(x) = 0{,}5e^{x}$ **c)** $f(x) = 0{,}5e^{-2x}$ **d)** $f(x) = -3e^{-2x}$ **e)** $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}1x}$

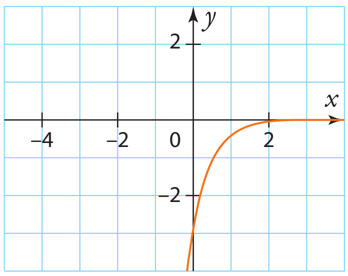
①



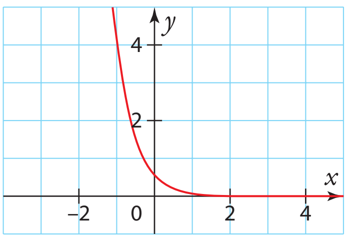
②



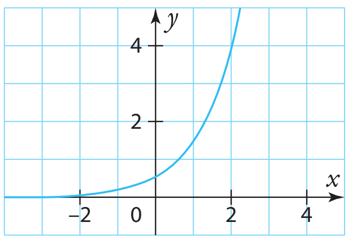
③



④



⑤



C ▸ L'équation $y' = ay + b$

1. En remarquant que l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ se ramène à l'équation différentielle

(E) : $\left(y + \frac{5}{3}\right)' = 3\left(y + \frac{5}{3}\right)$, montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f + \frac{5}{3}$ est solution de $y' = 3y$. Donner alors des solutions de cette équation.

2. On considère l'équation différentielle $y' = ay + b$, a et b étant des réels non nuls.
Quelles solutions peut-on donner à cette équation ?

↪ Cours 3 p. 210

Cours

1 Équations différentielles et primitives

Définition Équation différentielle

• Une **équation différentielle** est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y', y'',… et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f…).

• On appelle **solution d'une équation différentielle** toute fonction dérivable vérifiant l'égalité.

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions vérifiant l'égalité.

Exemple

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$ car, pour $y(x) = e^{-x}$, $y''(x) = +e^{-x}$, donc $y''(x) - y(x) = 0$.

Remarques

1. La dérivée est associée à un taux de variation, quotient des variations de y sur les variations de x, d'où le terme *différentiel*.
2. On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle $y' = \dfrac{dy}{dx}$ ou $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

Exemples

• $2y' + 3y = 0$ • $y'(t) = y^2(t) + 5t + 1$ • $\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ • $\dfrac{dy}{dx} = 2y(x) + x^2$

Définition Primitive d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I réel.

On appelle primitive de la fonction f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Ainsi, une fonction F est une primitive de f sur I lorsque, pour tout x de I, on a $F'(x) = f(x)$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2x$.

La fonction $F : x \mapsto x^2$ est une primitive, sur $\mathbb{R}$, de $f : x \mapsto 2x$.

Propriétés Primitives de fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle de définition	Primitive F
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$, avec k réel
$f(x) = x^n$, n entier relatif sauf -1	$\mathbb{R}$ si n entier naturel $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si n entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$, avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$, avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = \ln x + k$, avec k réel
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos(x) + k$, avec k réel
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin(x) + k$, avec k réel

Remarque

On obtient ce tableau par lecture inverse du tableau des dérivées usuelles.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s07-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle

Énoncé

1. **Montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I :**
$y(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$; $f(x) = 15x^4 - 2x + 5$, avec I = $\mathbb{R}$.

2. **Montrer que la fonction $x \mapsto \cos x$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$.**

Solution

1. La fonction y est bien dérivable sur I car c'est une somme de fonctions dérivables sur I : **1**

$y'(x) = 15x^4 - 2x + 5 = f(x)$. **2**

2. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y(x) = \cos' x$, alors $y''(x) = -\cos x$, donc $y''(x) + y(x) = 0$.

Conseils & Méthodes

1 Ne pas oublier de justifier la dérivabilité.
Pour justifier de la dérivabilité, penser à utiliser les opérations sur les fonctions dérivables. Ici la fonction y est la somme de fonctions dérivables sur I, donc elle est dérivable sur I.

