Exercices calculs et automatismes

25 Schéma de composition

1. Donner le schéma de composition de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{x^2+1}.$$

2. Même question avec la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

26 Dérivée d'une fonction composée

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(3x^2 + 1).$$

27 Dérivée d'une fonction composée

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{7}\,;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-1}}.$$

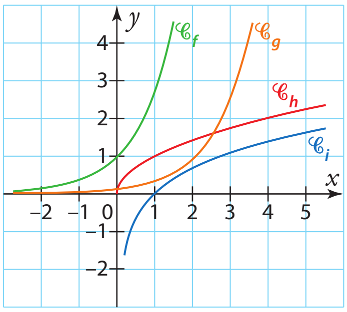
28 Dérivée d'une fonction composée

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

29 Convexité

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives de fonctions convexes ?



30 Somme de deux fonctions convexes

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
La somme de deux fonctions convexes est convexe.	☐	☐

31 Convexité

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Si f est convexe alors $-f$ est concave.	☐	☐

32 Exemples de fonctions convexes et concaves

Donner un exemple de fonction convexe et un exemple de fonction concave.

33 Exemple de point d'inflexion

Donner un exemple de courbe présentant un point d'inflexion.

34 Cube

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto x^3 + 2$ est :

a croissante sur $]-\infty\,;0]$.
b décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
c convexe sur $]-\infty\,;0]$.
d concave sur $]-\infty\,;0]$.

35 Racine carrée

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$:

a est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
c présente une courbe au-dessus de ses tangentes sur $[0\,;+\infty[$.
d présente une courbe en dessous de ses tangentes sur $[0\,;+\infty[$.

36 Puissance

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto -2x^5$ est :

a croissante sur $]0\,;+\infty[$.
b décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
c convexe sur $]0\,;+\infty[$.
d concave sur $]0\,;+\infty[$.

37 Point d'inflexion

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-2)^3$ admet un point d'inflexion pour :

a $x = 2$.
b $x = -2$.
c $x = 0$.
d $x = 1$.

38 Fonctions affines

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Les fonctions affines sont des fonctions convexes et concaves.	☐	☐

39 Fonctions trigonométriques

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) La fonction cosinus est convexe sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.	☐	☐
b) La fonction sinus est concave sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.	☐	☐

Exercices d'application

Dans tous les exercices, on désignera par $\mathscr{D}_f$ le domaine de définition de la fonction f, $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

Étudier un schéma de composition

Méthode 1 p. 141

40 Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

41 Soit les fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

1. Donner le schéma de composition de f, de g.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f, de g.

42 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-8x+15}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

43 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=(-x+3)^4.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

44 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

45 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x+1}{x}}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée

Méthode 2 p. 141

46 Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=\sqrt{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.
Calculer $g\circ f(1)$ et $f\circ g(3)$.

47 Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=\mathrm{e}^x$ et $g(x)=x^2$.
Calculer $g\circ f(-2)$ et $f\circ g(-1)$.

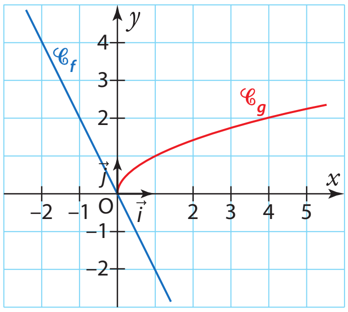
48 Algo

On considère les fonctions en langage **Python** suivantes.

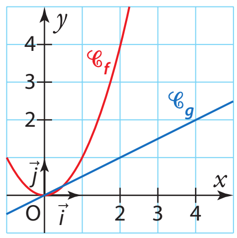
```
def f(x) :
    x=x+3
    return(1/x)
def g(x) :
    x=1/x
    return(x+3)
```

1. Que renvoie la saisie $f(1)$?
2. Que renvoie la saisie $g(1)$?
3. Proposer une modification de l'algorithme pour que $f(1)=g(1)$.

49 À l'aide du graphique ci-contre, déterminer $f\circ g(1)$ et $g\circ f(-2)$. $f\circ g(-1)$ et $g\circ f(1)$ existent-ils ? Justifier.

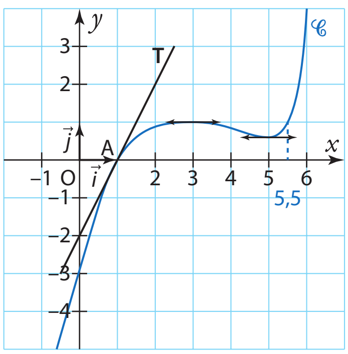


50 On considère deux fonctions f et g dont on donne les représentations graphiques ci-dessous.



Déterminer $g\circ f(2)$ et $f\circ g(2)$.

