5

Dérivation et convexité

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster, par exemple, est une montagne russe des plus populaires au monde avec ses 22 virages et sa pente maximale de 60°.

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

↪ TP 2 p. 167

VIDÉO WEB
Un manège courbé
lienmini.fr/maths-s05-01

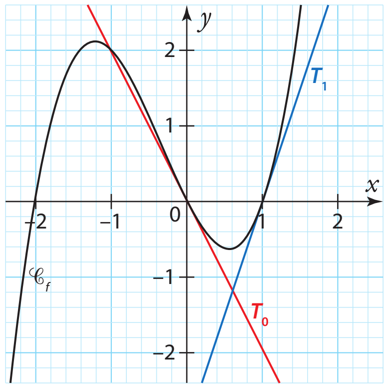
Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s05-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Déterminer un nombre dérivé

1. On considère une fonction dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.



a) Graphiquement, déterminer $f'(0)$, $f(0)$, $f'(1)$ et $f(1)$.

b) Graphiquement, déterminer les abscisses pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

a) Calculer $g'(3)$ et $g'(-3)$.
Que remarquez-vous ? Justifier.

b) Déterminer l'abscisse positive a pour laquelle $g'(a) = 12$.

2 Déterminer une équation de tangente

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $f'(2)$ et $f(2)$.

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, notée T_2.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$.
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0, notée T_0.

3 Calculer des dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$

b) $g(x) = 4x - \dfrac{7}{x}$

c) $h(x) = xe^x$

d) $i(x) = \dfrac{x^2e^x + 3}{x + 5}$

4 Étudier des tableaux de signes

1. On considère les tableaux de signes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		–	0	+	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		–	0	+	

Dresser le tableau de signes de $f \times g$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 9)(3x + 4)$.
Dresser le tableau de signes de la fonction h.

5 Calculer la dérivée de $x \to f(ax + b)$

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{3x+1}$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{-2x + 1}$. Calculer $g'(x)$.

Activités

Algo 20 min

1 Voir des fonctions… à l'intérieur d'autres fonctions !

A ▶ Schéma de composition avec deux fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{3x}$.

1. Calculer $f(1)$. Lors de ce calcul, quelle a été la dernière opération effectuée ?

2. Un élève tente d'expliquer à un autre comment calculer $f(x)$: « Tu prends un nombre x puis tu le multiplies par 3 et tu prends la racine carrée du nombre obtenu ». D'après cette phrase, compléter la procédure ci-après.

$$x \xrightarrow{u} u(x)=\ldots\ldots \xrightarrow{v} v(u(x))=v(\ldots\ldots)=\ldots\ldots$$

3. Lequel des deux algorithmes ci-contre, écrits en langage **Python**, retourne $f(x)$?

Algorithme A :

```
def f(x):
    x=3*x
    return(sqrt(x))
```

Algorithme B :

```
def f(x):
    x=sqrt(x)
    return(3*x)
```

4. Soit u et v les fonctions définies par $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=3x$.

a) Donner les domaines de définition de u et de v notés respectivement D_u et D_v.

b) Exprimer $u(v(x))$ et $v(u(x))$ en fontion de x.

c) On note $u\circ v$ (et on lit « u rond v ») la fonction qui à x, associe $u(v(x))$ et $v\circ u$ la fonction qui à x, associe $v(u(x))$. Déterminer les domaines de définition de $u\circ v$ et de $v\circ u$ notés respectivement $D_{u\circ v}$ et $D_{v\circ u}$. Sont-ils égaux ?

5. Montrer que $u\circ v(0)=v\circ u(0)$ mais que $u\circ v(4)\neq v\circ u(4)$. Qu'en conclure ?

B ▶ Schéma de composition avec trois fonctions

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$. Soit u, v et w les fonctions définies par $u : x \to \dfrac{1}{x}$, $v : x \to x^2$ et $w : x \to x+1$. Donner le schéma de composition de f puis montrer que $u\circ v\circ w=(u\circ v)\circ w=u\circ(v\circ w)$.

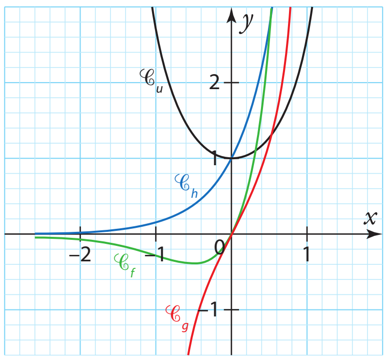
↪ Cours 1 p. 140

20 min

2 Étudier une dérivée

On considère la fonction u définie par $u(x)=e^{x^2}$ représentée graphiquement par la courbe $\mathscr{C}_u$ ci-contre. On admet que u est la composée $v\circ w$ des fonctions $v : x \to e^x$ et $w : x \to x^2$.