2 Calculer la dérivée et retrouver f.

À vous de jouer !

1 Montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I.

a) $y(x) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$; $f(x) = 5x^2 + 3x$; I = $\mathbb{R}$

b) $y(x) = \dfrac{1}{3x^3} + 5$; $f(x) = \dfrac{-1}{x^4}$; I = $]0\,;+\infty[$

2 Montrer que la fonction y est solution de l'équation proposée.

a) $y(x) = e^{2x}$; équation : $y' = 2y$

b) $y(x) = \cos(x)\sin(x)$; équation : $y'' = -4y$

3 Montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur un intervalle I à préciser.

a) $y(x) = \dfrac{e^x}{x}$; $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

b) $y(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$; $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

c) $y(x) = \sin(x) + \pi$; $f(x) = \cos(x)$

↪ Exercices 37 à 41 p. 218

Méthode 2 Déterminer une primitive d'une fonction usuelle

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive F sur I = $]0\,;+\infty[$ ou I = $\mathbb{R}$.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^3$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$

Solution

a) **1** $F(x) = \ln(x)$

b) **1** $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$

c) L'entier n est négatif, égal à -4. **2**

$F(x) = \dfrac{1}{-4+1}x^{-4+1} = \dfrac{-1}{3}x^{-3} = \dfrac{-1}{3x^3}$.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule du tableau des primitives des fonctions usuelles.

2 Attention dans le tableau du cours, lorsque l'entier n est négatif avec $n \neq -1$, dans la formule $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ le nombre $n + 1$ est aussi négatif.

À vous de jouer !

4 Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{5}{3}x^3$; I = $\mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-1}{x^5}$; I = $]0\,;+\infty[$

5 Déterminer une primitive de la fonction f sur un intervalle I à préciser.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = \sin(x)$

↪ Exercices 42 et 43 p. 218

Cours

2 Existence et calcul de primitives

Théorème Existence de primitives

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Théorème Ensemble des primitives et conditions initiales

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et admettant une primitive F. Alors l'ensemble des primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$, avec k réel. Pour tous réels x_0 de I et y_0 de $\mathbb{R}$, il existe une unique primitive qui prend en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s07-04

Soit f une fonction continue admettant une primitive F sur un intervalle I.
Alors toute fonction de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k réel, a pour dérivée $(F + k)'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, d'après les opérations sur les dérivées : c'est donc une primitive de f sur I.

Réciproquement, si G est une primitive de f sur I alors, pour tout x de I, $G'(x) = F'(x) = f(x)$, c'est-à-dire $(F(x) - G(x))' = 0$.

Ainsi il existe un réel k tel que $F(x) - G(x) = k$, c'est-à-dire $F(x) = G(x) + k$.

Si, de plus, $F(x_0) = y_0$, alors $F(x_0) = G(x_0) + k = y_0$, soit $k = y_0 - G(x_0)$.

Remarque

On dit que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Exemple

Soit $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitives les fonctions de la forme $x \mapsto -4\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) + k$. La primitive qui en 2π prend la valeur 0 est $x \mapsto -4\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$.

Propriétés Primitives de fonctions composées

Les théorèmes opératoires sur le calcul de dérivées permettent d'établir le tableau suivant sur les primitives. On considère que u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Forme de la fonction	Primitive à une constante près	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	u et v dérivables sur I
$\lambda u'$, avec λ réel	λu	
$u'u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	Si n est négatif, alors $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	pour $u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	
$(v' \circ u) \times u'$	$v \circ u$	v dérivable sur un intervalle J et, pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction, ou une primitive avec conditions initiales

Énoncé

1. **Soit $f : x \mapsto 3x^2 + \dfrac{1}{x}$. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x^3 + \ln(x)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.**

2. **En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0\,;+\infty[$. Déterminer celle qui prend en e la valeur 0.**

Solution

1. F est bien dérivable sur I et $F'(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$.

2. L'ensemble des primitives de f sur $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions de la forme $G(x) = x^3 + \ln(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$. **1**
$G(\mathrm{e}) = 0 \Leftrightarrow$ **2** $\mathrm{e}^3 + \ln(\mathrm{e}) + k = 0 \Leftrightarrow k = -1 - \mathrm{e}^3$.
La primitive cherchée est donc : $G(x) = x^3 + \ln(x) - 1 - \mathrm{e}^3$.

