6

Fonction logarithme népérien

Pour rendre compte de la perception humaine des sons, une échelle des décibels est utilisée : l'intensité allant de 0 dB, seuil de l'audition humaine, à environ 120 dB, limite supérieure des bruits usuels. Il s'agit d'une échelle logarithmique.

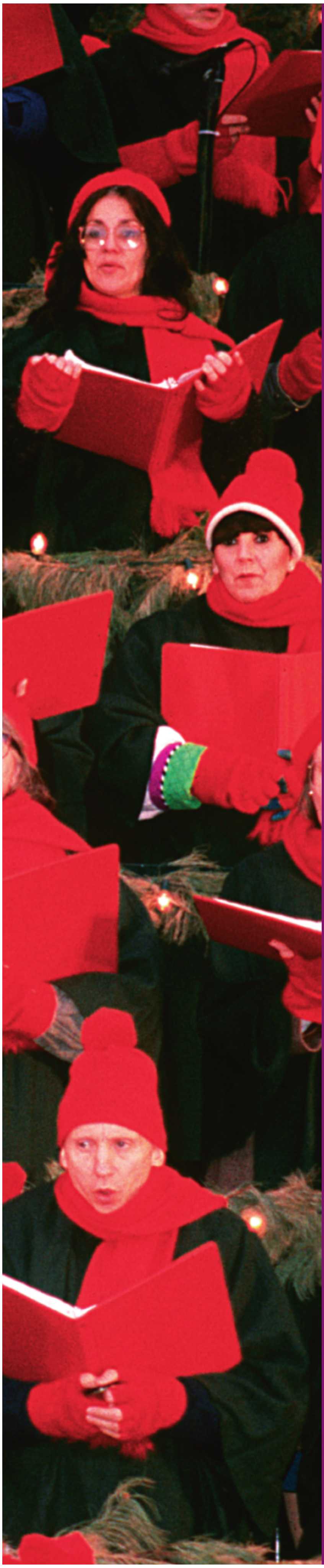
Pourquoi les voix de quatre chanteurs enrichissent-elles l'harmonie sans quadrupler l'intensité sonore ?

↳ **TP 4** p. 201

VIDÉO WEB

Intensité sonore

lienmini.fr/maths-s06-01



Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s06-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{-4x} \times e^{2x}$ **b)** $\dfrac{e^{x}}{e^{-2x}}$ **c)** $\dfrac{(e^{2x})^3}{e^{x+1}}$ **d)** $\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x}}$

2 Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$?

2. Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $e^x = 0$ **b)** $e^x = 1$

c) $e^x = e$ **d)** $e^x = \dfrac{1}{e}$

3 Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{3x+1} \times e^x = 1$ **b)** $\dfrac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e$ **c)** $e^{5x+1} = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $e^{-x} \leqslant e$ **b)** $e^{x+1} > e^{3-2x}$ **c)** $\dfrac{1}{e^{2x}} < e^{x-3}$

4 Calculer des fonctions dérivées

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = e^{-5x+3}$; $I = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = 3xe^x$; $I = \mathbb{R}$ **c)** $f(x) = \dfrac{5}{e^x - 1}$; $I = \mathbb{R}_-^*$

5 Savoir déterminer une équation de tangente

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer une équation de la tangente à la courbe en a.

a) $f : x \mapsto (x-1)e^x - 3$ en $a = 1$ **b)** $f : x \mapsto e^{5x} + 2x - 1$ en $a = 0$

6 Déterminer des limites

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{3x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)e^{2x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

7 Déterminer des réels vérifiant des conditions

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant les conditions données.

a) $2x - 1 > 0$ et $-3x + 5 > 0$ **b)** $1 - x > 0$ et $x^2 + 3x - 4 < 0$

Activités

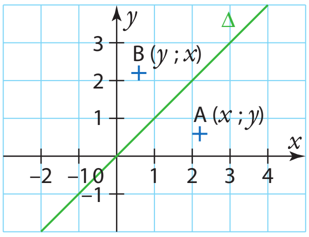
TICE 35 min

1 Approcher graphiquement une nouvelle fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A ▶ Transformation du plan

1. On considère le graphique ci-dessous.



Quelle conjecture peut-on faire quant aux points A et B de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(y\,;x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$?