51 On considère une fonction f dont on donne le graphe ci-dessous.



Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;6]$ par $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$.
Choisir alors la (ou les) bonne(s) réponse(s).

a) La fonction g est strictement croissante sur :
[a] $]3\,;6]$ [b] $]1\,;6]$ [c] $]-\infty\,;6]$ [d] $]-\infty\,;3]$

b) $g'(1)$ est égal à :
[a] 2 [b] 0 [c] 2e [d] $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$

c) La fonction g s'annule exactement :
[a] 1 fois [b] 2 fois [c] 0 fois [d] 3 fois

52 On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	π	↗	$+\infty$

1. Déterminer $\cos \circ f(0)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{f(x)}$.

Calculer la dérivée d'une fonction composée

Méthode 3 p. 143

53 Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = e^{-x+2}.$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

54 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

55 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}}.$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

56 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = e^{-x^2}.$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

57 Soit f la fonction définie sur $[0\,;2\pi[$ par :
$$f(x) = \cos(4x).$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

58 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = (4e^{-x} + 1)^3$$
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

59 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \sin(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ième de la fonction f.

Calculer $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.

2. En déduire une relation entre $f^{(4)}(x)$ et $f(x)$.

3. Dans ces conditions, que vaut $f^{(1\,789)}(x)$?

60 Soit n un entier naturel. Déterminer la dérivée f'_n de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = (\cos(x))^n.$$

Étudier une fonction composée et dresser son tableau de variations

Méthode 4 p. 143

61 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \sqrt{x^3 - 1}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.

3. Étudier $g : x \mapsto x^3 - 1$ et dresser son tableau de variations.

4. En déduire le tableau de variations de f.

62 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.

3. Étudier $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et dresser son tableau de variations.

4. En déduire le tableau de variations de f.

63 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = e^{x^2 - 2x}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.

3. Étudier $g : x \mapsto x^2 - 2x$ et dresser son tableau de variations.

4. En déduire le tableau de variations de f.

64 Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

1. Donner le schéma de composition de la fonction f.

2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f noté $\mathcal{D}_f$.

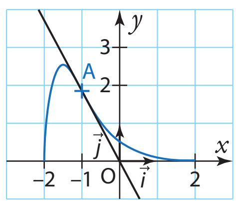
3. Étudier $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ et dresser son tableau de variations.

4. En déduire le tableau de variations de f.

Lire les intervalles où f est convexe ou concave

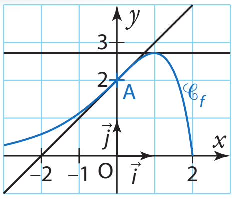
Méthode 5 p. 145

65 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

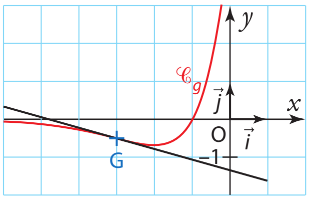


Exercices d'application

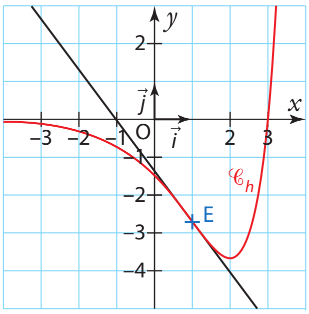
66 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.



67 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction g est convexe et celui sur lequel elle est concave.



68 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction h est convexe et celui sur lequel elle est concave.



Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

Méthode 6 p. 145

Démo

69 En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que, pour tout réel x, $1 + x \leqslant e^x$.

Coup de pouce Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0.

70 En utilisant la concavité de la fonction racine carrée, montrer que $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(x+1)$.

Coup de pouce Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.

71 **1.** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = -\sqrt{x}$ est convexe.
2. Déterminer l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 9.
3. En déduire une inégalité.

Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Méthode 7 p. 147

72 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On admet que f est dérivable et on donne le tableau de variations de f' ci-dessous.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

73 Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
On note f' sa fonction dérivée.
Le tableau ci-dessous présente les variations de f'.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f'		↘	-1	↗	

1. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
2. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

74 Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On admet que f est dérivable et on donne le tableau de variations de f' ci-dessous.

x	$-\infty$		$2-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$2+\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Variations de f'	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

75 On assimile le rythme de croissance d'une production à la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2\,400x + 8\,000$$

où x est le nombre d'objets produits par heure.
1. Montrer que $f'(x) = -24(x-10)^2$.
2. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
3. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Méthode 8 p. 147

76 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2.$$

1. Montrer que $f''(x) = 6x + 12$.

2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

77 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ définie par :

$$f(x) = \frac{3-x}{x+1}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$.

