Exercices calculs et automatismes

21 Équations, inéquations (1)

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. $\ln\sqrt{2} + \ln 8 - 5\ln 4 =$

a $-5\ln 2$ **b** $-9\ln 2$ **c** $-\frac{11}{2}\ln 2$ **d** $-\frac{13}{2}\ln 2$

2. Soit la fonction f définie sur D_f par :

$$f(x) = \ln(6x+2) + \ln(6x-2) - 2\ln 2.$$

Alors $f(x) =$

a $2\ln(6x) - 2\ln 2$ **b** $\ln(12x - 4)$
c $\ln(9x^2 - 1)$ **d** $\ln(36x^2 - 1)$

3. Soit l'équation $\ln(4x) = \ln(x-1)$:

a $-\frac{1}{3}$ est la solution.
b $\ln\left(\frac{4x}{x-1}\right) = 0$ est une équation équivalente.
c L'équation n'a pas de solution.
d $4x = x - 1$ est une équation équivalente.

4. L'inéquation $\ln(-x) \leqslant 1$ a pour ensemble solution :

a $[-e\,;+\infty[$ **b** $[-e\,;0[$
c $\varnothing$ **d** $[-1\,;0[$

22 Dérivées

1. Soit $f(x) = 3\ln x - x^2$ définie sur $]0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit $g(x) = \ln(4-2x)$ définie sur $]-\infty\,;2[$. Calculer $g'(x)$.

23 Python

Algo

1. Que représente la valeur envoyée par la fonction **Python** suivante ?

```
from math import*
def f(x) :
    if 4-2*x<=0 :
        return "Ce nombre n'a pas
                d'image par f"
    else :
        return log(4-2*x)
```

Remarque Sur **Python**, une fois la bibliothèque `math` importée, `log(x)` donne `ln(x)`.

2. Compléter la fonction **Python** qui :
– prend en entrée un nombre ;
– renvoie si le nombre est solution ou non de l'inéquation $\ln(x) + x - 5 < 0$.

```
def solution_equa(x) :
    if x<=0 :
        return
    else...:
        if...:
            return "Ce nombre est
          solution de l'équation."
        else :
            return "Ce nombre
  n'est pas solution de l'équation."
```

24 Fonction ln

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) L'expression $\ln(x^2)$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) $\ln(12) = \ln(10) \times \ln(2)$
c) La fonction $x \mapsto \ln(-x)$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
d) La suite $u_n = \ln(3^n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est une suite géométrique de raison 3.

25 Limites (1)

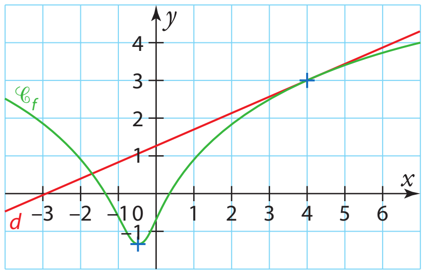
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x - \frac{3}{x} = 0$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\sqrt{x} = 0$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

26 Lectures graphiques

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction du type $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ avec a, b et c trois réels et la tangente d à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $f'(4) \approx 3$
b) Sur $[-4\,;6]$, il existe deux valeurs de x pour lesquelles la tangente à la courbe a un coefficient directeur nul.
c) Sur $[-4\,;6]$, $f'(x) > 0$ pour $x > -\frac{1}{2}$.
d) Sur $[0\,;6]$, $f''(x) < 0$.

27 Équations, inéquations (2)

1. Soit l'équation $\ln(2x+1) - \ln(4-x) = \ln(2x)$, quelles sont les étapes nécessaires à la résolution d'une telle équation ?

2. Soit $f(x) = 2\ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(4x+4)$. Comment étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$?

28 Limites (2)

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln(x) - 3x + 5 =$

a $-\infty$ **b** $+\infty$ **c** 5 **d** n'a pas de limite

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{\ln(x-2)}{(2-x)^3} + 1 =$

a 0 **b** $-\infty$ **c** $+\infty$ **d** 1

Exercices d'application

Équations/inéquations avec ln ou exp

Méthode 1 p. 173

29 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=0$ **b)** $\ln(x-e)=1$
c) $2\ln(x)+1=-3$ **d)** $e^{5-2x}=2$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(1-x)>0$ **b)** $\ln(3-2x)\leqslant 1$
c) $3e^{x}-1<8$ **d)** $e^{2x}-3e^{x}\geqslant 0$

30 Résoudre les équations suivantes.

a) $5-\ln x=2$ **b)** $e^{4x+1}=5$
c) $\ln(2x+e)=1$ **d)** $\ln(x^2+x-6)=0$

31 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right)\leqslant 0$ **b)** $\ln(x^2+2x)-1>0$
c) $6e^{x}-1\geqslant 3-4e^{x}$ **d)** $3e^{2x}-9e^{x}<0$

32 Résoudre les équations suivantes.

a) $(\ln x)^2+4\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-5=0$ (On pourra poser $X=\ln x$.)
b) $e^{2x}-2e^{x}=8$ (On pourra poser $X=e^{x}$.)

33 **1.** Résoudre $-X^2+7X-10>0$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $-(\ln x)^2+7\ln x-10>0$.

34 **1.** Résoudre l'équation $X^2+3X-4=0$.
2. En déduire la résolution de l'inéquation $(\ln x)^2+3\ln x-4\geqslant 0$.

Coup de pouce Penser à utiliser un changement de variable.

35 **1.** Résoudre $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$.
On posera $X=\ln x$.
2. Résoudre $2(\ln x)^2-\ln x=0$.
3. Résoudre $(\ln x)^2+\ln x=-1$.

Équations/inéquations avec ln *u*

Méthode 2 p. 173

36 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(3x-6)=\ln(4-x)$
b) $\ln(2x)-\ln(x+1)=\ln(x-5)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(4x-2)+\ln(5)<1-\ln 2$
b) $\ln(5-x)\geqslant\ln(x-1)$

37 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=2\ln x$
b) $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(4-2x)$

38 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x^2-4x+4)-\ln(x-2)<\ln(8-x)$
b) $\ln(2x+4)+\ln(1-x)-\ln 2\geqslant\ln(e^{-x})-1$

Propriétés algébriques de ln

Méthode 3 p. 175

39 **1.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif.

a) $2\ln 5-\ln 15$ **b)** $-\ln 3+4\ln 2-\ln 5$

2. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

a) $4\ln 5+\ln 25-3\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

b) $\ln 125-\dfrac{1}{2}\ln 25+\ln\left(\dfrac{1}{25}\right)-4\ln\sqrt{5}$

40 **1.** Exprimer sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif, le nombre $3\ln 2-\ln 9+\ln 5$.
2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ le nombre $\ln 8-3\ln 4+\ln\sqrt{2}$.