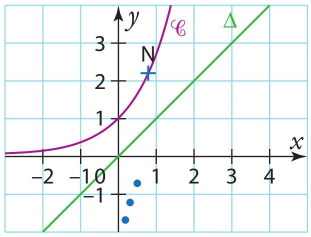
2. Démontrer la conjecture.

B ▶ Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle et y placer un point N.

2. Construire le symétrique N′ de N par rapport à la droite Δ.
Activer la trace de N′ et déplacer le point N.

3. Afficher la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction ln, en saisissant $y = \ln(x)$.



L'ensemble des points N′ constitue la courbe représentative de la fonction logarithme népérien notée ln, fonction réciproque de la fonction exponentielle.

C ▶ Conséquences et conjectures

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (↪ chapitre 4), on peut démontrer que l'équation $e^x = k$ admet une unique solution s dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On admet que $s = \ln(k)$.

1. En s'appuyant sur cette notion de fonction réciproque entre $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ et les caractéristiques des coordonnées des points appartenant à ces courbes (*cf.* partie **A**), en déduire les valeurs de $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

2. Que peut-on en déduire quant à $e^{\ln(x)}$ et $\ln(e^x)$?

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ?

4. Conjecturer pour la fonction logarithme népérien :

a) les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) le sens de variation.

c) le signe de la fonction.

5. a) Reprendre la construction effectuée sur le logiciel de géométrie dynamique et y tracer la tangente au point N′ à la courbe $\mathscr{C}'$. Afficher la valeur de son coefficient directeur.

b) Après avoir déplacé plusieurs fois le point N, émettre une conjecture quant au lien qui semble exister entre l'abscisse du point N′ et le coefficient directeur.

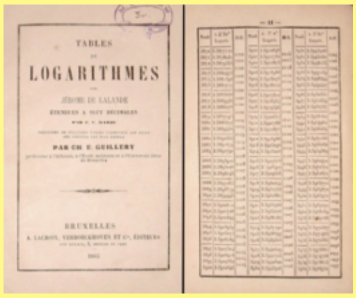
6. Quelle conjecture peut-on émettre sur la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$?

↪ Cours 1 p. 172

TICE Maths & Histoire 35 min

2 Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVIe siècle : les logarithmes

C'est avec John Napier, dit **Neper** (1550-1617), qu'apparaissent les logarithmes à la fin du XVIe siècle. Ce mathématicien et astronome écossais a cherché à faciliter les calculs qui pouvaient devenir longs et pénibles liés à l'astronomie, la navigation… en mettant au point une correspondance entre les termes d'une suite géométrique ($1 ; a ; a^2 ; \dots ; a^p ; \dots ; a^q ; \dots$) et ceux d'une suite arithmétique ($0 ; 1 ; 2 ; \dots ; p ; \dots ; q ; \dots$) à l'aide de la formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$.
Il met alors au point une table numérique à deux colonnes, appelée **table des logarithmes**.



Principe : Tout produit de deux nombres m et n de la première colonne est associé à l'addition de deux autres nombres x et y de la deuxième colonne.

m	x
n	y
$m \times n$	$x+y$

Les questions suivantes utilisent l'extrait ci-contre d'une table de logarithmes (les nombres de la colonne de droite sont arrondis au dix-millième près).

3^{-1}	
0,2	
1	
1,5	
2	**0,6931**
3	**1,0986**
4	1,3863
5	1,6094
6	**1,7918**
7	1,9459
8	
9	2,1972
10	2,3026
11	2,3979
12	
16	2,7726
27	3,2958
81	4,3944
91	4,5109
2 455	7,8059
2 456	7,8063
2 457	7,8067
2 458	7,8071
3^{10}	

1. a) En prenant $m = 2$ et $n = 3$, peut-on constater que cette table vérifie le principe mentionné ci-dessus ?