Conseils & Méthodes

1 Se rappeler que deux primitives diffèrent d'une constante.

2 Pour trouver la constante qui convient lorsque les conditions initiales sont imposées, on résout une équation.

À vous de jouer !

6 **1.** Montrer que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de ln sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer l'unique primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

7 **1.** Montrer que $F : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ est primitive de la fonction f définie par $f(x) = -2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'unique primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

↪ Exercices 44 à 47 p. 218

Méthode 4 Déterminer une primitive

Énoncé

Pour chacune des fonctions proposées, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ ou $]0\,;+\infty[$.

a) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+5)^3}$

Solution

a) On reconnaît une somme $u' + v'$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$, avec u et v des fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$: $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \ln(x)$. **1**

b) **2** On reconnaît la forme $u'u^n$ avec $n = -3$. Une primitive sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}$ car on aura remarqué que le trinôme $x^2 + x + 5$ est positif) sera :
3 $F(x) = \dfrac{(x^2+x+5)^{-3+1}}{-3+1} = \dfrac{-1}{2} \square (x^2+x+5)^{-2} = \dfrac{-1}{2(x^2+x+5)^2}$

Conseils & Méthodes

1 Faire apparaître correctement un modèle du tableau du cours.

2 C'est un produit, donc on va chercher dans le tableau des produits qui pourraient convenir comme modèle. Bien penser à diviser par $n + 1$.

3 Lorsque n est négatif, la forme $u'u^n$ s'écrit sous la forme d'un quotient.

À vous de jouer !

8 Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+5}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

c) $f(x) = (2x+1)(x^2+x-7)^5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

9 Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = \dfrac{3}{(3x-1)^2}$; $\mathrm{I} = \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-5}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \cos(x)(\sin(x))^2$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

↪ Exercices 48 à 54 p. 219

3 Résolution des équations différentielles

Théorème — **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, avec K réel.

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

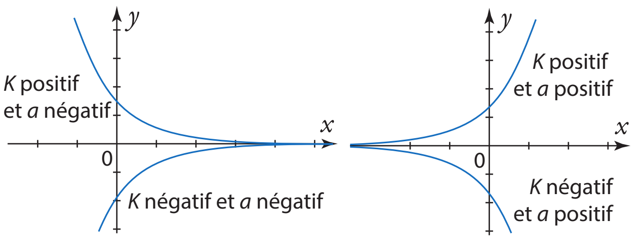
Démonstration

On vérifie facilement que toute fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, où $K \in \mathbb{R}$, est solution.
Réciproquement, il faut prouver que toute solution est de cette forme.
Considérons g une solution de l'équation $y' = ay$.
On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x)$.
Définissons une fonction t par $t(x) = g(x) \times e^{-ax}$.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$,
on a $t'(x) = g'(x) \times e^{-ax} - ag(x)\,e^{-ax} = e^{-ax}\,(g'(x) - ag(x)) = 0$.
La fonction t est donc une fonction constante. Il existe un réel K tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $t(x) = K$, et ainsi $g(x) = Ke^{ax}$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s07-05

Allures des courbes des fonctions Ke^{ax}

Obtenues pour K positif puis pour K négatif et en faisant varier le coefficient a.



Exemple

L'équation différentielle (E) : $y' = 3y$ a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{3x}$.
L'unique solution de (E) telle que $f(0) = 2$ est la fonction $x \mapsto 2e^{3x}$.

Théorème — **Ensemble des solutions d'une équation $y' = ay + b$, solution avec condition initiale**

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec K réel. Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution prenant en x_0 la valeur y_0, c'est-à-dire telle que $f(x_0) = y_0$.

Remarque La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation.

Démonstration

On vérifie facilement que toute fonction de la forme $x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $K \in \mathbb{R}$, est solution.

Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Nous savons que la fonction constante c : $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution particulière, $c'(x) = a \times c(x) + b$. (1)

Considérons g une solution de l'équation $y' = ay + b$, on a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = a \times g(x) + b$. (2)
Par soustraction de (2) et (1), on obtient $g'(x) - c'(x) = a \times (g(x) - c(x))$, soit $(g(x) - c(x))' = a \times (g(x) - c(x))$.
Ainsi, la fonction $g - c$ est solution de l'équation $y' = ay$, donc de la forme Ke^{ax}, ce qui entraîne :

$g(x) - c(x) = Ke^{ax}$, soit $(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $K \in \mathbb{R}$.

Exemple

La fonction constante égale à 1 est solution de $y' = y - 1$. Toute fonction solution est de la forme $x \mapsto 1 + Ke^{x}$, avec K réel.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s07-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Résoudre l'équation $y' = ay$

Énoncé

1. **Résoudre l'équation $3y' = 2y$.**

2. **Donner l'allure des courbes solutions.**

3. **Déterminer ensuite l'unique solution f telle que $f(1) = \mathrm{e}$.**

Solution

1. 1 L'équation $3y' = 2y$ correspond à la forme $y' = \frac{2}{3}y$.

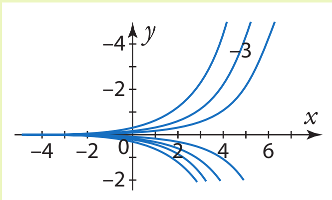
L'ensemble des solutions sont les fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$.

2. Si K est positif, les courbes sont en dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif elles sont en dessous.

3. 2 La solution cherchée est telle que $K\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} = \mathrm{e}$,

soit $K = \mathrm{e}^{\frac{-2}{3}} \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.

C'est la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} \times \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} = \mathrm{e}^{\frac{1+2x}{3}}$.



Conseils & Méthodes

1 Retrouver la forme d'équation $y' = ay$.

2 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, résoudre l'équation $K\mathrm{e}^{ax_0} = y_0$ d'inconnue K.

À vous de jouer !

10 **1.** Résoudre les équations différentielles.
a) $y' = 2y$ **b)** $y' = -5y$

2. Donner l'allure des fonctions $x \mapsto K\mathrm{e}^{-5x}$ en discutant selon le signe de K.

11 **1.** Résoudre les équations différentielles.
a) $y' + \frac{1}{3}y = 0$ **b)** $4y' + 5y = 0$

2. Déterminer la solution f de l'équation $4y' + 5y = 0$, telle que $f(1) = 2$.

↪ Exercices 58 à 65 p. 219-220

Méthode 6 Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1.

Solution

1 L'équation $2y' = 8y - 10$ correspond à la forme $y' = 4y - 5$.

La fonction constante $\frac{5}{4}$ est solution. 2

L'ensemble des solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{5}{4} + K\mathrm{e}^{4x}$.

3 La solution cherchée est telle que $\frac{5}{4} + K\mathrm{e}^{4} = 0$, soit $K = \mathrm{e}^{-4} \times \frac{-5}{4} = \frac{-5}{4\mathrm{e}^{4}}$.

Conseils & Méthodes

1 Retrouver le modèle $y' = ay + b$.

2 Déterminer la fonction constante solution. En déduire alors la forme de toutes les solutions.

3 Pour trouver l'unique fonction solution telle que $f(x_0) = y_0$, ici $f(1) = 0$, on va résoudre une équation pour détérminer K.

À vous de jouer !

12 Résoudre les équations différentielles.
a) $y' = 2y + 1$ **b)** $y' = -5y + 2$
c) $y' + y = 3$ **d)** $4y' + y - 5 = 0$

13 Résoudre l'équation différentielle $y' = 0{,}5(y + 20)$. Donner la solution qui prend la valeur -30 en 4.

↪ Exercices 66 à 70 p. 220-221

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s07-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 — Transformer l'écriture d'une fonction pour obtenir ses primitives

↪ Cours 2 p. 208

Énoncé

1. **On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$f(x) = (3x^2 + 2)(x^3 + 2x).$$

a) Identifier la forme $u'u$, puis déterminer une primitive de f.

b) Déterminer la primitive qui prend en 1 la valeur 5.