41 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{2\ln 3+\ln 4}$ **b)** $e^{3\ln 2-\ln 4}$ **c)** $\dfrac{e^{\ln 6+1}}{e^{\ln 9+2}}$ **d)** $\dfrac{e^{2\ln 5+\ln 3}}{e^{2\ln 3}}$

42 Simplifier au maximum la somme $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

43 **Démo** Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a $\ln(e^{x}+1)=x+\ln(1+e^{-x})$.

44 **Démo** Démontrer que, pour tous nombres réels a et $b\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$.

Coup de pouce $a\times\dfrac{1}{a}=1$

45 Les fonctions f et g définies par $f(x)=\ln(4-x^2)-\ln(2-x)$ et $g(x)=\ln(2+x)$ sont-elles égales ?

Inéquations du type $q^n<a$

Méthode 4 p. 175

46 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<10^{-4}$ **b)** $\left(\dfrac{9}{7}\right)^n\geqslant 10^6$
c) $1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999$ **d)** $0{,}004>\left(\dfrac{8}{9}\right)^{2n}$

47 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001$ **b)** $1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n>0{,}999999$
c) $1{,}2^{2n}>10^5$ **d)** $0{,}02>\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$

48 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=\dfrac{3}{2}$. À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils strictement supérieurs à 1 million ?

Tangentes, position relative de courbes

Méthode 5 p. 177

49 Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\ln x + 1$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ en 1.

2. a) Montrer qu'étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente T_1 revient à étudier le signe de $2(\ln(x) - x + 1)$.

b) Soit $g(x) = \ln(x) - x + 1$. Déterminer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de g.

c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

d) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_1.

50 Soit g la fonction définie par $g(x) = -3\ln x + 2x - 4$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Déterminer l'équation de la tangente T_e à $\mathscr{C}_g$ en e.

2. a) Montrer qu'étudier la position relative de $\mathscr{C}_g$ et de sa tangente T_e revient à étudier le signe de $h(x) = 3\left(\dfrac{x}{e} - \ln(x)\right)$.

b) Déterminer $h'(x)$ et en déduire le sens de variation de h sur $]0\,;+\infty[$.

c) Calculer $h(e)$ et en déduire le signe de h sur $]0\,;+\infty[$.

d) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_g$ et de sa tangente T_e.

51 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(4 - x)$.

Étudier la position relative des deux courbes sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;4\right[$.

52 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ et $g(x) = \ln(-3x + 15)$.

Étudier la position relative des deux courbes sur $]-1\,;5[$.

Étude de fonction avec ln

Méthode 6 p. 177

53 Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de définition ou de dérivabilité.

a) $f(x) = (\ln x + 3)(x - 2)$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{3\ln x + 1}$

c) $f(x) = (\ln(x) - 2x + 1)^3$ **d)** $f(x) = \sqrt{3x - x\ln(x)}$

54 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \dfrac{4}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

55 Soit la fonction g définie sur $]0\,;e[\cup]e\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}$. Déterminer le sens de variation de g sur son ensemble de définition.

56 Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = (\ln x)^2 - 6\ln x + 5.$$

1. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

2. a) En déduire le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

b) Déterminer les solutions de cette équation à l'aide d'un changement de variable.

Limites simples et indéterminées

Méthode 7 p. 179

57 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln(x) - 4$ **b)** $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) + \dfrac{3}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2\ln(x) - 4x^2 + 1$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \dfrac{\ln(x-3)}{x-3} + 3x$

58 Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

a) $f(x) = \ln(3 - 4x)$ $\quad$ $I = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2-x}{x+1}\right)$ $\quad$ $I =]-1\,;2[$

59 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0} 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln x - \dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)+2}{\ln(x)-4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{x}}{\ln(2x)}$

e) $\lim\limits_{x\to0} (\ln x)^2 - 2\ln x$ **f)** $\lim\limits_{x\to1} (x-1)^2\ln(x-1)$

60 f est la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(5x)}{5x-1}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Utiliser la limite d'un taux d'accroissement avec $f(x) = \ln(1 + x)$.

2. f est la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{5}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(5x)}{5x-1}$. Déterminer la limite de f en $\dfrac{1}{5}$. Écrire f sous la forme $f(x) = \dfrac{\ln((5x-1)+1)}{5x-1}$ et à utiliser le résultat de la question **1.**

Dérivées de fonctions du type ln u

Méthode 8 p. 179

61 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln(8x - 4)$ **b)** $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ **d)** $f(x) = \ln(e^x - 1)$

62 Déterminer le plus grand ensemble de définition posible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln\sqrt{4-x}$ **b)** $f(x) = \ln(\ln 2x)$

c) $f(x) = x^2\ln(e^x + 1)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2-1}$

e) $f(x) = \ln((4x - 1))^2$ **f)** $f(x) = (\ln(x^2 - 1))^3$

Exercices d'entraînement

La fonction ln

Méthode 9 p. 180

63 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - (1+\mathrm{e})\ln x + \mathrm{e}.$$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 1 - \mathrm{e}}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) En déduire le nombre d'antécédents de 0 par f.

d) Retrouver la réponse en résolvant une équation, puis en déduire la valeur exacte du ou des antécédents.

64 **A ▸** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

B ▸ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = 2x$.

3. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

On prendra comme unité :
- 2 cm sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

D'après Bac S, Liban, 2012.

65 On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$. Algo

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout x de sur $[1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

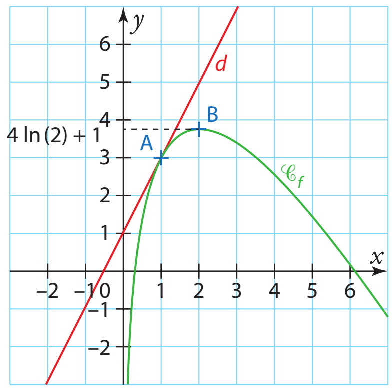
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de D.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

66 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous et d la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

L'expression de f est du type $f(x) = a\ln x + bx + c$ avec a, b, c trois réels.



A ▸ 1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$; $f'(1)$ et $f(2)$.

2. En déduire l'expression de f.

3. Résoudre graphiquement $f(x) \geqslant 3$.

B ▸ On admet pour la suite de l'exercice que :

$$f(x) = 4\ln x - 2x + 5.$$

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2\ln x - x + 1$.

1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

3. En déduire le tableau de variations de g.

4. Vérifier que 1 est solution de l'équation $g(x) = 0$.

5. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

6. En déduire le signe de g.

7. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 3$.

67 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Étudier la limite de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) En déduire l'existence d'asymptotes pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2(\ln x - 1)}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4. Construire $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

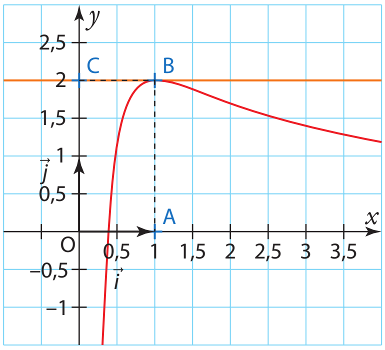
68 On considère l'équation (E_1) $\mathrm{e}^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) $\ln x - \dfrac{x}{n} = 0$.