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 8 ? de 12 ?

c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

d) Sans effectuer la multiplication 27×91, comment obtenir le résultat à l'aide de cette table ?

2. a) En remarquant que $10 \div 5 = 2$, quel calcul doit-on effectuer avec les nombres de la colonne de droite respectivement associés aux nombres 10 et 5 afin de retrouver celui qui est associé au nombre 2 ?
Vérifier cette conjecture sur d'autres nombres.

b) En déduire le nombre à inscrire en face de 0,2, puis en face de 1,5.

3. a) Dans la colonne de gauche, 3 ; 9 ; 27 ; 81 représentent les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.
Quelle semble être la nature de la suite dont les premiers termes sont les nombres correspondants dans la colonne de droite ?

b) En déduire les nombres à écrire en face de 3^{-1} et 3^{10}.

4. Pour la suite des questions, on notera a les nombres de la colonne de gauche et $\ln(a)$ ceux de la colonne de droite (logarithme népérien de a).

a) En prenant $m = n = a$, en déduire $\ln(a^2)$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 3$.

b) En prenant $m = n = \sqrt{a}$, en déduire $\ln(\sqrt{a})$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 16$.

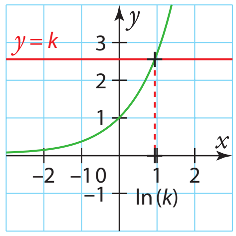
Remarque Cette table fait une correspondance entre les multiplications et les additions, entre les divisions et les soustractions, entre les extractions de racines carrées et les divisions par 2.

Cours 2 p. 174

Cours

1 Fonction logarithme népérien, fonction inverse de la fonction exponentielle

Préambule — Fonction exponentielle



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'équation $e^x = k$, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$, admet alors une unique solution dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition — Fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On définit ainsi $y = \ln(x)$.

Exemple

À l'aide de la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, on peut vérifier que $\ln(2) \approx 0{,}693$.

Remarque Quand il n'y a pas d'ambiguité, on peut noter $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Propriétés — Fonction logarithme népérien

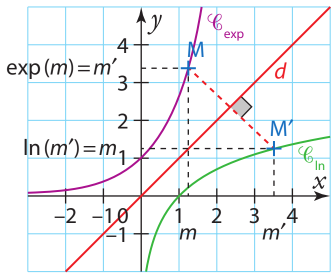
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ $\quad\ln(e) = 1$ $\quad\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$

Démonstration

↪ **Activité 1** p. 170

Exemple

$\ln(e^3) = 3$ et $e^{\ln(3)} = 3$



Propriété — Courbes des fonctions ln et exp

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

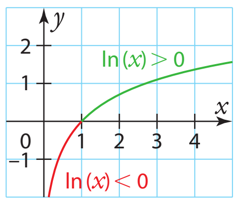
Propriété — Sens de variation de la fonction ln

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

a et $b \in \mathbb{R}_+^*$; $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$

On en déduit $\ln(a) < \ln(b)$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété — Conséquences liées au sens de variation de ln

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Démonstrations

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a = b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a < b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Exercices résolus

Méthode 1 Résoudre une équation/inéquation avec ln ou exp

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\ln(x) = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1-x) \leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$

Solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ 1, $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$, d'où $S = \{e^5\}$. 2

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ 3, $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, d'où $S = \{\ln(3)\}$.

c) Pour tout $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;1[$ 1

$\ln(1-x) \leqslant -1 \Leftrightarrow 1 - x \leqslant e^{-1}$ c'est-à-dire $x \geqslant 1 - e^{-1}$ d'où $S = [1 - e^{-1}\,;+\infty[\cap]-\infty\,;1[$

soit $S = [1 - e^{-1}\,;1[$. 2

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x-3} > 4 \Leftrightarrow 2x - 3 > \ln(4)$ 3 $\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(4)+3}{2}$

d'où $S = \left]\dfrac{\ln(4)+3}{2}\,;+\infty\right[$.