2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

78 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

2. En déduire la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.

79 Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Le tableau ci-dessous présente le signe de f''.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

80 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\sqrt{x}$$

1. On admet que f est deux fois dérivable et on note f'' sa dérivée seconde.

a) Calculer $f''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$.

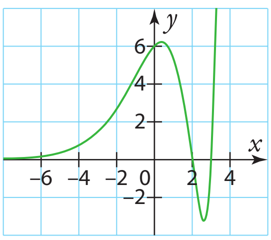
2. a) Déduire de la question précédente que f est concave.

b) Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

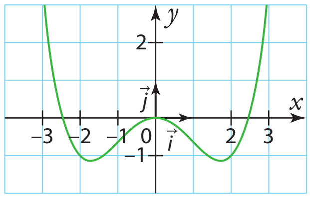
Lire les points d'inflexion

Méthode 9 p. 149

81 On considère la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



82 Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Méthode 10 p. 149

83 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=6+(6-x)*exp(x-5) ;`

	`// Interprète f`
	`// Succès`
	`// lors de la compilation f`

	`x ->6+(6-x)*exp(x-5)`
2	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`(-x+4)*exp(x-5)`

1. Dresser le tableau de signes de $f''(x)$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

84 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 7x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f''(x)$ et en déduire les variations de f.

2. a) Calculer $f''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

85 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. a) Calculer $f''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

86 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 7x + 8)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. a) Calculer $f''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

Exercices d'entraînement

Étude de fonctions composées Méthode 11 p. 150

87 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 10$ et g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

1. a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction g.
2. a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
b) Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f puis celui de g.

88 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

1. a) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction g.
2. a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
b) Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.
c) Dresser le tableau de variations de f puis celui de g.

89 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 1$ et g la fonction définie par $g(x) = e^{f(x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
2. a) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
b) Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.
c) Dresser le tableau de variations de f puis celui de g.

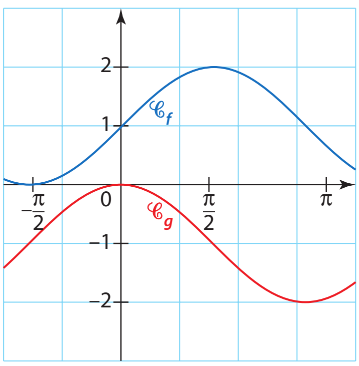
90 Soit k un réel non nul et f la fonction définie par :

$$f(x) = \cos(kx).$$

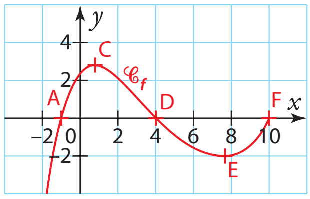
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée n-ième de la fonction f. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. En déduire une relation entre $f^{(4)}(x)$ et $f(x)$.
3. Dans ces conditions, que vaut $f^{(2\,020)}(x)$?

Étudier la convexité d'une fonction pour résoudre un problème Méthode 12 p. 151

91 Pour chacune des courbes suivantes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, déterminer les intervalles où la fonction est convexe et ceux où elle est concave.



92 Soit f une fonction définie sur $[-1{,}8\,;10]$.



1. Sur quel intervalle la fonction semble-t-elle convexe ? Concave ?
2. En déduire le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

93 Soit la fonction f deux fois dérivable sur $[-5\,;7]$ définie par :

$$f(x) = (x - 2{,}5)e^{0{,}4x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = 0{,}4xe^{0{,}4x}$.
2. En déduire que $f''(x) = \dfrac{2}{25}(2x + 5)e^{0{,}4x}$.
3. Étudier la convexité de f sur $[-5\,;7]$.

94 Soit la fonction g deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

Calculer $g'(x)$. En déduire la concavité de g sur $]0\,;+\infty[$.

95 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{3}{e^x - 3}.$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$.
2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

96 Soit la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 5xe^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = 5(x - 2)e^{-x}$.
2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est concave.

97 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par :

$$f(x) = x + (8x^2 + 52x + 88)e^{-0{,}5x}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

1	`f(x) :=x+(8*x^2+52*x+88)*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$
	`x ->x+(8*x²+52*x+88)*exp` $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)*x\right)$
2	`simplifier(deriver(f(x),x))`
	`-4*x²*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `-10*x*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `+8*exp` $\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ `+1`
3	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`(x+2)*(2*x-7)*exp` $\left(-\frac{x}{2}\right)$

1. Retrouver par le calcul les résultats affichés par le logiciel.
2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$.