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) a-t-elle deux solutions ?

D'après Bac S, Antilles-Guyane, septembre 2014.

69 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. **Algo**



On dispose des informations suivantes :
– les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;
– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
– il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
c) En déduire les réels a et b.
2. a) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
On pourra remarquer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2\ln x}{x}$.
c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un réel β de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous écrit en langage **Python**.

```
from math import*
def f(x):
      image=2/x+2*math.log(x)/x
      return image
a=1
b=1
while b-a>0.1:
      m=1/2*(a+b)
      if f(m)<1 :
            a=m
      else :
            b=m
print(a,b)
```

a) Quel est le rôle de la fonction Python f ?
b) Quel est le rôle de ce programme ?
c) Quelle instruction Python faudrait-il modifier afin que ce programme affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ?

D'après Bac S, 2013.

70 Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = 3 - 3\ln x + \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ avec $h(x) = -3x - 2\ln x$.
2. a) Étudier le sens de variation de h.
b) Montrer qu'il existe un unique réel α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$.
c) En déduire le signe de h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. a) À l'aide de la question **2.**, déterminer le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$.
b) En déduire que le maximum de g est $M = \dfrac{4{,}5\alpha^2 + 2}{\alpha}$.

Fonctions du type ln ($u(x)$)

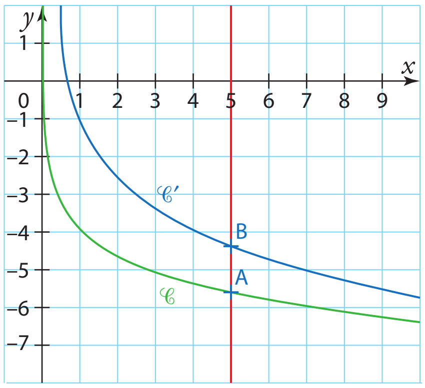
Méthode 10 p. 181

71 $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les courbes respectives des fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2 + 50x}\right)$$

$$g : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3x^2 + x - 1}\right)$$

1. Existe-t-il un point M en lequel les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ s'interceptent ?



2. Soit A et B deux points appartenant respectivement aux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ayant pour abscisse x pour $x \in [1 ; +\infty[$.
a) Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la distance AB lorsque x tend vers $+\infty$?
b) Démontrer cette conjecture.

72 Soit la fonction g définie sur un certain intervalle I par $g(x) = \ln(ax + b)$ avec a et b des réels.
1. Sachant que la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g passe par le point A de coordonnées (0 ; 1) et que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente au point d'abscisse 1 parallèle à la droite $d : y = 2x - 1$, en déduire les valeurs de a et b.
2. Déterminer I et le sens de variation de g sur I.

Exercices d'entraînement

73 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) En déduire l'existence d'une asymptote.

3. a) Déterminer la fonction dérivée de f.

b) En déduire le sens de variation de f.

4. a) Montrer que, pour tout x, $f(x) = -x + \ln(1 + e^{x})$.

b) Soit la droite d d'équation $y = -x$. Déterminer la limite de $f(x) + x$ en $-\infty$ et en déduire une interprétation graphique.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}$ et de d.

74 Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - 2\ln(x+1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

3. Montrer qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente.

4. Étudier la position de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

75 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a, b, et c sont trois réels. Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$-$		0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↘	$\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$	↗ 0 ↗	$+\infty$

1. En utilisant les données du tableau, montrer que $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. Calculer $f'(x)$. Puis vérifier que les variations et les informations portées sur le tableau ci-dessus sont exactes.

76 f est une fonction définie sur $]-5\,;5[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{5-x}{5+x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

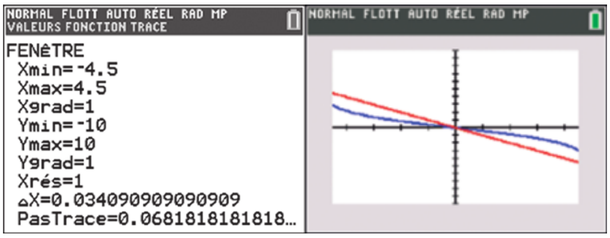
1. Pour tout réel $x \in\,]-5\,;5[$, montrer que $f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire quant aux éléments de symétrie de $\mathscr{C}$?

2. a) Déterminer la limite de f en -5. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-5\,;0]$.

c) Montrer que la droite d d'équation $y = -0{,}4x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d ont été tracées à l'aide de la calculatrice.



a) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente d ?

b) Montrer que, pour démontrer cette conjecture, il faudra étudier le signe de la fonction h définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{5-x}{5+x}\right) + 0{,}4x$.

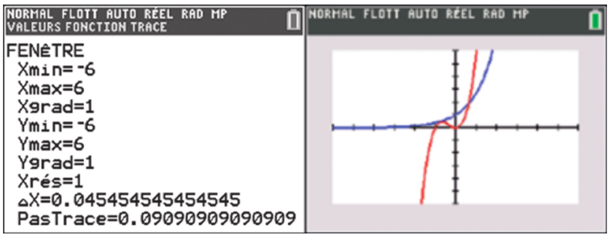
c) Montrer que $h'(x) = \dfrac{-2x^2}{5(5+x)(5-x)}$.

d) En déduire le signe de $h'(x)$ sur $]-5\,;5[$, puis le tableau de variations de h sur le même intervalle.

e) Calculer $h(0)$ et en déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de sa tangente d.

77 On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle $e^{x} = 3(x^2 + x^3)$.

A ▶ Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

B ▶ 1. a) Étudier, selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. a) Étudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que, pour tout réel de $]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

c) En déduire les variations de la fonction h.

d) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

e) Conclure quant à la conjecture de la partie **A**.

D'après Bac S, centres étrangers, 2012.

78 **1.** Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-4) \text{ et } g(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-4}\right).$$

Les fonctions f et g sont-elles égales ?

2. a) Calculer les limites de g aux bornes de l'intervalle $]4\,;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variations de g sur l'intervalle $]4\,;+\infty[$.

3. a) Discuter selon les valeurs du réel m, s'il existe des tangentes à $\mathscr{C}_g$ parallèles à la droite d_m d'équation $y = mx$ pour $x \in\,]4\,;+\infty[$.

b) Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_g$ passant par l'origine du repère pour $x \in\,]4\,;+\infty[$?

> **Coup de pouce** Penser à introduire la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{9x}{(x-4)(2x+1)} + \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-4}\right)$, dresser son tableau de variations et en déduire le signe de h sur $]4\,;+\infty[$.

ln et suites

79 **A ▶** On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+2x) - x$.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;2]$.