On considère les fonctions $f : x \to 2xe^{2x}$, $g : x \to 2xe^{x^2}$ et $h : x \to e^{2x}$.



1. À l'aide du graphique, dresser le tableau de variations de la fonction u.

2. Dresser les tableaux de signes des fonctions f, g et h.

3. Parmi les fonctions f, g et h représentées ci-contre par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, laquelle pourrait être la fonction dérivée de la fonction u ?

4. Quelle forme pourrait la dérivée d'une fonction composée $v\circ w$?

5. Soit u et v des fonctions quelconques telles que $u\circ v$ soit dérivable sur un intervalle I. Soit a un réel de I.

a) Vérifier que, pour tout réel h strictement positif, $\dfrac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{h}=\dfrac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{v(a+h)-v(a)}\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{u\circ v(a+h)-u\circ v(a)}{h}$ et en déduire que $(u\circ v)'=(u'\circ v)\times v'$.

Coups de pouce • Faire le lien entre signe des potentielles fonctions dérivées et variation de la fonction initiale.
• À partir de la courbe $\mathscr{C}_u$, déterminer des nombres dérivés.

↪ Cours 2 p. 142

30 min

3 Utiliser une fonction de production

Jeff est couturier. Il crée sa propre entreprise et il décide de produire au maximum 100 pièces par an. Il se fixe un objectif d'au moins 50 pièces pour la 1e année. On modélise la production semestrielle de cet artisan par une fonction f de la variable t où t est le temps hebdomadaire (en heures) qu'il consacre à produire des pièces, f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. On considère que f est définie par la relation $f(t) = 20\sqrt{t}$.

a) Au 1er semestre, Jeff se consacre entièrement aux papiers administratifs et ne produit rien. Au 2nd semestre il décide de rattraper ce retard en consacrant 20 heures hebdomadaires à la production. Calculer la production obtenue en fin d'année. Cette stratégie semble-t-elle efficace ?

b) Même question que précédemment en considérant 10 heures de travail consacrées à la production pour le 1er semestre et 10 heures de travail consacrées à la production pour le 2nd semestre.

Coups de pouce • Calculer $f(0)$ puis $f(20)$ et faire la moyenne des deux résultats obtenus.
• La stratégie est efficace si la production moyenne obtenue est supérieure à 50.

c) Soit t un réel de [0 ; 1]. Établir une inégalité entre $tf(4)$, $(1-t)f(16)$ et $f(t \times 4 + (1-t) \times 16)$.

d) Tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en différents points. Quelle est leur position par rapport à $\mathscr{C}_f$?

2. Reprendre la question **1.** en considérant que f est définie par la relation $f(t) = \frac{4}{25}t^2$.

3. D'après **1.** et **2.** quelle stratégie devrait adopter Jeff ? Quelle(s) différence(s) existe-t-il entre les fonctions des questions **1.** et **2.** ?

↪ Cours 3 p. 144

TICE 15 min

4 Voir le lien entre courbes, sécantes et tangentes

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \to x^3$.

2. Placer deux points A et B d'abscisses négatives et tracer le segment [AB] (aussi appelé sécante). Comment est situé ce segment par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$? Faire de même avec deux points C et D d'abscisses positives puis avec le point E d'abscisse –2 et le point F d'abscisse 2.

3. Pour tout point M de $\mathscr{C}_f$, on note T_M la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M. Tracer T_A, T_B, T_C, T_D, T_E et T_F.
Donner la position de chaque tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.

4. a) Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Dresser les tableaux de variations et de signes de la fonction f'.

5. On note f'' (et on lit « f seconde ») la fonction dérivée de la fonction f'. Déterminer le signe de f''.

6. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

x appartient à l'intervalle	$]-\infty ; 0]$	$[0 ; +\infty[$
Sécantes	en dessous de $\mathscr{C}$	au-dessus de $\mathscr{C}$
Tangentes	au-dessus de $\mathscr{C}$	en dessous de $\mathscr{C}$
Variations de f'		
Signe de $f''(x)$		
Fonction f…	concave	convexe

↪ Cours 4 p. 146 et 5 p. 146

Cours

1 Composée d'une fonction u par une fonction v

Définition Composition d'une fonction u par une fonction v

Soit v et u deux fonctions telles que u est définie sur un intervalle I à valeurs dans l'intervalle J (c'est à dire pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J), et v est définie sur J.
On note alors $v \circ u$ la fonction définie sur I par $v \circ u : x \to v(u(x))$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & u & \text{J} & v & \\ x & \mapsto & u(x) & \mapsto & v(u(x)) \end{array}$$

Exemple

Soit deux fonctions u et v telles que : $u : x \mapsto 2x - 3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

La fonction $v \circ u$ est définie sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$ par $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$.