2. **On considère la fonction g définie pour tout réel $x \neq 0$ et $x \neq 1$ par :**

$$g(x) = \frac{1}{x(x-1)}.$$

Trouver des réels a et b tels que $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$.

En déduire une primitive de G sur $]1\,;+\infty[$.

Solution

1. a) On reconnaît la forme $u'u$ avec $u(x) = x^3 + 2x$.

1 Une primitive est $F : x \mapsto \frac{1}{2}(x^3 + 2x)^2 + k$, avec k réel.

b) $F(1) = \frac{1}{2}(1+2)^2 + k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x)^2 + \frac{1}{2}$.

2. 2 $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x-1)}$

$= \frac{a(x-1) + bx}{x(x-1)}$

$= \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$

Par identification avec $\frac{1}{x(x-1)}$, on obtient $a = -1$ et $a + b = 0$, soit $b = 1$.

Ainsi $g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, une primitive sera $G : x \mapsto -\ln(x) + \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Conseils & Méthodes

1 Avec la forme $u'u$, une primitive est $\frac{1}{2}u^2$.

2 Penser à réduire au même dénominateur pour pouvoir identifier avec la forme $g(x)$ de l'énoncé.

À vous de jouer !

14 **1.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$.

2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2(x+1)e^{x^2+2x}$.

15 Sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ on considère la fonction :

$$g : x \mapsto \frac{1}{x(x-1)(x+1)}.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. En déduire une primitive de g sur $]1\,;+\infty[$.

16 On considère la fonction :

$$h : x \mapsto (x+1)\,e^x.$$

En développant $h(x)$, retrouver une forme $u'v + uv'$ et en déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

17 On considère la fonction :

$$t : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

Écrire $t(x)$ sous une forme $u'u$ et en déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$

↪ Exercices 76 à 80 p. 222

Exercices résolus

Méthode 8 Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$

Cours 3 p. 210

Énoncé Algo

On considère l'équation différentielle $2y' - 5y = 0$.

1. **Résoudre cette équation différentielle.**

2. **Déterminer la solution f telle que $f(1) = e$.**

3. **Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.**

4. **Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.**

5. **Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 20$.**

6. **Résoudre l'inéquation $f(x) > 40$.**

7. **Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) > 10\,000$.**

Solution

1. 1 $2y' - 5y = 0$ est de la forme $y' = \frac{5}{2}y$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ce^{\frac{5}{2}x}$.

2. 2 $f(1) = e$ donne $f(1) = Ce^{\frac{5}{2}} = e \Leftrightarrow C = \dfrac{e}{e^{\frac{5}{2}}} = e^{-\frac{3}{2}}$, donc $f(x) = e^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{5}{2}x} = e^{\frac{5x-3}{2}}$.

3. 3 D'après l'équation $f'(x) = \frac{5}{2}f(x) = \frac{5}{2}e^{\frac{5x-3}{2}} > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. 4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{X\to-\infty} \frac{5x-3}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

5. 5 $f(x) = 20$ équivaut à $e^{\frac{5x-3}{2}} = 20 \Leftrightarrow 5x - 3 = 2\ln 20 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 + 2\ln(20)}{5}$

6. $f(x) > 40$ équivaut à $e^{\frac{5x-3}{2}} > 40$, ce qui donne $x > \dfrac{3 + 2\ln(40)}{5}$.

$S = \left]\dfrac{3 + 2\ln(40)}{5} ; +\infty\right[$.

7. 6 En langage naturel, l'algorithme est :

```
x ← 0
Tant que exp((5x − 3)/2) ≤ 10000
    x ← x + 1
Fin tant que
```

Conseils & Méthodes

1 Voir la méthode 5 pour la résolution de l'équation $y' = ay$.

2 Connaissant $f(x)$, calculer $f(1)$ puis résoudre l'équation pour trouver C.

3 C'est le signe de la dérivée qui donnera les variations.

4 Il faut étudier la limite d'une fonction composée.

5 Penser à l'équivalence $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$.

6 C'est une boucle non bornée qu'il faut dans l'algorithme.

À vous de jouer !