B ▶ Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+2x)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Représenter les premiers termes de la suite (u_n) à l'aide de la calculatrice et conjecturer le sens de variation de la suite ainsi que son éventuelle convergence.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

3. En déduire la convergence de la suite (u_n) vers un réel ℓ à déterminer.

80 Algo

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n{}^2 + 1)$, pour tout entier naturel n.

A ▶ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(x^2+1).$$

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Pour $x > 2$, étudier le signe de la fonction $h(x) = x^3 - x^2 - 1$. Penser à dresser le tableau de variations de cette fonction pour pouvoir ensuite en déterminer le signe.

c) En déduire que, pour tout $x > 2$, $f(x) > x - \ln(x^3)$.

d) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

B ▶ 1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. Expliquer le rôle du programme écrit ci-dessous en langage **Python**.

```
from math import*
n=0
u=1
while u>=0.01 :
    n=n+1
    u=u-math.log(u*u+1)
print(u,n)
```

81 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. a) Exprimez u_n en fonction de n.

b) En déduire que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.

2. a) Soit $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.
Calculer S_n en fonction de n.

> **Coup de pouce** Utiliser la somme des termes d'une suite arithmétique.

b) En déduire la limite de (S_n).

3. a) Soit $P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$. Montrer que $\mathrm{e}^{S_n} = P_n$.

b) En déduire la limite de la suite (P_n).

82 Algo

On pose $u_0 = 1$, $u_1 = \mathrm{e}$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{\mathrm{e}\,\square\, u_n}.$$

1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

2. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.

> **Coup de pouce** Utiliser une démonstration par récurrence et la définition de v_n donnée à la question **1**.

3. a) Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n).

b) Écrire un algorithme qui permette de déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$.

c) Retrouver la réponse précédente à l'aide de la résolution d'une inéquation.

D'après Bac S, Amérique du Sud, 2018.

Exercices d'entraînement

83 **A ▶** On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Algo

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

3. a) Dresser le tableau de variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

b) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $f(x)=0$.

c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

B ▶ Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

1. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
N← valeur saisie
U=0
Pour i variant de 1 à N
        U=U+1/i
Fin Pour
Afficher U
```

Expliquer le rôle de cet algorithme et donner la valeur exacte affichée par celui-ci lorsque l'utilisateur entre la valeur $N=3$.

2. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de N.

3. À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture quant au sens de variation de la suite (u_n).

4. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1}-u_n=f(n)$ où f est la fonction définie dans la partie **A**.
En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

D'après Bac S, 2012.

84 On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

A ▶ 1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2. a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)(3x+1)}.$$

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

B ▶ Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

D'après Bac S, Nouvelle Calédonie, 2019.

85 **A ▶ Établir une inégalité**

Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on définit la fonction f par :

$$f(x)=x-\ln(x+1).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. En déduire que, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $\ln(x+1)\leqslant x$.

B ▶ Application à l'étude d'une suite Algo

On pose $u_0=1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=u_n-\ln(1+u_n).$$

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 0$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 1$.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell=f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**. En déduire la valeur de ℓ.

3. a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}.

D'après Bac S, Amérique du Nord, 2019.

Modélisations

86 Dans un bouillon de culture, on observe au temps $t=0$, la présence de 10 000 bactéries. SVT

Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec u_n représentant le nombre de bactéries présentes dans le bouillon de culture n heures après la première observation.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme u_0 et la raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. En déduire au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million.

87 On tire successivement, et avec remise, n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999 ?

88 On place 2 500 € à intérêts composés à un taux annuel de 1,75 %. Combien d'années faudra-t-il pour doubler son capital ?

89 Un capital de 1 200 € est placé à un taux annuel composé de 2 % au 1er janvier 2020.
On modélise la situation par une suite (u_n) telle que u_n représente le capital à l'année 2020 + n.
1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le 1er terme et la raison.
2. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il triplé ?

90 **A ▶** Soit un capital C placé à un taux t % d'intérêts composés. On s'intéresse au cas particulier d'un capital que l'on aimerait tripler et à une méthode rapide pour déterminer approximativement le nombre d'années le permettant. SES

1. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

Coup de pouce Penser à étudier les fonctions h et g définies par $h(x) = x - \dfrac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ et $g(x) = x - \ln(1+x)$.

2. Pour des petites valeurs de x on peut alors considérer que $\ln(1+x) \approx x$ avec un majorant de l'erreur égal à $\dfrac{x^2}{2}$.
Expliquer alors pourquoi, afin de calculer mentalement le nombre d'années permettant de tripler un capital, on peut utiliser la règle : « Un capital triple au bout de $\dfrac{110}{t}$ années, avec t le taux d'intérêts, valable pour de petites valeurs de t. »

B ▶ *Rappels :* un capital C est placé à un taux de t % en composition annuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$; un capital C est placé à un taux de t % en composition mensuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C \times \left(1 + \dfrac{\left(\frac{t}{12}\right)}{100}\right)^{12}$.

1. En prenant $t = 5$ % et $C = 1\,500$ €, comparer les deux types de placements précédemment décrits.
2. En finance, on utilise le taux d'intérêt continu. On peut l'imaginer comme étant une périodicité infiniment petite.
a) Soit un capital C placé à un taux de t % en composition sur une période m ; le capital C' au bout d'une année sera

$$C \times \left(1 + \dfrac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^{m}.$$

Montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} C \times \left(1 + \dfrac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^{m} = Ce^{\frac{t}{100}}$.

Coup de pouce $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ (voir la démonstration ↳ exercice 112)

b) Avec un placement à intérêt continu, quel devrait être le taux d'intérêt afin de pouvoir doubler son capital en un an ?

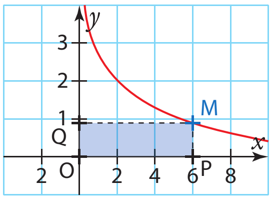
91 À la mort d'un être vivant, la proportion de carbone 14 diminue au fil des années.
Les archéologues peuvent estimer l'âge d'un bois ou d'un squelette en mesurant la proportion de carbone 14 présent dans l'objet préhistorique.
L'âge $A(x)$ en années est modélisé par $A(x) = -\mathrm{k} \ln x$ où k est une constante et x est la proportion de carbone 14 restant par rapport au nombre d'atomes de départ.
1. La moitié des atomes de carbone 14 est désintégrée au bout de 5 730 ans.
En déduire la valeur de k (arrondir à l'unité).
2. Dans la suite, on prendra
$A(x) = -8\,267 \ln x$.
a) Quel est l'âge d'une coquille d'un fossile dont la proportion de carbone 14 est 0,25 ?
b) Quelle est la proportion en carbone 14, de la moitié de Xin Zhui, momie âgée de 2 170 ans ?

Travailler le Grand Oral

92 Dans un repère orthogonal, on considère la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction ln et la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction racine carrée. Soit x un réel strictement positif. On note respectivement M et N les points de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'abscisse x. TICE Algo Démo
But : déterminer la limite de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$.
- **Groupe 1 :** modéliser la situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Quelle semble être la limite ?
- **Groupe 2 :** modéliser la situation à l'aide d'un tableur. Quelle semble être la limite ?
- **Groupe 3 :** modéliser la situation à l'aide d'un algorithme. Quelle semble être la limite ?
- **Groupe 4 :** rédiger la démonstration en utilisant l'astuce $\sqrt{x} - \ln x = \sqrt{x}\left(1 - 2\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$ qui sera préalablement à démontrer.

93 Calcul d'aire et étude de ln

Soit f_a la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_a(x)=a-\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\mathscr{C}_{f_a}$ la courbe représentative de f_a. On donne ci-dessous $\mathscr{C}_{f_a}$ dans un repère orthonormé.



1. À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_{f_a}$ on associe le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q, projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées de M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

2. Existe-t-il plusieurs valeurs de a pour lesquelles cette aire maximale soit atteinte en M ayant pour abscisse a ?

94 Avec une fonction auxiliaire

A ▶ Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x)=\ln(x)+x-3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

B ▶ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

C ▶ Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction g définie par $g(x)=\ln(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'après Bac S, Amérique du Nord, 2015.

95 Limite et taux d'accroissement

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\ln(x^2-3).$$

1. Après avoir déterminé l'ensemble de définition et de dérivabilité de f, calculer $f'(x)$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}$.

Coup de pouce Faire le lien entre le calcul de limite demandé et la dérivée (taux d'accroissement).

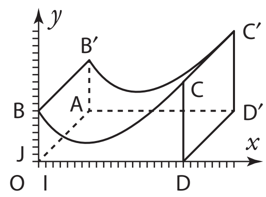
3. Existe-t-il deux tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y=x+5$?

96 Modélisation

Algo

On donne ci-contre la représentation d'un module de skateboard.

Le profil de ce module a été modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$.

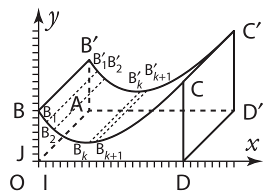


A ▶ 1. Montrer que, pour tout $x\in[0\,;20]$, $f'(x)=\ln(x+1)-2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;20]$ et dresser son tableau de variations.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. La valeur absolue de ce coefficient directeur est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

B ▶ On souhaite peindre en noir la surface supérieure du module. On admet que l'aire de cette surface sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ (voir figure ci-contre) avec $B_kB_{k+1}=\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$.



Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie à peindre.