98 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2(x+2)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = -2xe^{-x}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

99 On considère la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x^2e^{-x}.$$

1. Montrer que $g''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

100 On considère la fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \cos(x)e^{x}.$$

1. Montrer que $h''(x) = -2\sin(x)e^{-x}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$.

101 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 11x^2 + 24x - 26)e^{x}.$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

102 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 4\sqrt{x} + 3x.$$

1. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

103 On donne ci-dessous le tableau de variations de f', fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[-3\,;1]$.

x	-3		-2		0		1
Variations de f'	-5	↗	0	↘	-2	↗	3

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

104 On donne ci-dessous le tableau de signes de f'', fonction dérivée seconde d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		7		-1		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe 0 et celui sur lequel elle est concave.

105 Étudier, selon les valeurs de m, la convexité de la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{mx}.$$

106 On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=x+exp(-x+1)`
	`x ->x+*exp(-x+1)`
2	`deriver(f(x),x)`
	`-exp(-x+1)+1`
3	`(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`exp(-x+1)`

1. En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

107 On considère une fonction g définie et deux fois dérivable sur sur $]0\,;+\infty[$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1	`g(x) :=sqrt(x)-1/x ;`
	$x \to \sqrt{x} - \frac{1}{x}$
2	`factoriser(deriver(deriver(g(x),x),x))`
	$\dfrac{-8*\sqrt{x}-x^2}{4*x^3*(\sqrt{x})}$

1. En déduire que g est concave sur $\mathbb{R}$.

2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

Travailler le Grand Oral

108 Faire un exposé expliquant la querelle entre Newton et Leibniz.

Newton

Leibniz

109 Chercher les définitions d'épigraphe, d'hypographe et d'ensembles convexes.

110 Avec vos camarades, réaliser un exposé sous forme d'interview d'un(e) ou de plusieurs expert(es) sur la convexité et ses applications, où chacun(e) aura soit le rôle de journaliste, soit le rôle d'expert(e).

Exercices bilan

111 Étude d'une fonction composée Algo

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 7e^{\frac{20}{x}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f noté $\mathscr{D}_f$.

2. a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire les variations de f.

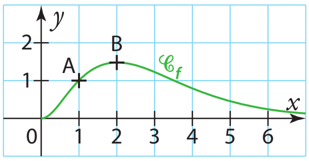
3. a) Calculer $f''(x)$.

b) En déduire les intervalles où f est convexe et ceux où f est concave.

c) Écrire un algorithme en langage **Python** qui renvoie le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.

112 Composition de fonctions et limites

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On admet que $\mathscr{C}_f$ passe par les points $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 1)$ et $B\left(2 ; \frac{4}{e}\right)$ et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



1. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.

2. On admet que $f(x) = x^2e^{-x+1}$.

a) Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

3. a) Calculer $f''(x)$. En déduire l'étude de la convexité de f.

b) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

4. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{-f(x)}.$$

Dresser le tableau de variations de g.

5. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)}.$$

Dresser le tableau de variations de h.

D'après ES Métropole-La Réunion sept 2006

113 Domaine de définition

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 8}.$$

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

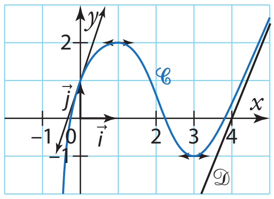
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

4. a) Calculer $f''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

114 Exponentielle de fonctions

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$ dont la courbe est donnée dans le graphe ci-dessous.



1. a) Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.

b) Donner les intervalles où f semble concave et ceux où f semble convexe.

c) Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de f.

2. On note g la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

b) Étudier les variations de g sur $]-1 ; +\infty[$ et en dresser le tableau de variations. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.

D'après Bac ES Liban 2006

115 Convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}.$$

b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x - f(x).$$

a) Montrer que $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$.

b) On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1 ; 1]$. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1 ; 1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur $[-1 ; 1]$.

D'après Centres Étrangers 2014

116 Tangente

On considère la fonction f définie par :

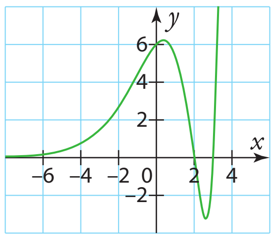
$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1.$$

1. Calculer $f''(x)$.

2. Montrer que $f''(x) = 20(x - 1)(x + 2)(x + 4)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire l'étude complète de la convexité de f (convexité, concavité, points d'inflexion).

4. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.



Préparer le BAC L'essentiel

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Fonction	Fonction dérivée
$au+b$	au'	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^2	$2u'u$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
u^3	$3u'u^2$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
u^n	$nu'u^{n-1}$	e^u	$u'e^u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

Composition de fonction

Pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J, et v est définie sur J.