18 Soit l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$.

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = e$.

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 5$.

19 Soit l'équation différentielle $y' - 5y = 3$. Algo

1. Résoudre cette équation différentielle.

2. Déterminer la solution f telle que $f(0) = \frac{-6}{5}$.

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

5. Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = -10$.

6. Résoudre l'inéquation $f(x) < -100$.

7. Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle valeur entière positive de x on a $f(x) < -10\,000$.

Exercices 69 et 70 p. 220-221

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s07-03

Méthode 9 Modéliser des phénomènes

Cours 3 p. 210

Énoncé

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.
La puissance du son émis, initialement de 100 watts, diminue avec le temps *t*, mesuré en secondes.
On modélise par *f*(*t*) la puissance du son émis, exprimée en watt, *t* secondes après le pincement de la corde. Le son s'affaiblit à une vitesse proportionnelle à sa puissance, il a été établi que le coefficient de proportionnalité est de – 0,12.

1. **Écrire l'équation différentielle traduisant la diminution de son.**

2. **Déterminer la fonction *f* solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale *f*(0) = 100.**

3. **Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? Arrondir au watt près.**

4. **Résoudre par le calcul l'équation *f*(*t*) = 80, on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à 10^{-3}. Interpréter ce résultat.**

Solution

1. 1 $y' = -0{,}12y$.

2. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies pour tout réel t par $t \mapsto k\mathrm{e}^{-0{,}12t}$, où k est une constante réelle quelconque.

La condition $f(0) = 100$ équivaut à $k\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0} = 100$, d'où $k = 100$.

Ainsi, la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 100\mathrm{e}^{-0{,}12t}$.

3. 2 Il suffit de calculer $f(2) = 100\mathrm{e}^{-0{,}12\times 2} \approx 79$.

Arrondie au watt près, la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde est de 79 watts.

4. 3 Il suffit de résoudre l'équation $f(t) = 80 \Leftrightarrow 100\mathrm{e}^{-0{,}12t} = 80 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}12t} = \dfrac{80}{100}$

$\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{-0{,}12t}) = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow -0{,}12t = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow t = \dfrac{-\ln(0{,}8)}{0{,}12} \approx 1{,}86$.

La puissance du son émis 1,86 seconde après le pincement de la corde sera égale à 80 watts.

Conseils & Méthodes

1 Si f est la fonction puissance, alors la vitesse d'évolution de cette puissance est f'. On traduit ensuite l'énoncé.

2 On retrouve le modèle $y' = ay$ avec une condition initiale qui assure l'unicité de la solution.

3 Interpréter la fonction f dans le contexte de l'exercice.

À vous de jouer !

20 Le sel se dissout dans l'eau en ions Na^+ et Cl^- à une vitesse proportionnelle à sa masse. Il y avait au départ 25 kg de sel. On note α le coefficient de proportionnalité traduisant l'évolution de cette dissolution.

1. En notant $f(t)$ la quantité de sel (en kg) à l'instant t ($t \geqslant 0$), écrire, en fonction de α, l'équation différentielle qui traduit le problème de la dissolution du sel. À l'aide de la condition initiale, déterminer la fonction solution exprimée à l'aide de α.

2. On sait de plus qu'il ne reste que 15 kg de sel après 10 h écoulées.
En déduire la valeur de α puis l'expression de la solution $f(t)$.

3. Quelle masse de sel reste-t-il après 4 h ?

4. Au bout de combien d'heures ne reste-t-il plus que 0,5 kg de sel ?

21 Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données. La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation, exprimée en km. On admet que la fonction puissance g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0{,}035y = 0$.

2. Sachant que $g(0) = 7$, déterminer $g(x)$.

3. Pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW. Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100 km de propagation ?

Exercices 71 à 75 p. 221

Exercices résolus

Méthode 10 Résoudre une équation de la forme $y' = ay + \varphi$ avec φ une fonction

Cours 3 p. 210

Énoncé

Soit l'équation (E) : $2y' + 6y = x^2 + 2x - 1$.

1. Vérifier que la fonction $P : x \mapsto \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{13}{54}$ est solution de l'équation (E).