Remarques

① La fonction $u \circ v$ est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $u \circ v(x) = 2\sqrt{x} - 3$.

② Dans l'exemple ci-dessus, $u(1)$ existe ($u(1) = -1$) mais $v(u(1))$ n'existe pas car la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété Associativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions est associative. Soit u, v et w trois fonctions vérifiant les conditions de définition requises alors : $w \circ (v \circ u) = (w \circ v) \circ u$.

Exemple

Soit trois fonctions u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$ et $w : x \mapsto 1 - x$.

Le schéma de composition donne : $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto u(x) = x^2 - 2 \\ \qquad\qquad y \mapsto e^y \\ \qquad\qquad\qquad z \mapsto 1 - z \end{array} \right.$

Donc :

- $w \circ v(x) = w(v(x)) = w(e^x) = 1 - e^x$

et par suite $(w \circ v) \circ u(x) = w \circ v(u(x)) = w \circ v(x^2 - 2) = 1 - e^{x^2 - 2}$

- $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$

et par suite $w \circ (v \circ u)(x) = w \circ (v \circ u(x)) = w(e^{x^2 - 2}) = 1 - e^{x^2 - 2}$

donc $(w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u)$.

Propriété Non commutativité de la composition de fonctions

La composée de fonctions n'est pas commutative : $v \circ u \neq u \circ v$ en général.

Exemple

Soit les trois mêmes fonctions que dans l'exemple précédent u, v et w définies par $u : x \mapsto x^2 - 2$, $v : x \mapsto e^x$ et $w : x \mapsto 1 - x$.

Le schéma de composition donne : $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto u(x) = x^2 - 2 \\ \qquad\qquad y \mapsto e^y \\ \qquad\qquad\qquad z \mapsto 1 - z \end{array} \right.$

Ici,
$u \circ v(x) = u(v(x)) = u(e^x) = (e^x)^2 - 2 = e^{2x} - 2$
mais $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 2) = e^{x^2 - 2}$.
Donc $u \circ v \neq v \circ u$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s05-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Étudier un schéma de composition

Énoncé

Soit deux fonctions u et v telles que $v \circ u(x) = \dfrac{x^7}{x^7+1}$. Déterminer v et u.

Solution

1 Le schéma de composition est : $x \overset{\mathbb{R}}{\underset{}{}} \overset{u}{\mapsto} \overset{\mathbb{R}}{x^7} \overset{v}{\mapsto} \dfrac{x^7}{x^7+1}$.

D'où $u : x \to x^7$ et $v : x \to \dfrac{x}{x+1}$. On vérifie que $v \circ u(x) = v(x^7) = \dfrac{x^7}{x^7+1}$ 2.

Conseils & Méthodes

1 Bien distinguer les étapes de la composition en écrivant le schéma de composition.

2 Supprimer les $\circ$ en passant par les parenthèses et en suivant la composition étape par étape.

À vous de jouer !

1 Établir le schéma de composition de la fonction f définie par $f(x) = (x+2)^3$.

2 Établir le schéma de composition de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$.

↪ Exercices 40 à 45 p. 154

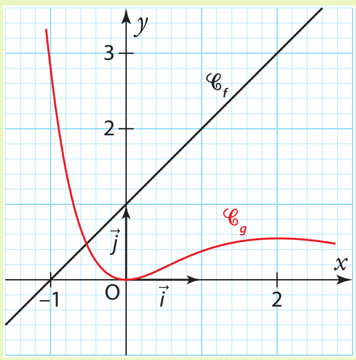
Méthode 2 Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée

Énoncé

1. Soit deux fonctions f et g et leurs courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé. Déterminer graphiquement, s'ils existent, $f \circ g(2)$ puis $g \circ f(0)$.

2. On considère deux fonctions h et j définies par $h(x) = x^5$ et $j(x) = \sqrt{x+1}$. Déterminer $h \circ j(8)$.

3. On donne les tableaux de variations de u et v. Déterminer $u \circ v(-4)$.



x	-4 $+\infty$
Signe de $v'(x)$	$+$
Variations de v	$0 \nearrow +\infty$

x	0 $+\infty$
Signe de $u'(x)$	$-$
Variations de u	$6 \searrow -\infty$

Solution

1. Par lecture graphique, on trouve $g(2) \approx 0{,}54$ et $f(0{,}54) \approx 1{,}54$ donc $f \circ g(2) \approx 1{,}54$.