```
S ← ...
Pour K variant de ... à ...
        S ← ...
Fin Pour
```

D'après Bac S, 2015.

97 ln u et tangente

Soit f la fonction définie par $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)-x+2$ sur $[2\,;2e]$ et les points $I(2\,;0)$ et $B(2e\,;2)$.

1. Justifier que B et I appartiennent à $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}_f$ en I.

2. Déterminer une équation de la tangente T_{2e} à $\mathscr{C}_f$ en B.

3. Soit D l'intersection de T_{2e} et (Ox).
Déterminer les coordonnées de D.

98 Position relative et croissance comparée

Soit les fonctions f et g définies sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}\quad\text{et}\quad g(x)=(\ln(x-1))^2+\frac{3-2x}{x-1}.$$

1. Dresser le tableau de variations de f en déterminant les limites en 1 et $+\infty$.

Coup de pouce Pour la limite en 1, penser à faire apparaître une croissance comparée en mettant au même dénominateur.

2. a) En déduire que $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de la droite $d : y=1$.

b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $]1\,;+\infty[$.

Préparer le BAC L'essentiel

Propriétés immédiates

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ avec $x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

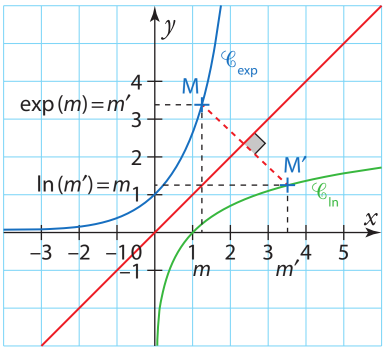
Propriétés algébriques

a et b sont deux réels strictement positifs

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$

Fonction logarithme népérien

$f(x) = \ln(x)$



Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$

Dérivées

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x > 0$
- $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$

Variations

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Signes

- Pour tout $0 < x < 1$: $\ln x < 0$.
- Pour tout $x > 1$: $\ln x > 0$.

Équations

- $\ln x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^a$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $a^n = b$ avec a et b positifs différents de 1 $\Leftrightarrow n = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Inéquations

- $\ln x \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^a$
- $\ln x \geqslant \ln y \Leftrightarrow x \geqslant y$
- $a^n \geqslant b$ avec a et b positifs $\Leftrightarrow n\ln a \geqslant \ln b$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Résoudre des équations, inéquations avec ln ou exp	Méthode 1	1, 2, 29, 30
▶ Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u \leqslant \ln v$	Méthode 2	3, 4, 36, 37
▶ Utiliser les propriétés algébriques de ln	Méthode 3	5, 6, 39, 40
▶ Résoudre des inéquations du type $q^n < a$	Méthode 4	7, 8, 46, 47
▶ Déterminer des tangentes, la position relative de courbes	Méthode 5	9, 10, 49, 50
▶ Étudier des fonctions avec ln	Méthode 6, Méthode 9	11, 12, 17, 18, 53, 54, 63
▶ Déterminer des limites, notamment dans le cas de formes indéterminées	Méthode 7	13, 14, 57, 58
▶ Dériver et étudier des fonctions avec $\ln u$	Méthode 8, Méthode 10	15, 16, 19, 20, 61, 62, 73

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s06-07

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonnes réponse(s).

	A	B	C	D
99 L'écriture $\ln\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ se simplifie sous la forme :	$\ln\left(2\sqrt{5}\right)$	$2\ln\left(\sqrt{5}\right)$	$\ln 3$	$\dfrac{\ln\left(\sqrt{5}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}+\ln\left(\sqrt{5}\right) \square \ln\left(\sqrt{2}\right)$
100 L'équation $\ln(x-1)-\ln(2-x)=\ln 2+\ln x$:	est équivalente à l'équation $\dfrac{x-1}{2-x}=2x$	n'admet aucune solution	admet une seule solution	admet deux solutions
101 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x-x\ln x)=$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
102 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=$	0	$+\infty$	$-\infty$	1
103 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x)=\ln\left((2x+4)^2\right)$. $f'(x)=$	$\dfrac{2}{x+4}$	$\dfrac{2}{x+2}$	$\ln(4(2x+4))$	$\dfrac{1}{(x+2)\ln(2x+4)}$
104 Soit la fonction g définie par $g(x)=\ln(\ln(1-x))$ et D_g son ensemble de définition.	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln(1-x)}$
105 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5x\ln x-5x$ et T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.

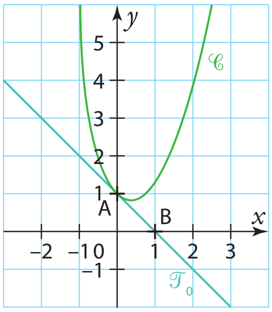
106 Retrouver l'expression de la fonction

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c - \ln(x+1)$$

avec a, b et c des réels.

La droite $\mathscr{T}_0$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A(0 ; 1) et passe par B(1 ; 0).



1. À partir des informations données, et sachant que $f'(1) = \dfrac{3}{2}$, montrer que $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1)$.

2. Déterminer le sens de variation de f et les limites aux bornes.

3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui soient perpendiculaires à $\mathscr{T}_0$? Justifier par un calcul.

4. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 5$ et la fonction h définie sur $]-\infty\,;-5[\cup]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 + 1 - \ln(x^2 + 6x + 5).$$

Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sur $]-1\,;+\infty[$.

Méthode 1 Méthode 2 p. 173 Méthode 5 p. 177 Méthode 7 Méthode 8 p. 179

107 Avec une fonction auxiliaire

On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\ln x}{2x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{5x^2 - 2 + 2\ln x}{2x^2}.$$

1. a) Calculer la limite de $g(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$ et que $\alpha \in\,]0{,}5\,;1[$.

d) En déduire le signe de g selon les valeurs de x.

2. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire les variations de f.

c) Montrer que f admet un minimum en α et que ce minimum vaut $\dfrac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

d) En déduire le signe de f sur $]0\,;+\infty[$.

Méthode 6 p. 177 Méthode 7 p. 179 Méthode 9 p. 180

108 Probabilités et ln

Algo

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits en verre incassable, qu'il demande de rapporter une fois vide. On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

– à l'issue de la 1re semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;

– si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,95 ;

– si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier n on nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

On note $r_n = P(R_n)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul :

$$r_{n+1} = 0{,}75 r_n + 0{,}2.$$

Coup de pouce Penser à utiliser un arbre pondéré.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8.$$

3. a) Écrire un algorithme qui permet de déterminer le plus petit rang n à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à 0,80001.

b) Retrouver ce résultat par le calcul et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

D'après Bac S, Liban, 2019.

Méthode 4 p. 175

109 ln (u), limites et variations

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Soit la fonction h définie par :

$$h(x) = \ln(g(x)).$$

Montrer que h est définie sur tout $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:

$$h(x) = \frac{-1 - 2x\ln x}{x}.$$

3. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Méthode 3 p. 175 Méthode 7 p. 179

D'après Bac S, Nouvelle-Calédonie, novembre 2018.

Exercices vers le supérieur

110 Relation fonctionnelle

But : découvrir une autre approche de la fonction ln.
On cherche à déterminer les fonctions qui vérifient :

$$\begin{cases} f(ab) = f(a) + f(b) \\ f'(1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que toute fonction f non nulle vérifiant les conditions ci-dessus ne peut pas être définie en 0.
Pour la suite de l'exercice on considèrera les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que $f(1) = 0$.

3. Montrer que $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

4. a) Montrer que, pour tout $x > 0$ et $h > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \dfrac{h}{x}\right) - f(1)}{\dfrac{h}{x}} \times \frac{1}{x}.$$

b) En déduire que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

5. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire le signe de f selon les valeurs de x.

Remarque On appelle ln la fonction vérifiant ces conditions.

111 Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$

On définit, pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b \ln a}$.

Pour tout $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha.$$

1. À quoi correspondent précisément les fonctions f_0 et f_1 ?
Pour la suite de l'exercice, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.

2. Montrer que la fonction f_α est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

3. Étude des fonctions f_α avec $\alpha < 0$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f_α.

c) Tracer $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ dans les cas particuliers où $\alpha = -1$; $\alpha = -0{,}5$.

4. Étude des fonctions f_α avec $\alpha > 0$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f_α.

c) On pose $h_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x = 0 \end{cases}$.

Montrer que h_α est continue en 0.

d) Étudier la dérivabilité de h_α en 0.

Coup de pouce Penser à effectuer une disjonction de cas, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

e) Tracer sur le même graphique que précédemment les courbes $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ dans les cas particuliers où $\alpha = 0{,}2$; $\alpha = 0{,}5$ et $\alpha = 2$.

112 Une autre approche de e^x

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ avec $n > -a$.

On pose $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

1. Montrer que la suite $(\ln(u_n))$ est bien définie.

2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$.

Coup de pouce Penser à utiliser $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

3. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

113 Logarithme décimal et grands nombres

A ▶ On appelle la fonction logarithme décimal (notée log) la fonction définie, pour tout réel $x > 0$, par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

1. a) Montrer que $\log(10^n) = n$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que $\log(x^n) = n\log(x)$ avec $x \in]0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction log, en y faisant apparaître les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Soit N un entier naturel non nul.
On veut montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimal de N est $1 + E(\log N)$ où $E(x)$ représente la partie entière du réel x.

a) Tout nombre entier naturel N peut être encadré par deux puissances de 10 sous la forme :
$10^n \leqslant N < 10^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
À l'aide de cet encadrement, en déduire le nombre de chiffres de N.

b) À l'aide du sens de variation de la fonction log déterminé à la question **2.**, en déduire que le nombre de chiffres de N est $1 + E(\log N)$.

B ▶ À l'aide de cette méthode, déterminer le nombre de chiffres que possède le plus grand nombre premier annoncé en fin d'année 2018 grâce au projet GIMPS (*Great Internet Mersenne Prime Search*) qui devient ainsi le 51e nombre de Mersenne : $2^{82589933} - 1$.

114 Vrai ou faux ? PACES

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(1 - \sin(3x)).$$

a) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-\cos(3x)}{1 - \sin(3x)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

d) $f(x) = -\ln 2$ admet 6 solutions sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

115 Logique ?

On cherche l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21}\right)$. On tient pour cela le raisonnement suivant : « f est définie si et seulement si on a $\dfrac{15+2x-x^2}{x^2+10x+21}>0$. Or $15+2x-x^2=(3+x)(5-x)$ et $x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$. Il faut donc et il suffit d'avoir $\dfrac{5-x}{x+7}>0$, soit $x\in\,]-7\,;5[$.

Conclusion : l'ensemble de définition cherché est $]-7\,;5[$.

Ce raisonnement est-il exact ?

Justifier.

D'après FESIC, 2018.

116 Étude d'une fonction

Agro-Véto

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2} \text{ et } g(x)=1+x^2-2x^2\ln(x).$$

1. a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition, et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution et en déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

117 Suite et ln

Agro-Véto

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\ln(u_n+1)+\ln(2) \end{cases}$.

1. Donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α dont on déterminera un encadrement d'amplitude inférieure à 0,5.
Justifier.

4. Montrer que α vérifie l'égalité $\mathrm{e}^{-\alpha}(1+\alpha)=\dfrac{1}{2}$.

D'après BCPST, 2017.

118 QCM

Pour chacune des questions, choisir la bonne réponse.

1. La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1}=\ln(1+u_n) \\ u_0=1 \end{cases}$ est :

a croissante **b** décroissante

c convergente vers e **d** divergente vers $-\infty$

2. L'équation $x^2\ln 2=x^3\ln 3$ a pour solution :

a $\left\{0\,;\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right\}$ **b** $\left\{0\,;\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$ **c** $\left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$ **d** $\{0\}$

3. Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\ln(\mathrm{e}^{-x}-2)$ est :

a $]0\,;+\infty[$ **b** $]\ln 2\,;+\infty[$ **c** $]-\infty\,;-\ln 2[$ **d** $]0\,;2[$

Concours de l'école de santé des armées, mai 2019.

119 Points d'intersection

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2\ln x-(\ln x)^2$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B d'abscisses respectives x_A et x_B telles que $x_A<x_B$. Déterminer les valeurs exactes de x_A et de x_B. Détailler les calculs.

D'après GEIPI Polytech, 2012.

120 Dérivées et limites

Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)}$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)}{\sin x}$.

Montrer au préalable que $x-\dfrac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x$.

D'après SPI EEAPR, 2017.

121 Déterminer f

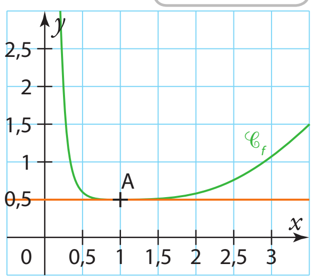
Sciences Po

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$f(x)=ax^2+\dfrac{b}{x^2}-(\ln x)^2$,

où a et $b\in\mathbb{R}$.

Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par A(1 ; 0,5) et admet une tangente horizontale en A, déterminer a et b.



D'après Sciences Po, 2018.

122 Fonction et suite

a est un réel strictement positif donné.

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel strictement positif par $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, $f'(x)=\ln\left(1+\dfrac{a}{x}\right)-\dfrac{a}{x+a}$.

b) Calculer $f''(x)$ et en déduire les variations de f'.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, en déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $u_n=\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$ et $v_n=\ln(u_n)$.

a) Étudier la monotonie de la suite (v_n), en déduire celle de la suite (u_n).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et en déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Sciences Po, 2010.

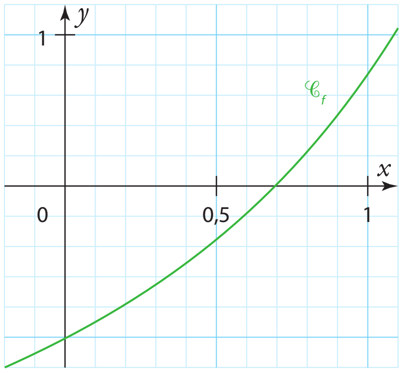
Travaux pratiques

Algo 30 min Chercher Raisonner

1 Approximation de ln 2 par dichotomie

Le but de ce TP est de déterminer une valeur approchée de ln 2 avec une précision de 10^{-p} près, $p \in \mathbb{N}$.
La méthode utilisée sera la méthode par dichotomie qui repose sur le théorème suivant.

Théorème : Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$.
Il existe alors une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.



Dans la suite de ce TP, on notera f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = e^x - 2$.

1. Écrire la fonction **Python** f ayant pour paramètre flottant x correspondant à la fonction numérique f mentionnée ci-dessus et qui retourne donc $e^x - 2$ (une ligne de code).

2. a) Écrire la fonction **Python** `Dicho` ayant pour paramètres flottants a et b, une fonction f (vérifiant les hypothèses du théorème énoncé) et un entier naturel n, qui retourne une valeur approchée de α, solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-p} près à partir du programme incomplet écrit ci-dessous en langage **Python**.