$v \circ u$ est la fonction définie sur I par $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$.

$$\begin{cases} \mathrm{I} & & \mathrm{J} & & \\ x & \overset{u}{\mapsto} & u(x) & \overset{v}{\mapsto} & v(u(x)) \end{cases}$$

Dérivée d'une fonction composée

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$
$$(v \circ u)'(x) = (v'(u(x))) \times u'(x)$$

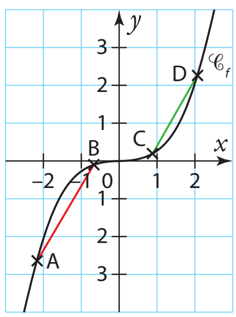
Preuve de la convexité d'une fonction

La preuve peut être faire par :

- les sécantes,
- les tangentes,
- la croissance de la dérivée,
- la positivité de la dérivée seconde.

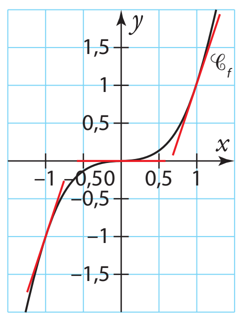
Convexité et concavité

- f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de ses sécantes.
- f est **concave** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de ses sécantes.



Point d'inflexion

On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.



Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 40, 41, 3, 4, 46, 47
▶ Calculer la dérivée d'une fonction composée et en déduire le tableau de variations de cette fonction	Méthode 3, Méthode 4, Méthode 11	5, 6, 53, 54, 7, 8, 61, 62, 21, 22, 87, 88
▶ Étudier la convexité d'une fonction par différentes méthodes	Méthode 5, Méthode 6, Méthode 7, Méthode 8, Méthode 12	9, 10, 65, 66, 11, 12, 69, 70, 13, 14, 72, 73, 15, 16, 76, 77, 23, 24, 91, 92
▶ Déterminer les coordonnées des points d'inflexion par différentes méthodes	Méthode 9, Méthode 10	17, 18, 81, 82, 19, 20, 83, 84

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s05-06

QCM **Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 117 à 121, on considère la fonction f définie sur $[-5\,;+\infty[$ dont voici le tableau de variations.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4{,}5$

	A	B	C	D
117 Sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$, la fonction g définie par $g(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$…	est croissante.	est décroissante.	n'est pas monotone.	est périodique.
118 Dans ces conditions, $g(2)=$	4	e^4	2	0
119 Dans ces conditions, $g'(-1)=$	1	e^3	$3\mathrm{e}^3$	0
120 On pose $h(x)=\sqrt{f(x)+5}$. Alors la fonction h…	est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.	est croissante sur $]2\,;+\infty[$.	est négative sur $]2\,;+\infty[$.	n'est pas définie sur $]2\,;+\infty[$.
121 La dérivée h' de h est égale à :	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)+5}}$	$\sqrt{f(x)+5}$	$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+5}}$	$\dfrac{f(x)}{2\sqrt{f(x)+5}}$

Pour les exercices 122 à 126, on considère la fonction f deux fois dérivable sur $[-10\,;10]$ définie par :
$$f(x)=1+(x-5)\mathrm{e}^{0,2x}.$$

	A	B	C	D
122 La dérivée $f''(x)$ est définie par :	$\dfrac{(x+5)\mathrm{e}^{0,2x}}{25}$	$\dfrac{x\mathrm{e}^{0,2x}}{5}$	$(x-5)\mathrm{e}^{0,2x}$	0
123 f' est :	décroissante sur $[-5\,;0]$.	décroissante sur $[-10\,;0]$.	croissante sur $[-10\,;5]$.	croissante sur $[-5\,;5]$.
124 f est :	concave sur $[-5\,;0]$.	concave sur $[-10\,;0]$.	convexe sur $[-10\,;5]$.	convexe sur $[-5\,;5]$.
125 Sur $[0\,;5]$, on peut affirmer @que $\mathscr{C}_f$ est située…	au-dessus de ses tangentes.	au-dessus de ses sécantes.	en dessous de ses tangentes.	en dessous de ses sécantes.
126 $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour x égal à :	5	0	10	–5

127 Image d'un nombre

Soit deux fonctions u et g définies par les tableaux de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$u(x)$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1. Déterminer $g \circ u(-1)$ et $u \circ g(2)$.
2. Déterminer la variation de $g \circ u$ sur $]-\infty\,; -1]$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(u(x))$.

Méthode 1 et Méthode 2 p. 141

Coup de pouce Faire le schéma de composition.