1 De même on trouve, $f(0) = 1$ et $g(1) \approx 0{,}37$ donc $g \circ f(0) \approx 0{,}37$.

2. $h \circ j(8) = h(j(8)) = h(\sqrt{8+1}) = h(\sqrt{9}) = h(3) = 3^5 = 243$.

3. Par lecture du tableau, $u \circ v(-4) = u(v(-4)) = u(0) = 6$.

Conseils & Méthodes

1 Bien distinguer les étapes de la composition, en commençant par $g(2)$ puis par $f(g(2))$.

À vous de jouer !

3 On considère deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 3x + 1 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x}.$$

Déterminer $f \circ g(6)$.

4 Avec les tableaux ci-dessous, déterminer $f \circ g(1)$.

x	1 $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$0 \nearrow +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$+\infty \searrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow +\infty$

↪ Exercices 46 à 52 p. 154

Cours

2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème — Dérivée d'une fonction composée

Soit u et v deux fonctions (vérifiant les conditions de définition requises) dérivables de dérivées respectives u' et v', alors la fonction $v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$.

Autrement dit pour tout réel x (vérifiant les conditions de définition requises) :

$$(v \circ u)'(x) = (v'(u(x)) \times u'(x).$$

Remarque

Soit u une fonction dérivable de dérivée u' et a et b deux réels. Alors la fonction f définie par $f(x) = u(ax + b)$ est dérivable de dérivée f' telle que $f'(x) = a \times u'(ax + b)$.

Exemple

Soit deux fonctions, $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ d'où $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On obtient : $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u(x)) \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^2 - 3}} \times 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 - 3}}$.

Propriétés — Monotonie d'une fonction composée

① Si v et u sont de même monotonie (c'est à dire toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes), alors la fonction $v \circ u$ est croissante.

② Si v et u sont de monotonie contraire (c'est à dire l'une croissante et l'autre décroissante), alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

Exemples

① Dans l'exemple précédent, u et v sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ donc $v \circ u$ l'est aussi sur $\mathbb{R}_+$.

② Considérons u et v telles que $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

u est croissante et v est décroissante donc $v \circ u$ définie par $v \circ u(x) = \dfrac{1}{2x - 3}$ est décroissante.

Démonstration

La fonction dérivée de la fonction $v \circ u$ est la fonction notée $(v \circ u)'$ telle que : $(v \circ u)'(x) = (v'(u(x)) \times u'(x)$.

① Si u et v sont croissantes alors u' et v' sont positives et $(v \circ u)'$ l'est aussi. Si u et v sont décroissantes alors u' et v' sont négatives et $(v \circ u)'$ est positive. Dans les deux cas $v \circ u$ est croissante.

② Si est croissante et v décroissante alors u' est positive et v' est négative donc $(v \circ u)'$ est négative. Si u est décroissante et v croissante alors u' est négative et v' est positive donc $(v \circ u)'$ est négative. Dans les deux cas $v \circ u$ est décroissante.

Propriétés — Dérivées usuelles

Soit u une fonction dérivable de dérivée u', a et b des réels et n un entier naturel.

Fonction	Fonction dérivée	Fonction	Fonction dérivée
au + b	au′ + b	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^2	$2u'u$	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
u^3	$3u'u^2$	$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
u^n	$nu'u^{n-1}$	e^u	$u'e^u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{1}{u^n}$	$-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s05-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 3 Calculer la dérivée d'une fonction composée

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x^2) + 3x$. On admet que f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée. On pose $g(x) = \cos(x^2)$.

1. **Donner le schéma de composition de la fonction g.**
2. **Exprimer $g'(x)$ en fonction de x.**
3. **En déduire l'expression de f' en fonction de x.**

Solution

1. $x \overset{u}{\mapsto} x^2 = y \overset{v}{\mapsto} \cos(y)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$.
2. $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$. Or $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ 1 d'où : $g'(x) = -\sin(x^2) \times 2x = -2x\sin(x^2)$.
3. $f'(x) = -2x\sin(x^2) + 3$.

Conseils & Méthodes

1 Réécrire la formule initiale en distinguant bien les rôles de u et de v et en déterminant u' et v'.

À vous de jouer !

5 Déterminer la fonction dérivée notée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-x+1)e^{3x}$.

6 Déterminer la fonction dérivée notée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x^2+1)$

↪ Exercices 53 à 60 p. 155

Méthode 4 Étudier une fonction composée et dresser son tableau de variations

Énoncé

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$.
Déterminer l'ensemble de définition de f puis dresser son tableau de variations.

