DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-s04-04

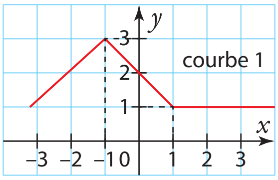
Exercices calculs et automatismes

13 Continuité en un point

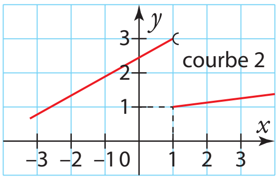
Méthode Comment reconnaître la continuité sur une courbe ?

On donne les courbes suivantes.

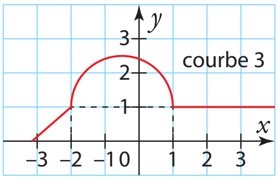
a)



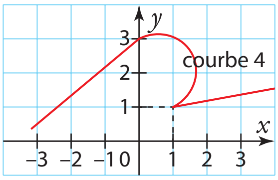
b)



c)



d)



Parmi ces courbes quelles sont celles qui représentent une fonction continue en 1 ?

14 Continuité et fonction par morceaux

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. **V** **F**

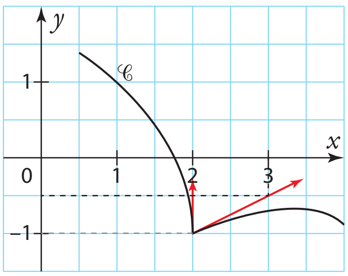
La fonction f suivante est continue sur $\mathbb{R}$. ☐ ☐

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 - 4x - 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

15 Continuité et dérivabilité

Méthode Comment reconnaître la dérivabilité sur une courbe ?

On donne la représentation suivante de la courbe de f dans l'intervalle $[1 ; 4]$.



1. La fonction f est-elle continue en 2 ?

2. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

16 Continuité et programme Python Algo

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. **V** **F**

La fonction définie en **Python** ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}$. ☐ ☐

```
def f(x):
   if x<=-1:
      return x+2
   else :
      return x**2
```

17 Continuité et suite

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

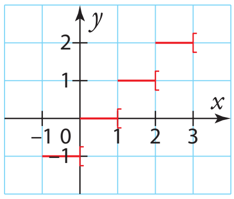
Si la suite (u_n) est convergente, sa limite ℓ vaut :

a -1 **b** 4. **c** -1 ou 4. **d** 2.

18 Théorème des valeurs intermédiaires

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s)

On donne la représentation d'une fonction f sur $\mathrm{I} = [-1 ; 3]$.



1. L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet comme nombre de solutions :

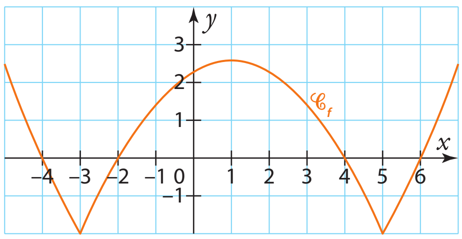
a 0. **b** 1. **c** 2. **d** plus de 2.

2. L'équation $f(x) = 1$ admet comme nombre de solutions :

a 0. **b** 1. **c** 2. **d** plus de 2.

19 Théorème de la bijection

On donne la représentation d'une fonction f sur $\mathrm{I} = [-5 ; 7]$.



1. Justifier que la fonction f est continue sur I.

2. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle :

a) $[1 ; 5]$.

b) $[-1 ; 1]$.

c) I.

Exercices d'application

Conjecturer et montrer la continuité

Méthode 1 p. 113

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x+5 & \text{si } x < -2 \\ f(x) = 1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ f(x) = -2x+5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice puis conjecturer la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer la conjecture.

21 Pour l'organisation d'une réception, un grossiste pratique les tarifs suivants.
• Pour moins de 100 ℓ de boisson consommée, le litre est facturé 0,50 €.
• De 100 ℓ à moins de 200 ℓ de boisson consommée, le litre est facturé 0,40 €.
• De 200 ℓ à 500 ℓ de boisson consommée, le litre est facturé 0,35 €.
On appelle x le nombre de litres consommés et $f(x)$ le prix payé pour x litres consommés.
1. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour $x \in [0\,;500]$.
2. La fonction f est-elle continue sur $[0\,;500]$?

22 Démo

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2-x & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = x^2+x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

23 Soit la fonction f définie sur $[-2\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x < k \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x-3} & \text{si } x \geqslant k \end{cases}$$

1. Tracer les fonctions $x \mapsto \sqrt{x+2}$ et $x \mapsto \dfrac{x-4}{x-3}$ sur une calculatrice. Conjecturer la valeur de k pour laquelle f est continue sur $[-2\,;+\infty[$.
2. Démontrer cette conjecture.

24 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

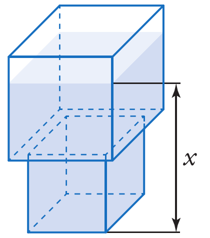
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{9}(x^2-2x-24) & \text{si } x < -3 \text{ ou } x > 5 \\ f(x) = -\dfrac{2}{7}(x^2-2x-8) & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

1. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5\,;7]$.
b) Conjecturer le domaine où la fonction f est continue.
2. Justifier que f est continue sur ce domaine.
3. Sur quel domaine la fonction f vous semble-t-elle dérivable ?

Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

Méthode 2 p. 115

25 Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent. L'arête du grand cube mesure 80 cm et celle du petit 60 cm.
On désigne par x (en cm) la hauteur du liquide dans la cuve et par V le volume en litres correspondant.