Conseils & Méthodes

1 Commencer par déterminer les conditions d'existence, à savoir l'ensemble (E) des réels x tels que $u(x) > 0$ dans l'expression $\ln(u(x))$.

2 Simplifier un logarithme en appliquant la fonction exponentielle.

3 Simplifier en appliquant la fonction ln.

À vous de jouer !

1 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(x) = -1$ **b)** $e^{2x} = -1$

c) $\ln(4-2x) > 1$ **d)** $e^{x+1} \geqslant 2$

2 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(5x-1) = 2$ **b)** $e^{-x} = 5$

c) $\ln(3x-1) < 0$ **d)** $e^{5-x} \leqslant 2$

↪ Exercices 29 à 35 p. 184

Méthode 2 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Énoncé

1. **Résoudre l'équation $\ln(4x-1) = \ln(2-x)$.**

2. **Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2)$.**

Solution

1. Conditions d'existence : $4x - 1 > 0$ et $2 - x > 0$ 1

soit $x > \dfrac{1}{4}$ et $x < 2$, d'où $x \in I = \left]\dfrac{1}{4}\,;2\right[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(4x-1) = \ln(2-x) \Leftrightarrow 4x - 1 = 2 - x$ c'est-à-dire $x = \dfrac{3}{5}$.

Or $\dfrac{3}{5} \in I$, donc $S = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$. 2

2. Conditions d'existence : $x^2 + 2x - 3 > 0$ 1

$\Delta = 16\,;\ x_1 = 1$ et $x_2 = -3$, d'où $I =]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geqslant 2$ 3 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 \geqslant 0$;

$\Delta = 24\,;\ x_1 = -1 - \sqrt{6} \approx -3{,}45$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6} \approx 1{,}45$

x_1 et x_2 appartiennent à I d'où $x \in]-\infty\,;-1-\sqrt{6}\,[\cup]-1+\sqrt{6}\,;+\infty[$ et $x \in I$, d'où $S =]-\infty\,;-1-\sqrt{6}\,[\cup]-1+\sqrt{6}\,;+\infty[$. 4

Conseils & Méthodes

1 Déterminer les conditions d'existence, soit l'ensemble (E) des réels x : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

2 Puis résoudre dans (E), $u(x) = v(x)$.

3 Puis résoudre, $u(x) < v(x)$.

4 S'assurer que les solutions trouvées appartiennent bien à l'ensemble correspondant aux conditions d'existence.

À vous de jouer !

3 Résoudre.

a) $\ln(x+1) = \ln(-x)$ **b)** $\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5)$

4 Résoudre.

a) $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(2)$ **b)** $\ln(2x) > \ln(x^2 - 2x + 1)$

↪ Exercices 36 à 38 p. 184

2 Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriété Relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Démonstration

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$, soit $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.
On a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Remarques

- On retrouve la particularité de l'activité 2, à savoir que cette fonction transforme les produits en sommes.
- Cette formule se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

Exemples

- $\ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$
- $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)$

Propriété Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstrations

① $\ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right)$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

D'où $0 = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.

On a ainsi $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

② Pour a et $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.

Soit $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après la propriété précédente.

Propriété Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstrations

① $e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$

On a alors $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln(a)}$, soit $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

② $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = \ln(a)$ et $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln(a) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemples

- $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$
- $\ln(16) - 2\ln(2) + \ln(8) = \ln(2^4) - 2\ln(2) + \ln(2^3) = 4\ln(2) - 2\ln(2) + 3\ln(2) = 5\ln(2)$
- $\ln\left(\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\ln(6)$

Exercices résolus

Méthode 3 Utiliser les propriétés algébriques de ln

Énoncé

Exprimer en fonction de ln 2 chacun des nombres suivants.

a) $\ln\frac{1}{4}$ **b)** $\ln 8 + 5\ln 2$ **c)** $\ln\sqrt{32}$ **d)** $\ln 10 - \ln 20$

Solution

a) $\ln\frac{1}{4} = -\ln 4 = -\ln(2^2) = -2\ln 2$ 1

b) $\ln(2^3) + 5\ln 2 = 3\ln 2 + 5\ln 2 = 8\ln 2$ 2

c) $\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln 32 = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \frac{5}{2}\ln 2$ 3

d) $\ln 10 - \ln 20 = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ 2

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$ ainsi que $\ln a^n = n\ln a$.