D'après Bac ES La Réunion 2006

128 Étudier une fonction trigonométrique

Soit m un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction g_m définie par $g_m(x) = \cos(mx) + mx$.
On appellera $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé.
1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles g_m est définie.
2. La fonction est-elle paire ? Impaire ? Périodique ? Peut-on restreindre son intervalle d'étude ?
On décide d'étudier g_m sur $\mathrm{I} = \left[0\,; \dfrac{2\pi}{m}\right]$.
3. Déterminer les limites et les variations de g_m aux bornes de I.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction sur I.

Méthode 3, Méthode 4 p. 143 et Méthode 11 p. 150

D'après Concours audioprothésiste CPDA 2013

129 Points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (-5x^2 + 5)e^x.$$
1. Montrer que $f''(x) = -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.
2. Étudier le signe de $5x^2 + 20x + 5$ puis celui de $f''(x)$.
3. En déduire les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.
4. Interpréter graphiquement ces résultats.

Méthode 9 et Méthode 10 p. 149

D'après Bac ES Nouvelle-Calédonie novembre 2019

130 Étudier une fonction composée

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = (-x+1)e^{\frac{1}{-x+1}}.$$
On appellera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé.
1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est définie.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction. Préciser les coordonnées des extrema si la fonction en possède.
4. Construire le tableau de variations de la fonction.
5. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Méthode 3, Méthode 4 p. 143 et Méthode 11 p. 150

D'après Concours audioprothésiste CPDA 2015

131 Étudier la convexité d'une fonction

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil.
On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,; 60]$ par :
$$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}.$$
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,; 60]$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.
1. Montrer que pour tout nombre réel x de $[0\,; 60]$,
$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,; 60]$ et dresser son tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher la ligne suivante.

```
1  factoriser(deriver(deriver(70+(14x+42)*exp(-x/5))))
```

$$\frac{14 * (x - 7) * \exp\left(-\dfrac{x}{5}\right)}{25}$$

À l'aide des informations obtenues :
a) Déterminer $f''(7)$. Que représente le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 pour $\mathscr{C}_f$?
b) Étudier la convexité de f.
c) En déduire l'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum.

Méthode 5, Méthode 6 p. 145, Méthode 7, Méthode 8 p. 147 et Méthode 12 p. 151

Coup de pouce Étudier le signe de la dérivée seconde.

D'après Bac ES Métropole La Réunion juin 2019

Exercices vers le supérieur

132 Courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :
- L est définie et croissante sur [0 ; 1],
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$,
- pour tout x de [0 ; 1], $L(x) \leqslant x$.

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par :
$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$
a) Déterminer la dérivée de f notée f'.
b) Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 1].
c) En déduire que $x \geqslant f(x)$ sur [0 ; 1].
d) Conclure.
2. Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par
$$g(x) = e^x - (e - 2)x + 1$$
a) Calculer $g'(x)$. Donner le sens de variation de g sur [0 ; 1].
b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
c) On pose $h(x) = x - g(x)$.

x	0		$\ln(e-1)$		1
Signe de $h'(x)$		+	0	–	

Déduire du tableau de signes de $h'(x)$ le tableau de variations de h (on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e-1))$) puis que, pour tout x de [0 ; 1], $g(x) \leqslant x$.
3. En déduire que les courbes représentatives de f et de g sont toutes deux des courbes de Lorenz.

D'après Bac ES Métropole 2003

133 Composition avec l'opposé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle réel I.
On pose, pour tout réel $x \in$ I :
$$g(x) = f(-x).$$
1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
3. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.
4. Montrer que si f' est impaire alors f est paire.
5. Montrer que si f' est paire et $f(0) = 0$, alors f est impaire.

134 Étudier une fonction composée

Soit m un paramètre réel non nul.
On considère la fonction f_m définie par :
$$f_m(x) = (mx+1)e^{\frac{1}{mx+1}}.$$
On appellera $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé.
Répondre aux questions suivantes selon m.
1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f_m est définie.
2. Déterminer les limites de f_m aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer les variations de la fonction. Préciser les coordonnées des extrema si la fonction en possède.
4. Construire le tableau de variations de la fonction.
5. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_m$.

D'après Concours audioprothésiste CPDA 2015

135 Dérivée *n*-ième d'une fonction (1)

Soit f la fonction puissance de degré n définie par :
$$f(x) = x^n.$$
avec n entier naturel non nul.
1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. À l'aide de factorielle, donner une expression de $f^{(n)}(x)$, dérivée n-ième de f.

136 Dérivée *n*-ième d'une fonction (2)

Soit f la fonction inverse définie par :
$$f(x) = \frac{1}{x}.$$
Soit k un entier naturel. On considère la dérivée k-ième de f notée $f^{(k)}(x)$.