Solution

$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ donc le domaine de définition de f noté $\mathcal{D}_f$ est $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$. 1

On ne constate aucune parité, ni périodicité sur f. Le domaine d'étude est égal au domaine de définition. 2

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x-1}} = e^1 = e$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} e^{\frac{x}{x-1}} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty$. 3

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{x}{x-1}} < 0$, donc f est décroissante sur $\mathcal{D}_f$. D'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
Variations de f	e ↘		0 ‖ $+\infty$	↘	e

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer $\mathcal{D}_f$, chercher dans un 1e temps les valeurs interdites.

2 Pour réduire le domaine d'étude chercher des éléments de parité ou de périodicité.

3 Procéder étape par étape dans le calcul des limites.

4 Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ et pas seulement l'équation $f'(x) = 0$.

À vous de jouer !

7 Étudier et dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = \sqrt{2+\cos(x)}$.

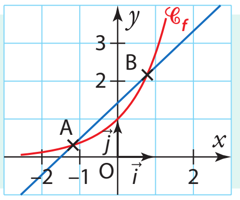
8 Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x^2}$.

↪ Exercices 61 à 64 p. 155

3 Convexité d'une fonction

Définition Sécante

**Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ alors la droite (AB) est appelée sécante de $\mathscr{C}_f$.**



Définition Convexité et concavité

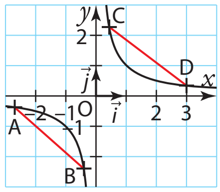
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :
① f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.
② f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.

Propriétés Fonctions usuelles

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.
La fonction $\dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-contre.
Alors le segment [CD] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x strictement positif donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et le segment [AB] est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x strictement négatif donc f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$.



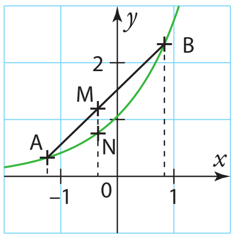
Propriétés Inégalités

• Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a : $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

• Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a: $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.

Démonstration

Soit deux réels x et y et soit t un réel de $[0\,;1]$. Soit $A(x\,;f(x))$ et $B(y\,;f(y))$.
Alors le point $M(tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de $\mathscr{C}_f$. f étant convexe, cette sécante est située au dessus de $\mathscr{C}_f$. M est donc situé au dessus du point $N(tx + (1-t)y, f(tx + (1-t)y))$.
D'où $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.



Remarque Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est une fonction strictement convexe ou strictement concave sur I.

Propriétés Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc $f : x \mapsto -e^x$ est concave.

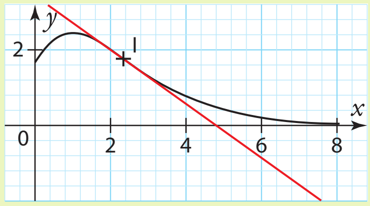
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s05-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Lire les intervalles où f est convexe ou concave sur sa représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur $[0 ; 8]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.



Solution

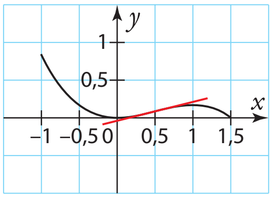
Sur $[0 ; 2{,}4]$, la courbe de f est au-dessus de ses sécantes donc f est concave sur cet intervalle. De même sur $[2{,}4 ; 8]$, la courbe de f est en dessous de ses sécantes donc f est convexe sur cet intervalle. 1

Conseils & Méthodes

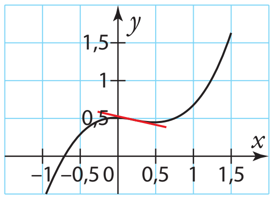
1 Repérer la position des sécantes par rapport à la courbe. Si elles ne sont pas apparentes, se servir d'une règle et la déplacer sur la courbe.

À vous de jouer !

9 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



10 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



↪ Exercices 65 à 68 p. 156

Méthode 6 Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

Énoncé

Montrer que si a et b sont strictement positifs alors $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$.

Solution

La fonction carrée est convexe. Donc pour tous réels a et b et pour tout $t \in [0 ; 1]$, $f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$. 1

Pour $t = \frac{1}{2}$ on obtient donc : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$

donc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ donc $(a+b)^2 \leqslant \frac{4(a^2+b^2)}{2}$ soit $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$. 2

Conseils & Méthodes

1 Réécrire l'inégalité de convexité

2 Simplifier les inégalités obtenues.

À vous de jouer !

11 En utilisant la concavité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, montrer que si a et b sont strictement positifs alors $\sqrt{a+b} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

12 En utilisant la convexité de la fonction cube sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $(a+b)^3 \leqslant 4(a^3+b^3)$.