2 Avec une somme/différence $\ln a + \ln b$ on peut penser à utiliser $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$; $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

3 Chercher à écrire $\ln a$ sous la forme $\ln(c^n)$, soit $n\ln c$.

À vous de jouer !

5 Exprimer en fonction de ln 5.

a) $\ln 25 + \ln\sqrt{125}$ **b)** $\ln 35 - \ln 175$

c) $\ln\frac{e^4}{25}$ **d)** $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

6 Exprimer en fonction de ln 3.

a) $4\ln 12 - 4\ln 36$ **b)** $\ln\frac{1}{9} + \ln 81$

c) $\ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27$ **d)** $e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2)$

↪ Exercices 39 à 45 p. 184

Méthode 4 Résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Solution

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ est équivalente à $\ln\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \ln(10^{-3})$ 1

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln(10^{-3}) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$ 2

Or $\dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 7{,}5$; par conséquent, $n \geqslant 8$. 3

Conseils & Méthodes

1 Pour se « débarrasser » de l'inconnue en exposant, il faut penser à appliquer la fonction ln dans chaque membre de l'inéquation.

2 Lorsqu'il s'agit de diviser les membres d'une inéquation par $\ln a$, il faut être vigilant quant au signe de $\ln a$.
Pour $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: le sens de l'inégalité change. En revanche, si $a > 1$, $\ln a > 0$ et le sens de l'inégalité reste alors le même.

3 Ne pas oublier de conclure en tenant compte du fait que n est un entier naturel.

À vous de jouer !

7 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$ avec $n \in \mathbb{N}$

b) $2^n - 7 \times 2^{n-1} > -3$

8 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $3^{2n} > 10^8$

b) $5^n \times 9^{-n-1} \leqslant 10^{-4}$

↪ Exercices 46 à 48 p. 184

Cours

3 Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété Dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Démonstration

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^{\ln(x)}$.
La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.
Sachant que $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, en posant $v(x) = e^x$ et $u(x) = \ln(x)$, on a alors :
$f'(x) = e^{\ln(x)} \times \ln'(x) = x \times \ln'(x)$.
On a également $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.
Par conséquent, on a $x \times \ln'(x) = 1 \Leftrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s06-04

Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

Remarque Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)$ sous-entend $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x)$.

Démonstrations

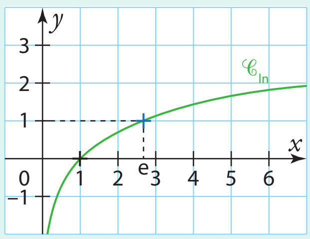
1 On utilise la définition de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, à savoir :
« Pour tout réel A, il existe un réel m, tel que pour tout $x > m$ alors $f(x) > A$. »
Soit A un réel strictement positif fixé, on cherche m tel que $x > m$ implique $\ln x > A$.
Or $\ln x > A \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^A$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x > e^A$.
En posant $m = e^A$, on a, si $x > m$, alors $\ln x > A$, compte tenu de la définition de la limite préalablement rappelée, on a donc bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

2 Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$.
D'où, par limite de composées de fonctions, $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} -\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, soit $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

Propriétés Tableau de variations de ln et courbe représentative

x	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto \ln x$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



Méthode 5 Déterminer des équations de tangentes et la position relative de courbes

Énoncé

Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln.

1. Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

2. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et de T_1.