Ainsi $f^{(1)}(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3}$.

1. Calculer $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$.
2. Conjecturer une formule de $f^{(k)}(x)$.
3. Démontrer cette formule par récurrence sur $k \geqslant 1$.
4. Démontrer par récurrence sur $k \geqslant 1$ que, pour
$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad : \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}.$$
5. Démontrer par récurrence sur $k \geqslant 1$ que, pour
$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad : \quad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}.$$

137 Dérivée *n*-ième d'une fonction (3)

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = e^{kx}$$
avec k réel non nul.
1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Donner une expression de $f^{(n)}(x)$, dérivée n-ième de f.
3. Discuter, selon les valeurs de k et de n, le signe de $f^{(n)}(x)$.
4. En déduire, selon les valeurs de k et de n, le sens de variation de $f^{(n-1)}(x)$.

138 Théorème des pentes

Démo

Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a, b et c trois réels.
Démontrer que, si $a < b < c$, alors :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

139 Inégalité de convexité (1)

Soit a et b deux nombres réels tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
Soit x et y deux réels strictement positifs, montrer que :
$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geqslant xy.$$

140 Inégalité de convexité (2)

Montrer que, pour tout $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$:
$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

Exercices vers le supérieur

141 Inégalité arithmético-géométrique
Démo

Soit n un entier naturel et soit n réels strictement positifs notés $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On appelle moyenne arithmétique de $x_1, x_2, \dots, x_n$ la quantité $\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$ et moyenne géométrique de $x_1, x_2, \dots, x_n$ la quantité $(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}}$.

Démontrer que :

$$(x_1 \dots x_2)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}.$$

142 Avec une exponentielle
Soit a et b deux nombres réels.

Montrer que :

$$e^{\frac{(a+b)}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(e^a + e^b).$$

143 Monotonie de la fonction réciproque
Soit f une fonction convexe strictement monotone d'un intervalle I vers un intervalle J. Discuter, suivant la croissance ou la décroissance de f, la monotonie de la fonction f^{-1}.

144 Avec un paramètre
Sciences Po

Soit λ un réel non nul fixé et $g_\lambda : x \to e^{-\lambda x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. On admet que g_λ est deux fois dérivable et on note Γ_λ sa courbe représentative dans un repère.

Répondre aux questions suivantes selon le signe de λ.

1. Étudier la parité de la fonction g_λ.

2. Déterminer les limites de g_λ sur son domaine de définition.

3. Étudier les variations de g_λ et dresser son tableau de variations.

4. Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ.

5. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points où elle traverse sa tangente ?

6. Donner l'allure de la courbe Γ_λ.

D'après Sciences Po, sujet 2011

145 Point d'inflexion (1)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+15x-10}{3x^2}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. a) Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-15x+20}{3x^3}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. a) Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$, $f''(x) = \dfrac{10x-20}{x^4}$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire la convexité de f sur $[2\,;+\infty[$.

c) Montrer que le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

146 Convexité d'une fonction (1)
Soit f une fonction polynomiale de degré 4 définie par :

$$f(x) = ax^4 + bx + c$$

avec a réel non nul et b et c des réels.

Déterminer $f''(x)$ puis en déduire la convexité de f suivant le signe de a.

147 Convexité d'une fonction (2)
Petites Mines

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 3x\,e^{-x^2} - 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, ainsi que les limites aux bornes du domaine de définition. Préciser les branches infinies de $\mathscr{C}_f$.

2. Calculer f''. Qu'en déduit-on pour le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0 ?

3. Donner une équation de la tangente en 0 à $\mathscr{C}_f$. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente au point d'abscisse 0. Quel résultat retrouve-t-on ?

4. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

D'après Petites Mines 2009

148 Point d'inflexion (2)
Soit f une fonction polynomiale de degré 3 définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

avec a réel non nul et b, c et d des réels.

1. Discuter, selon les valeurs de a, de la convexité de la fonction f.

2. Montrer que, quelque soit le signe de a, la courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$.

3. Appliquer ce résultat avec $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 8$.

149 Avec un logiciel de calcul formel
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé.

1. a) Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{e}{\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$.

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée première f' et de dérivée seconde f''.

a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

d) Un logiciel de calcul formel donne l'affichage ci-dessous.