↪ Exercices 69 à 71 p. 156

Cours

4 Fonction convexe et dérivées première et seconde

Théorème Fonction convexe, fonction concave

Soit I un intervalle réel.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- **f est convexe sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est croissante.**
- **f est concave sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est décroissante.**

Exemple

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a dressé le tableau de variations de la fonction f'.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f'	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Alors f est concave sur $]-\infty\,;3]$ et convexe sur $[3\,;+\infty[$.

Définition Dérivée seconde

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.
On appelle dérivée seconde de la fonction f, notée f'', la dérivée de f'.

Exemple

Soit f la fonction définie (et dérivable deux fois) sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$.

Alors $f'(x) = 3x^2 + 4 \times (2x) + 5 = 3x^2 + 8x + 5$ et $f''(x) = 6x + 8$.

Remarques

1. La dérivée seconde d'une fonction affine est toujours nulle.
2. La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, donc à sa dérivée seconde également.

Théorème Convexité et dérivée seconde

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable et f' sa fonction dérivée.

- **f est convexe sur I si et seulement si pour tout réel x de I, f'' est positive.**
- **f est concave sur I si et seulement si pour tout réel x de I, f'' est négative.**

Démonstration

f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Donc f est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Méthode 7 Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Énoncé

Soit f une fonction deux fois dérivable et f' sa dérivée dont on donne le tableau de variations ci-contre.

1. Déterminer les intervalles pour lesquels f est convexe puis ceux pour lesquels f est concave.

2. En déduire le signe de la fonction f'', dérivée seconde de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Variations de f'		↗	88	↘	-162	↗	

Solution

1. f' est décroissante sur $[-2 ; 3]$ donc f est concave sur cet intervalle. De même f' est croissante sur $]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle. **1**

2. $f''(x) \leqslant 0$ sur $[-2 ; 3]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$. **2**

Conseils & Méthodes

1 Identifier si le tableau concerne f, f' ou f'' pour adopter la bonne stratégie.

2 f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

À vous de jouer !

13 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f'		↘	0	↗	$\frac{1}{6}$	↘	

14 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		↘	$-\frac{1}{8}$	↗	

↪ Exercices 72 à 75 p. 156

Méthode 8 Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$.

Déterminer le (ou les) intervalle(s) où f est convexe, puis celui (ou ceux) où f est concave.

Solution

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:
$f'(x) = x^2 - 3x + 2$ et $f''(x) = 2x - 3$. **1**

2. **2**

- $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$ donc f est convexe sur $\left[\frac{3}{2} ; +\infty\right[$.
- $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ donc f est concave sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$. **3**

Conseils & Méthodes

1 Calculer $f''(x)$.

2 Déterminer son signe.

3 En déduire la convexité de f.

À vous de jouer !

15 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

16 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x} - 3\mathrm{e}^{x+2}$.

↪ Exercices 76 à 80 p. 157

Cours

5 Tangente et point d'inflexion

Propriétés **Dérivée seconde et tangente**

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f''.
Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s05-04

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.
$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)$
Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :
$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.
Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :
si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.
si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.
De plus, $\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0) = 0$.
On obtient le tableau de variations ci-contre.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ autrement dit, la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
Conclusion : Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Remarques

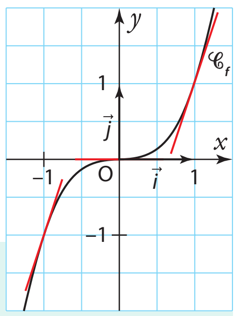
① Si f'' est négative sur I, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.
② Attention à la réciproque, une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivable.

Définition **Point d'inflexion**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur cet intervalle dans un repère orthonormé. Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A. On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.

Exemple

Soit f la fonction cube et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Alors l'origine du repère $O(0\,;0)$ est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$. En revanche les tangentes en -1 et en 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées $(-1\,;f(-1))$ et $(1\,;f(1))$ ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriété **Point d'inflexion**

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut que f'' change de signe donc que f' change de variation.

Exemple

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$. Donc $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.
Il y a changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité,
il y a donc en $O(0\,;0)$ un point d'inflexion.

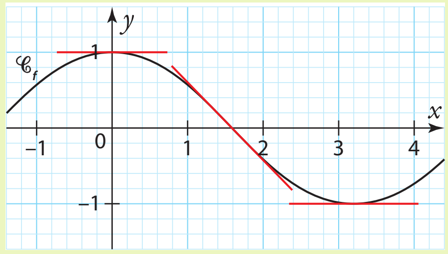
Méthode 9 Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur [–1,4 ; 4,45] dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.