Solution

1. T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ avec $f(x) = \ln x$ [1]
Or $f'(x) = \frac{1}{x}$ donc T_1 a pour équation $y = 1(x-1) + 0$ soit $y = x - 1$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $\ln x - (x-1)$, soit le signe de la fonction $h : x \mapsto \ln x - x + 1$. [2] [3]
La résolution de l'inéquation $\ln x - x + 1 > 0$ n'étant pas évidente, on étudie le sens de variation de h afin de déterminer son signe à partir du tableau de variations : $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$; puisque $x > 0$ le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $1 - x$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	‖	+	0	−	
Variations de h	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après le tableau de variations, on en déduit que, pour tout $x > 0$, $h(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x - (x-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant x - 1$.
Par conséquent, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de sa tangente T_1 sur $]0\,;+\infty[$.

Conseils & Méthodes

[1] Utiliser une propriété vue en classe de 1re : T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

[2] Pour déterminer la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$:
– si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ sur I, alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur I.
– si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ sur I, alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur I.

[3] Pour étudier le signe d'une différence, on peut poser une fonction égale à cette différence, puis étudier le sens de variation de celle-ci. Son tableau de variations sera utilisé pour étudier le signe de celle-ci.

À vous de jouer !

9 Déterminer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ et de sa tangente T_e au point d'abscisse e.

10 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - 1$. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente T_e au point d'abscisse e.

→ Exercices 49 à 52 p. 185

Méthode 6 Étudier une fonction avec ln

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \ln x + x$. Donner le sens de variation de f.

Solution

$f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ [1] Or, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} + 1 > 0$ [2] : la fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Conseils & Méthodes

[1] Déterminer la dérivée de la fonction.

[2] Étudier son signe.

À vous de jouer !

11 Donner le sens de variation de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

12 Donner le sens de variation de la fonction $f(x) = x^2 - x - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

→ Exercices 53 à 56 p. 185

Cours

4 Croissance comparée

Propriétés Croissance comparée

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0$ avec $n\in\mathbb{N}^*$

Démonstrations

① Pour tout réel $x>0$, on a $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{e^{\ln(x)}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$ par croissance comparée.

On en déduit par le théorème de composition des limites que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s06-05

② Pour tout réel $x>0$, on a $x\ln(x)=e^{\ln(x)}\times\ln(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$.

Or $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$.

$\lim\limits_{x\to 0}X=\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ par croissance comparée.

On en déduit par le théorème de composition des limites que $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$.

③ Pour tout $n>1$ avec $n\in\mathbb{N}$, on a $\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{1}{x^{n-1}}\times\dfrac{\ln x}{x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{n-1}}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

Par conséquent, par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$.

④ Pour tout $n>1$ avec $n\in\mathbb{N}$, on a $x^n\ln x=x^{n-1}\times x\ln x$. Or $\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$.

Par conséquent, par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0$.

5 Fonction ln (u)

Remarque u est une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x\mapsto\ln(u(x))$ est notée $\ln(u)$ ou $\ln u$.

Propriété Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Démonstration ↪ Pour s'entraîner p. 182

Attention au pré-requis à utiliser : $(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u'$, avec u et v deux fonctions dérivables respectivement sur un intervalle sur I et J avec $u(x)\in J$ pour tout $x\in I$.

Propriété Sens de variation de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

Démonstration

u étant strictement positive, le signe de $\dfrac{u'}{u}$ est le même que celui de u'. Or $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ ce qui signifie que le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u', c'est-à-dire que u et $\ln u$ ont même sens de variation.

Exercices résolus

Méthode 7 Calculer des limites dans le cas de formes indéterminées

Énoncé

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x^2)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$

Solution

a) Pour tout réel $x > 0$, $\ln x - 3x^2 = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 3\right)$. **1**

Par propriété, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 3\right) = -3$ d'où, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 3\right) = -\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 3x^2) = -\infty$.

b) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^3} = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x^3}$

On pose $X = 1 + x$ et on retrouve une croissance comparée. **2** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$.

$\dfrac{1+x}{x^3} = \dfrac{\left(x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)}{x^3} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$ Or $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par quotient des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2} = 0$.

Finalement, par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x^3} = 0$, soit $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^3} = 0$.