```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while a-b>...:
        m=(a+b)/2
        if f(m) ...:
            a=...
        else:
            b=...
    return...
```

b) Modifier le programme de sorte à le rendre plus performant et qu'il puisse être également utilisé dans le cas d'une fonction non nécessairement croissante.

```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a>...:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)>0:
            a=...
        else:
            b=...
    return...
```

3. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) En déduire une valeur approchée de ln 2 à 10^{-5} près à l'aide de la fonction `Dicho` précédente, en saisissant sur la console même `Dicho` (a, b, f, n) en ayant pris le soin de remplacer a, b et n par les valeurs adéquates.

TICE — Maths & Histoire — Algo — 45 min — Chercher, Raisonner

2 Algorithme de Briggs

Henry Briggs (1556-1630) est un mathématicien anglais qui fut coinventeur, avec John Napier, alias Neper, des logarithmes décimaux. On donne ci-dessous une description de sa méthode permettant de trouver une valeur approchée de log 5. Cette méthode de Briggs a permis de construire la table des logarithmes décimaux publiée en 1624 et expliquée par Euler en 1748.

John Napier

A ▸ Explication de la méthode de Briggs par Euler

DOCUMENT Table des logarithmes lienmini.fr/maths-s06-08

1. Télécharger la table des logarithmes à l'aide du lien ci-contre.

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, et proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 et 10, dont les logarithmes sont 0 et 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, et on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.
Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver Z = 5,000 000 ; à quoi répond le logarithme cherché 0,678 970 ; en supposant la base logarithmique $a = 10$.
Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à-peu-près. C'est de cette manière que Briggs et Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale*.

2. On appelle moyenne géométrique c de deux nombres a et b, le nombre c vérifiant $c = \sqrt{ab}$.
À partir de C, tous les nombres de la 1re colonne correspondent à des moyennes géométriques de deux nombres, expliquées en 3e colonne (ex. $C = \sqrt{AB}$), et tous les nombres de la 2e colonne correspondent à la moyenne arithmétique des deux nombres correspondants dans la 2e colonne (ex. $\log C = \dfrac{\log A + \log B}{2}$ où lC correspond à $\log C$).
La suite formée par les moyennes géométriques en 1re colonne converge vers 5 et la suite formée par les moyennes arithmétiques en 2e colonne converge vers log 5.
Avec cette méthode, détailler le calcul permettant d'obtenir le nombre D puis lD.

3. Le processus semble identique de C à F ; pourquoi diffère-t-il pour le calcul de G ?

4. Après plusieurs itérations de la méthode, on se rapproche du nombre 5 avec Z et une valeur approchée de log 5 est lZ.
Expliquer alors pourquoi il apparaît dans le texte la phrase :
« Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à peu près. »

B ▸ Construction de la table à l'aide d'un algorithme

1. On veut que l'algorithme ci-contre permette de déterminer une valeur approchée de log 5, avec une précision de 10^{-5} près. Par quelles valeurs faudrait-il alors remplacer x et p ?

2. Programmer cet algorithme en langage **Python** et vérifier que l'on retrouve effectivement la valeur approchée de log 5 annoncée dans la table de la partie **A**.

Coup de pouce Lors de la saisie de cet algorithme, il faudra :
① importer le module `math`.
② utiliser `math.sqrt` pour la racine carrée.