2. En déduire le (ou les) point(s) d'inflexion éventuel(s).



Solution

1. Sur [–1,4 ; 1,6], la courbe est en dessous de ses tangentes donc f est concave. Sur [1,6 ; 4,45], la courbe est au-dessus de ses tangentes donc f est convexe. **1**

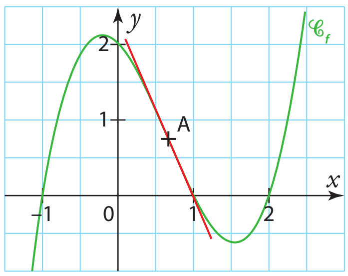
2. La courbe change de convexité pour $x = 1{,}6$ (la tangente traverse la courbe en ce point) et $f(1{,}6) = 0$. Donc le point d'inflexion de la courbe a pour coordonnées (1,6 ; 0).

Conseils & Méthodes

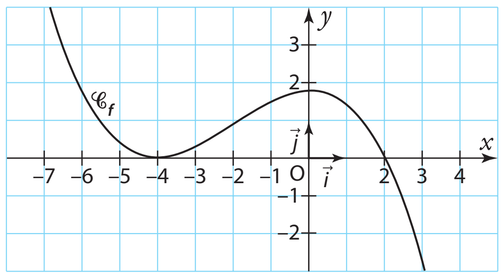
1 Repérer la position des tangentes par rapport à la courbe. Au besoin, se servir d'une règle et la déplacer le long de la courbe.

À vous de jouer !

17 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



18 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



➥ Exercices 81 à 82 p. 157

Méthode 10 Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$. Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentative de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$.

Solution

$f'(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$ et $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x = (x - 1)(x - 3)e^x$. **1**

En étudiant le signe de $f''(x)$, on trouve que les points d'inflexion sont atteints pour $x = 1$ et $x = 3$. **2** Comme $f(1) = 10e$ et $f(3) = 2e^3$, les coordonnées des points d'inflexion sont $(1 ; 10e)$ et $(3 ; 2e^3)$.

Conseils & Méthodes

1 Dériver deux fois la fonction puis étudier le signe de la dérivée seconde.

2 Le point d'inflexion correspond à un changement de signe pour f''.

À vous de jouer !

19 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = (x + 1)e^{-x}.$$

Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

20 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

➥ Exercices 83 à 86 p. 157

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s05-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 11 Étudier une fonction composée

Cours 1 p. 140 et 2 p. 142

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+1}{x}}$.

1. **Montrer que $f(x)=\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}$.**

2. **Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.**

3. **Soit u et v deux fonctions dérivables avec v non-nulle. Rappeler $(u+v)'$ et $(\sqrt{u})'$.**

4. **Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.**

5. **En déduire les variations de la fonction f.**

6. **Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.**

Solution

1. $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{x}=\dfrac{3x^2}{x}+\dfrac{2x}{x}+\dfrac{1}{x}=3x+2+\dfrac{1}{x}$.

2. $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{cases}$ donc par théorème sur les limites de somme, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

De plus : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(3x+2)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty\end{cases}$ donc par théorème sur les limites de somme, on obtient : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$. **1**

3. $(u+v)'=u'+v'$ et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

4. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables. $f'(x)=\dfrac{3-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{3x+2+\dfrac{1}{x}}}$.

Sur $]0\,;+\infty[$ $f'(x)\geqslant0\Leftrightarrow3-\dfrac{1}{x^2}\geqslant0\Leftrightarrow\dfrac{3x^2-1}{x^2}\geqslant0\Leftrightarrow3x^2-1\geqslant0\Leftrightarrow x^2\geqslant\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow x\geqslant\dfrac{\sqrt3}{3}$ ou $x\leqslant-\dfrac{\sqrt3}{3}$. **2**

5. f est croissante sur $\left[\dfrac{\sqrt3}{3}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{\sqrt3}{3}\right]$.

6. Le tableau de variations complet de la fonction f. **3** est le suivant.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$\sqrt{2(1+\sqrt3)}$	↗	$+\infty$

Conseils & Méthodes

1 Bien distinguer les cas $+\infty$ et $-\infty$, ainsi que les limites à gauche et à droite de 0.

2 S'aider si besoin en posant u et v et en déduisant u' et v'.

3 Ne pas oublier d'indiquer la valeur interdite et les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

À vous de jouer !

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=e^{3\sqrt{x}}$. Étudier f sur son ensemble de définition puis dresser son tableau de variations.

22 Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$. Étudier g sur son ensemble de définition puis dresser son tableau de variations.