Conseils & Méthodes

Pour ôter une forme indéterminée en $+\infty$:

1 factoriser par le monôme de plus haut degré de sorte à faire apparaître la croissance comparée.

2 trouver une nouvelle écriture de la fonction qui fasse apparaître une croissance comparée.

À vous de jouer !

13 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x - x^2$.

14 Déterminer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}$.

↪ Exercices 57 à 60 p. 185

Méthode 8 Calculer la dérivée d'une fonction du type ln u

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$. Calculer $f'(x)$.

Solution

$u(x) = 3x^2 + 1$, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. **1**

$f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+1}$ **2**

Conseils & Méthodes

1 Vérifier que u est dérivable et strictement positive sur I.

2 Puis utiliser $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

À vous de jouer !

15 Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{x^2}\right)$.

Calculer $f'(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$.

16 Soit $f(x) = (x^2 - 4)\ln\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.

Calculer $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

↪ Exercices 61 et 62 p. 185

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s06-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

↪ Cours 3 p. 176 et 4 p. 178

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$.

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\phi(x)=x^2-1+3\ln x$.

a) Calculer $\phi(1)$ et la limite de ϕ en 0.

b) Étudier les variations de ϕ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire le signe de $\phi(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\phi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

D'après Bac S, Amérique du Sud, 2017.

Solution

1. a) $\phi(1)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln x=-\infty$, donc, par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=-\infty$.

b) $\phi'(x)=2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{2x^2+3}{x}$ donc, pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, $\phi'(x)>0$,
donc ϕ est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Or $\phi(1)=0$, par conséquent, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $\phi(x)<0$
et, pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, $\phi(x)>0$. 1 2

2. a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2x-2-3\ln x=+\infty$
et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x=0^+$ donc, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

$f(x)=x-2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{3\ln x}{x}$ 3 or $\lim\limits_{x\to+\infty} x-2-\dfrac{2}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissance comparée.
Donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) $$f'(x)=\frac{\left(2x-2-\frac{3}{x}\right)x-(x^2-2x-2-3\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+3\ln x}{x^2}=\frac{\phi(x)}{x^2}$$

Puisque $x^2>0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\phi(x)$. 4

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier le signe d'une fonction à partir des variations de celle-ci, il faut utiliser des images en particulier.

2 Afin de mieux visualiser le signe de ϕ, dresser un tableau de variations de ϕ en y incluant la valeur de $\phi(1)$.

3 Avec une forme indéterminée, on peut chercher à réécrire la fonction de sorte à faire apparaître une croissance comparée.

4 Il est usuel d'utiliser une fonction auxiliaire pour étudier le signe d'une dérivée.

À vous de jouer !

17 Soit $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$ définie sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ avec $u(x)=\ln(x)+x-3$.

2. Dresser le tableau de variations de u et en déduire son signe sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

18 1. Soit $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $[1\,;+\infty[$.

Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x)=x^2-1+\ln(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

2. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y=x$.

↪ Exercices 63 à 70 p. 186-187

Méthode 10 Étudier une fonction avec ln *u*

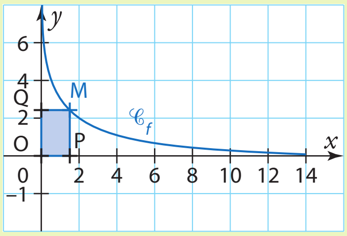
↪ Cours 4 et 5 p. 178

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14[$ par $f(x)=2-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.
À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1. Montrer que la fonction $g: x \mapsto 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle OPMQ.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;14[$ et en déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.



D'après Bac S, Pondichéry, 2016.

Solution

1. $\mathscr{A}_{\text{OPMQ}} = \text{OP} \times \text{MP} = x \times f(x)$ **1** $= x\left(2-\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

2. $g'(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - x \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \geqslant 0$ **2** $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e} \geqslant \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \mathrm{e} \geqslant \dfrac{x}{2}$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$. On a alors $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2\mathrm{e}$.