```
A ← 1
B ← 10
lA ← 0
lB ← 1
Tant que B − x > 10^−p faire
      Si √AB ≤ x alors
            A ← √AB
            lA ← (lA + lB)/2
      Sinon
            B ← √AB
            lB ← (lA + lB)/2
      Fin si
Fin du Tant que
Afficher lB
```

Travaux pratiques

TICE — 45 min — Modéliser, Raisonner

3 Distance d'un point à une courbe

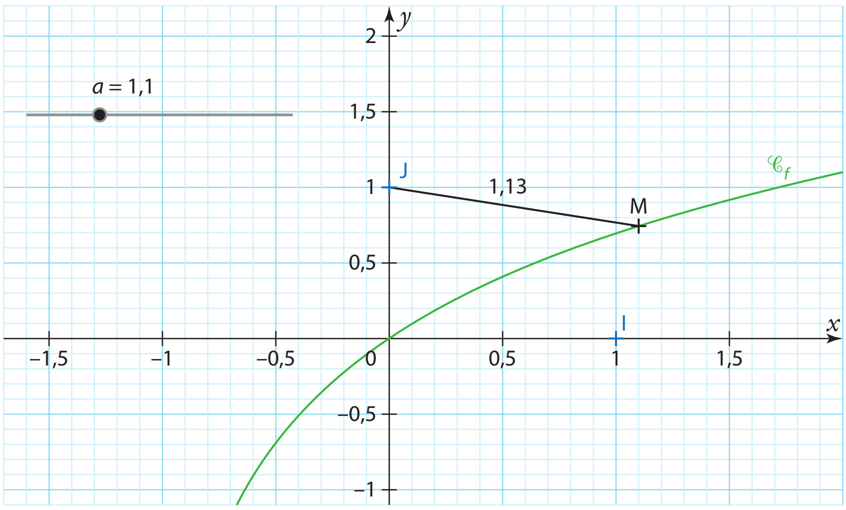
On recherche la plus petite distance entre le point J(0 ; 1) et un point M appartenant à la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O ; I, J).

A ▶ Modélisation du problème à l'aide d'un logiciel

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a) tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.
b) créer un curseur a variant de $-0{,}5$ à 5 et incrémenté de 0,1.
c) placer le point mobile M de coordonnées $(a\,;f(a))$ appartenant ainsi à la courbe $\mathscr{C}_f$.
d) Placer le point J(0 ; 1).

2. Tracer le segment [JM] et faire apparaître la longueur de ce segment.



3. Changer la valeur du curseur a et, en visualisant la longueur du segment [JM], conjecturer la valeur de x pour laquelle la distance JM est la plus petite possible ainsi qu'une valeur approchée de cette distance minimale.

B ▶ Démonstration de la conjecture

1. Soit la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = \text{JM}^2$, avec x l'abscisse du point M.
Exprimer $g(x)$ en fonction de x.

2. Montrer que, pour tout $x \in\,]-1\,;+\infty[$, $g'(x) = 2 \times \dfrac{h(x)}{x+1}$ avec $h(x) = x^2 + x + \ln(x+1) - 1$.

3. Dresser le tableau de variations de h en faisant apparaître les limites aux bornes qui seront préalablement calculées.
4. En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-1\,;+\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
5. Déduire des questions précédentes le signe de $h(x)$, puis le signe de $g'(x)$ et enfin le tableau de variations de g.
6. En déduire que g admet un minimum atteint en α valant $\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2$.
7. Comparer avec les résultats trouvés à l'aide du logiciel de géométrie dynamique.

Physique TICE 40 min Modéliser Raisonner

4 Intensité sonore

L'**intensité sonore** totale I de plusieurs ondes d'intensités I_1 et I_2 correspond à la somme de chacune des intensités sonores : $I = I_1 + I_2$.
L'amplitude de l'intervalle de l'intensité sonore perceptible étant de l'ordre de 10^{13} (le seuil d'audibilité étant de 10^{-12} W · m^{-2}), on utilise plutôt une échelle de grandeur plus simple et plus significative qui est le **niveau d'intensité sonore**.

Cette grandeur, notée L, s'exprime en décibels (dB) et est définie par $\boldsymbol{L = 10 \times \log \frac{I}{I_0}}$ avec I l'intensité en W · m^{-2} ; et $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

1. On veut chercher à montrer que, si on quadruple l'intensité sonore, le niveau sonore quant à lui n'est pas quadruplé. On va d'abord le vérifier à l'aide d'un tableur.

On pose $I = 5 \times 10^{-6}$ W·m^{-2} ; $L = 10 \times \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$ dB le niveau sonore associé ;

k le coefficient par lequel on multiplie l'intensité sonore (par exemple $k = 4$ si on quadruple) et L' le niveau sonore associé à l'intensité $k \times I$.

TICE
Fichier Excel
lienmini.fr/maths-s06-09

a) Reproduire le tableau ci-dessous sur un tableur ou le télécharger grâce au lien ci-contre.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	I =	0,000005		L =	66,9897000					
2										
3	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	I' = k*I									
5	k*L									
6	L'									
7										

b) Quelle formule faudra-t-il saisir en B4 et étendre jusqu'en J4 ?
c) Quelle formule faudra-t-il saisir en B5 et étendre jusqu'en J5 ?
d) Quelle formule faudra-t-il saisir en B6 et étendre jusqu'en J6 ?
e) À l'aide de ce tableur, comment peut-on répondre à la problématique posée en début de chapitre ?

Coup de pouce Lorsqu'on écrit une formule dans laquelle un nom de cellule ne doit pas changer par un copier-glisser, il ne faut pas oublier de mettre à gauche de la lettre un $ (par un copier-glisser vers la droite, la valeur ne va pas changer).
De même, il faut mettre $ devant le numéro si on fait un copier-glisser vers le bas.

2. Démonstration du résultat conjecturé à l'aide du tableur : on suppose que l'intensité sonore associée à chaque chanteur est la même et vaut I, que le niveau d'intensité sonore associé à chacun d'entre eux est L et on pose L' le niveau sonore associé à l'ensemble du groupe.

a) Vérifier que $L' = 10 \times \log\left(\frac{4I}{I_0}\right)$.

b) En utilisant les règles opératoires du logarithme décimal, qui sont les mêmes que les règles opératoires du logarithme népérien (ln), montrer que $L' \approx 6 + L$.

Remarque Quadrupler l'intensité sonore revient à augmenter de 6 dB le niveau sonore et non à le multiplier par 4.

3. Démontrer de la même façon que si l'on divise par 5 l'intensité sonore cela revient à baisser de 7 dB le niveau sonore.