Exercices 87 à 90 p. 158

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s05-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 12 Étudier la convexité d'une fonction pour résoudre un problème

Cours 3 p. 144, 4 p. 146 et 5 p. 148

Énoncé

Dans une usine, on modélise le coût total (exprimé en milliers d'euros) de production d'un objet par la fonction convexe C_T définie sur [0 ; 18[par :

$$C_T(x) = 5xe^{-0,2x}$$

où x est le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines. On admet que C_T est dérivable sur [0 ; 18[et on note C_T' sa dérivée.

1. Quel est le coût total de production pour 500 objets?

2. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C_M dérivée de la fonction C_T. Autrement dit $C_M(x) = C_T'(x)$.

a) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

b) Calculer le coût marginal pour une production de 500 objets puis de 1500 objets. On arrondira les résultats à l'euro.

3. Soit C_M' la fonction dérivée de C_M.

a) Exprimer $C_M'(x)$ en fonction de x puis étudier son signe sur [0 ; 18[.

b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle [0 ; 10] » ?

c) Que pensez-vous de l'affirmation : « il y a accélération du coût total de production sur [0 ; 10] » ?

Solution

1. $f(5) = 25e^{-1} \approx 9{,}20$ milliers d'euros. 1

2. a) $C_M(x) = C_T'(x) = 5e^{-0,2x} + 5x(-0{,}2)e^{-0,2x} = e^{-0,2x}(5 - x)$

b) $C_M(5) = e^{-0,2\times5}(5 - 5) = 0$

et $C_M(15) = e^{-0,2\times15}(5 - 15) = -10e^{-3} \approx 0{,}498 \approx 498$ euros. 1

3. a) $C_M'(x) = -0{,}2e^{-0,2x}(5 - x) + e^{-0,2x}(-1) = -e^{-0,2x}(1 - 0{,}2x + 1) = -e^{-0,2x}(2 - 0{,}2x) = e^{-0,2x}(0{,}2x - 2)$. 2

Pour tout $x \in [0 ; 18[$, $e^{-0,2x} > 0$. De plus $0{,}2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{2}{0{,}2} = 10$.

Donc $C_M'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 10$ et $C_M'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 10$.

b) La dérivée du coût marginal étant négative sur [0 ; 10] alors le coût marginal est décroissant sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 3

c) La dérivée du coût marginal est positive sur [0 ; 10] et correspond à la dérivée seconde du coût total de production. Donc il y a décélération du coût total de production sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 4

Conseils & Méthodes

1 Faire attention aux unités de x et de $f(x)$.

2 Pour factoriser, souligner les facteurs communs.

3 Faire le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.

4 Faire le lien entre fonction, dérivée et dérivée seconde et leurs interprétations.

À vous de jouer !

23 On modélise le rythme de croissance d'un PIB (en milliards) par la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020. Déterminer le moment où la croissance commence à ralentir.

24 On modélise la vitesse de production d'un objet (en milliers) par la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020. Déterminer le moment où la vitesse diminue.

Exercices 91 à 107 p. 158

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s05-04
ØLJEN Les maths en finesse

La propriété à démontrer

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

On souhaite démontrer cette propriété en utilisant une fonction ϕ qui représenterait l'écart entre la courbe et la tangente en x_0.

Comprendre avant de rédiger

Que peut-on conclure du fait que f'' soit positive ? → f'' est positive si et seulement si f' est croissante.
Quelle est l'équation d'une tangente au point x_0 ? → $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Comment traduire mathématiquement l'expression « la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes » ?
→ Cela revient à dire que $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Pour montrer une inégalité telle que $A \geqslant B$, on peut montrer que le signe de la différence $A - B$ est positif.

Rédiger

Étape 1 Noter les éléments de l'énoncé et les hypothèses faites au départ.

Étape 2 Étudier le signe de la différence entre l'équation de la courbe et celle de la tangente en x_0 : $f(x) - y$.

Étape 3 Repérer les éléments constants et ceux qui dépendent de x.

Étape 4 Rappeler le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. En déduire le signe de $\phi'(x)$.

Étape 5 Évaluer ϕ en son minimum x_0.

Étape 6 Créer un tableau de variations de ϕ pour avoir le valeur de son minimum.

Étape 7 Avec le signe de $\phi(x)$ on déduit l'inégalité.

Étape 8 Rédiger une conclusion.

La démonstration rédigée

Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde.
On admet que f'' est positive sur un intervalle I.

Soit ϕ la fonction définie sur I par
$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$
$\quad = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$

Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :
$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :
si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.
si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.

De plus, $\phi(x_0) = f(x0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$.

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	↘	0	↗

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Pour s'entraîner

Montrer que si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.