$g(x) = 2x - 2 \times \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ **3**

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2} = 0$ or $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X = 0$ par croissance comparée,

donc, par composition de limites de fonctions, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$.

Donc, par somme de limites, on a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

x	0		2e		14
Signe de $g'(x)$	‖	+	0	−	
Variations de g	‖ 0	↗	2e	↘	$28 - 14\ln 7$

D'après le tableau de variations, on en déduit que l'aire de OPMQ est maximale **4** pour M(2e ; 2e).

Conseils & Méthodes

1 Un point $\text{M} \in \mathscr{C}_f$ équivaut à dire que ses coordonnées sont du type $(x\,; f(x))$.

2 Pour résoudre une inéquation avec ln, on peut notamment chercher à transformer l'inéquation sous la forme $\ln a \geqslant \ln b$.

3 Pour le calcul de limite avec ln, penser à réécrire la fonction pour faire apparaître la croissance comparée.

4 Pour résoudre un problème d'optimisation, penser à étudier les variations de la fonction qui modélise le problème.

À vous de jouer !

19 Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5)$ sur l'intervalle $[-2{,}5\,; 2{,}5]$.

1. Dériver f, puis dresser son tableau de variations sur $[-2{,}5\,; 2{,}5]$.
2. Calculer $f(-2{,}5)$ et $f(2{,}5)$.
3. En déduire le signe de f sur $[-2{,}5\,; 2{,}5]$.

20 Soit la fonction $g(x) = \ln[1 + (\mathrm{e}-1)x] - x$ définie sur $[0\,; 1]$.

1. Montrer que $g'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$.
2. Déterminer les variations de g sur $[0\,; 1]$ et en déduire que g admet un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$ dont on donnera une valeur arrondie à 10^{-2} près.
3. Établir que l'équation $g(x) = 0{,}05$ admet deux solutions sur $[0\,; 1]$.

↪ Exercices 71 à 78 p. 187-189

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s06-05

La propriété à démontrer

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$$

Pour démontrer cette propriété, on utilisera le pré-requis suivant : $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ (démontré au chapitre 2).

Comprendre avant de rédiger

- Quand un pré-requis est donné pour une démonstration, il faut chercher à relier la question posée à ce pré-requis.
- Dans cet exemple particulier, se rappeler que $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$ et donc que $x \ln(x) = \mathrm{e}^{\ln(x)} \times \ln(x)$.

Rédiger

La démonstration rédigée

Étape 1

Puisqu'il s'agit de faire le lien entre la propriété qui est à démontrer qui porte sur ln et le pré-requis qui porte lui sur l'exponentielle, il faut réécrire la fonction à l'aide des propriétés algébriques.

Pour tout réel $x > 0$, car la fonction ln n'est définie que sur $]0 ; +\infty[$.

→ Pour tout réel $x > 0$, $x = \mathrm{e}^{\ln(x)}$.

Étape 2

Il s'agit ensuite de comprendre le lien entre la limite qui est à calculer et celle du pré-requis, autrement dit comprendre vers quelle valeur tend $\ln(x)$ lorsque x tend vers 0.

→ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Étape 3

Il faut traduire le calcul de limite qui est à effectuer à l'aide de la nouvelle écriture de la fonction.

→ $x \ln x = \mathrm{e}^{\ln(x)} \times \ln(x) = \ln(x)\,\mathrm{e}^{\ln(x)}$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0} \ln(x)\mathrm{e}^{\ln(x)}$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Étape 4

Il suffit de conclure à l'aide du pré-requis.

→ Puisque $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$, par croissance comparée, on en déduit donc, par le théorème de composition, que $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x)\mathrm{e}^{\ln(x)} = 0$, soit $\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = 0$.

Pour s'entraîner

1. Pour tout entier relatif n, montrer que $\ln(a^n) = n \ln a$ en utilisant une démonstration par récurrence.

2. Montrer que, pour une fonction u définie sur I, telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u(x) > 0$, $(\ln u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.