1	factoriser(deriver(deriver(sqrt(x)*exp(1-x))))
	$\dfrac{(4*x^2-4*x-1)*(\sqrt{x})*exp(1-x)}{4*x^2}$

Préciser les intervalles où f est convexe, concave et les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

D'après Concours ENSM 2011

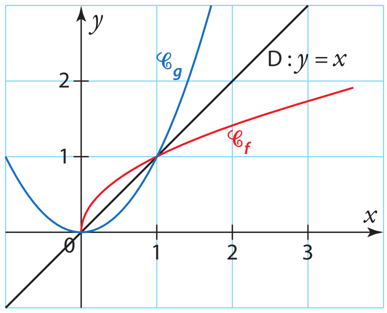
Travaux pratiques

TICE 35 min Représenter Raisonner Communiquer

1 Des composées particulières

A ▸ Fonctions réciproques l'une de l'autre

1. À l'aide de Geogebra, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2$. Que remarque-t-on ?



2. a) Pour tout réel x, déterminer les domaines de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

b) Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$. Que remarque-t-on ? Peut-on en déduire que $g \circ f = f \circ g$ sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

3. Faire de même avec les fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = e^x$.

Remarque On dit que ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre sur un intervalle I (à préciser) et on note f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f.

B ▸ Fonctions involutives

1. a) Soit f la fonction inverse définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

b) Pour tout réel x, non nul, montrer que $f \circ f(x) = x$. On dira que $f \circ f = Id$, où Id est l'application identité $x \mapsto x$.

c) Sur Geogebra tracer $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. Que remarque-t-on ?

2. Pour tous réels a et b avec $b \neq 0$, on définit les fonctions g et h définies par $g(x) = a - x$ et $h(x)=\dfrac{b}{x-a}+a$.

a) Déterminer les domaines de définition de g et de h.

b) Créer des curseurs a et b sur Geogebra puis tracer $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, courbes représentatives des fonctions g et h dans un repère orthonormé. Que remarque-t-on ?

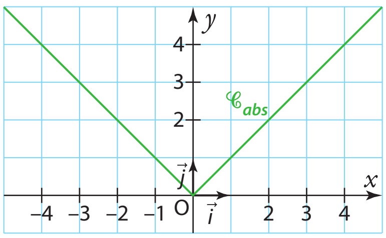
c) Calculer $g \circ g(x)$ et $h \circ h(x)$. Que remarque-t-on ? Qu'en déduire ?

Remarque On dit que ces fonctions sont involutives, elles sont leur propre réciproque c'est à dire $f^{-1} = f$.

C ▸ Fonctions idempotentes

On note abs la fonction valeur absolue définie par $abs(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Pour tout réel x, calculer $abs(abs(x))$. Que remarque-t-on ?



Remarque On dit que cette fonction est idempotente, composée par elle-même elle donne le même résultat, autrement dit : $f \circ f = f$.

TICE 25 min Chercher Raisonner

2 Étude d'une fonction à paramètre

A ▶ Étude d'une fonction trigonométrique

Soit $t \in [-5\ ;\ 5]$. Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto t\sin(x)$.

1. À l'aide de Geogebra, créer un curseur t et tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.

2. Selon le signe de t, déterminer l'ensemble de définition de f, les variations de la fonction f et le tableau de variations de la fonction f.

B ▶ Étude d'une fonction exponentielle

Soit $t \in [-5\ ;\ 5]$. On considère la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{tx^3}$.

1. À l'aide de Geogebra, tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.

2. Selon le signe de t, déterminer l'ensemble de définition de f, les variations de la fonction f et le tableau de variations de la fonction f.

C ▶ Étude d'une fonction logarithme

Soit $t \in [-5\ ;\ 5]$. On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{tx^2 + x}$.

1. À l'aide de Geogebra, tracer la courbe $\mathscr{C}_h$ représentative de la fonction h.

2. Selon le signe de t, déterminer l'ensemble de définition de f, les variations de la fonction f et le tableau de variations de la fonction f.

TICE 20 min Calculer Raisonner

3 Déterminer le lieu de vitesse maximale de la montagne russe

On modélise la portion du trajet la plus inclinée des montagnes russes par une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ 27]$ dont la dérivée est égale à :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\left(x - \frac{27}{2}\right)\right)^2 + 1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne l'affichage ci-contre.

1	`f(x):=156/10+15*atan(-sqrt(3)/15*(x-135/10))`
2	`(deriver(f(x),x))`
	$-\dfrac{\sqrt{3}}{\left((\sqrt{3}) * \frac{1}{15} * \left(x - \frac{27}{2}\right)\right)^2 + 1}$
3	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x)))`
	$\dfrac{1200 * (\sqrt{3}) * (2 * x - 27)}{(4 * x^2 - 108 * x + 1029)^2}$

1. À l'aide de cet affichage, déterminer $f''(x)$.

2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

3. Quelle est la valeur de la pente en ce point d'inflexion ? À quel angle cela correspond-il ?

4. Conclure quant à l'endroit où la vitesse est maximale au niveau de ce trajet.