2. Montrer que f est solution de (E) équivaut à $f - P$ solution de (E′) : $2y' + 6y = 0$.

3. En déduire les solutions de (E).

Solution

1. **1** $P'(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

$$2 \times \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + 6\left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{13}{54}\right) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} + x^2 + 6 \times \frac{2}{9}x - 6 \times \frac{13}{54} = x^2 + 2x - 1$$

2. **2** f est solution de (E) si et seulement si $2f' + 6f = x^2 + 2x - 1$,

c'est-à-dire si et seulement si $2f' + 6f = 2P' + 6P$, soit $2(f - P)' + 6(f - P) = 0$.

3. f est solution de (E) si et seulement $f - P$ est solution de (E′).

3 On sait que les solutions de (E′) sont de la forme Ke^{-3x}.

$f - P$ est solution de (E), d'où $f(x) - P(x) = Ke^{-3x}$, ainsi $f(x) = P(x) + Ke^{-3x}$.

Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{13}{54} + Ke^{-3x}$, avec K réel.

Conseils & Méthodes

1 Dériver la fonction P et vérifier l'égalité.

2 La démarche est identique à la resolution de $y' = ay + b$: f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de $y' = ay$.

3 On connaît les solutions de l'équation $y' = ay$, donc on peut exprimer $f - P$.

À vous de jouer !

22 Soit l'équation (E) : $y' - 3y = 2e^{1-x}$.

1. Vérifier que la fonction $g : x \mapsto \frac{-1}{2}e^{1-x}$ est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E′) : $y' - 3y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

23 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E′) : $y' + 2y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

24 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = y + x$.

1. Déterminer une fonction h affine solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E′) : $y' = y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

25 Soit l'équation différentielle (E) : $y' = y + \cos x$.

1. Vérifier que la fonction $t : x \mapsto \frac{-1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$ est solution de (E).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - t$ est solution de (E′) : $y' = y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

26 On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) : y' - \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)y = \sin x$$

$$(E_0) : y' - y = 1$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).
2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\sin x$.
Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0).
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

27 On considère l'équation (E) : $y' = y - x^2$.

1. Démontrer que si un polynôme P est solution de l'équation alors il est du second degré.
2. En déduire une solution particulière de (E).
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - P$ est solution de l'équation $y' = y$.
En déduire les solutions de (E).

Exercices 96 à 98 p. 224

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s07-05

ØLJEN
Les maths en finesse

La propriété à démontrer

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions :

$$x \mapsto Ke^{ax}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

On souhaite démonter cette propriété.

Comprendre avant de rédiger

Il s'agit de prouver l'équivalence suivante : une fonction de la forme Ke^{ax} est solution et réciproquement toute solution est de la forme Ke^{ax}.

Rédiger

La démonstration rédigée

Étape 1

On vérifie que toute fonction y de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$, est solution.

Considérons une fonction $y : x \mapsto Ke^{ax}$.
Sa dérivée est $y'(x) = Kae^{ax}$, ainsi
$ay(x) = a(Ke^{ax}) = Kae^{ax} = y'(x)$.

Réciproquement, il faut prouver que toutes les solutions sont de cette forme.

Réciproquement, nous devons montrer que toute fonction solution est de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$.

Étape 2

En considérant une fonction g solution, on définit une fonction auxiliaire t dérivable et dont la dérivée est nulle.

Considérons g une solution de l'équation $y' = ay$.
On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = ag(x).$$

Définissons une fonction t par :

$$t(x) = g(x) \times e^{-ax}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$t'(x) = g'(x) \times e^{-ax} - ag(x)\, e^{-ax}$

$t'(x) = e^{-ax}\,(g'(x) - ag(x))$

$t'(x) = 0$

Étape 3

Toute fonction dont la dérivée est nulle est une fonction constante, donc t est constante.

La fonction t est donc une fonction constante.

Il existe un réel K tel que $t(x) = K$ et ainsi $g(x) = Ke^{ax}$.

Pour s'entraîner

De la même façon, montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' = -ay$, avec a non nul, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{-ax}$, avec K réel.