1. Expliquer pourquoi la fonction $x \mapsto V(x)$ doit être continue et non dérivable en 60.
2. a) Déterminer $V(x)$ pour $x \in [0 : 140]$.
b) Confirmer que la fonction $x \mapsto V(x)$ est bien continue et non dérivable en 60.

26 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2+3x+3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ f(x) = \dfrac{2}{x^2+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5\,;5]$.
b) Conjecturer la dérivabilité sur $\mathbb{R}$. Justifier.

27 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x+1} & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5\,;7]$.
b) Pourquoi la fonction f semble-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
3. a) Calculer les fonctions dérivées des fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{4}x^2+x+\dfrac{1}{4}$.
b) Calculer les nombres dérivés de ces deux fonctions en 1. Conclure.

28 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a) Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-4\,;4]$ et $y \in [-2\,;2]$.
b) Pourquoi la fonction semble-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?
c) Déterminer l'expression de f suivant le signe de x.
d) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
e) Calculer les nombres dérivés en 0. Conclure.

Déterminer la limite d'une suite

Méthode 3 p. 115

29 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. On admet que la suite (u_n) est minorée par 0 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

30 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + u_n^2)$. On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ.
Déterminer ℓ.

31 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = e^3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.
1. On admet que la suite (u_n) est minorée par 6 et convergente vers ℓ.
Déterminer ℓ.
2. Afficher la suite sur une calculatrice puis contrôler la valeur de ℓ trouvée.

32 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \, e^{-u_n}$.
1. On admet que la suite (u_n) est convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.
2. Tracer sur une calculatrice la fonction f telle que $f(x) = xe^{-x}$ et la droite $y = x$.
Contrôler la valeur de ℓ trouvée.

Trouver le nombre de solutions d'une équation

Méthode 4 p. 117

33 On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$.

x	0		3		$+\infty$
f	-2	↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

34 On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	0	↗	e^2	↘	$-\infty$

1. Justifier que pour tout réel $m \in]0 ; e^2[$ l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
2. Justifier que pour tout réel $m \in]e^2 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution.

35 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3.$$
dont les variations sont données par le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

36 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}4x^5 - 8x - 3.$$
1. Déterminer les variations de la fonction f.
On ne demande pas les limites en $\pm\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.
3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer un encadrement à 10^{-2} près de la solution α.

37 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4.$$
1. Résoudre l'équation $f(x) = -4$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$.
4. Existe-t-il un réel k tel que l'équation $f(x) = k$ n'admette aucune solution ?

38 Une fonction f a le tableau de variations suivant.

x	-10		-4		0		3		10
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	↘	$-\pi$	↗	2	↘	-4	↗	$+\infty$

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $I = [-10 ; 10]$.
2. Discuter, en vous justifiant, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.

39 On cherche le nombre de solutions de l'équation :
$$(E) : x^4 + 3x^3 + x^2 + 1 = 0.$$
On pose alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 1.$$
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Calculer la dérivée f' de la fonction f puis montrer que $f'(x) = x(x + 2)(4x + 1)$.
b) Calculer les limites de la fonction f en $\pm\infty$.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercices d'entraînement

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode 5 p. 118

40 Soit la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.
c) Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
2. Soit la suite $u_0 = 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

41 Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;1]$ par :

$$f(x) = 1{,}4x(1-x).$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.
c) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;0{,}5]$.
2. On définit la suite $u_0 = 0{,}1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 0{,}5.$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

42 Soit la fonction f définie sur $I =]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+1}.$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.
c) Montrer que la fonction f est croissante sur I.
2. On définit la suite $u_0 = -0{,}5$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 1$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

43 Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2u_n(1-u_n).$$

1. a) Justifier que f est continue sur I.
b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I.
c) Montrer que si $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.
d) Quelles sont les variations de f sur I ?
2. On définit la suite $u_0 = -0{,}1$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est croissante et majorée sur I.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ puis déterminer ℓ.

Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Méthode 6 p. 119

44 On considère la fonction f définie sur $I = \mathbb{R}/\{-1\,;1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}.$$

A ▸ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.
1. Étudier les variation de la fonction g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$.
3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
B ▸ 1. Calculer $f'(x)$ puis montrer que : $f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2-1)^2}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$ et en ±1.
3. En déduire le tableau de variations de f.

45 Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : **Algo**

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

A ▸ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de la fonction g. (On ne demande pas de calculer les limites en l'infini.)
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
3. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer un encadrement de α à 10^{-3}.
Donner le nombre de boucles nécessaires à cet encadrement.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
B ▸ 1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}.$$

3. Déterminer le signe de f' sur $]-1\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]-1\,;+\infty[$.

46 Soit la fonction f définie sur $I =]-2\,;+\infty[$ **Algo**

par :

$$f(x) = \frac{-x^3}{x+2}.$$

1. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}.$$

3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ puis montrer que $-1{,}5 < \alpha < 0$.
5. À l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement à 10^{-4} de α ainsi que le nombre de boucles nécessaires pour l'obtenir.

47 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

A ▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$.

1. Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.

2. Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\alpha \in [0\ ;\ 1]$ puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B ▶ 1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2. Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que $f'(x) = g(x)\,e^{-x}$.

3. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$ puis déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3} près.

5. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 5)]$. En déduire que la droite D d'équation $y = 2x - 5$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

C ▶ Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on considère les points A_n, B_n et C_n d'abscisse n, appartenant respectivement à l'axe des abscisses, la droite D et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Soit u_n le réel défini par : $u_n = \dfrac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a $u_n = \dfrac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5}$.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3. Calculer la limite de la suite (u_n).

Limite et continuité

48 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : **Démo**

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2. Démontrer cette conjecture.

49 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur une calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de f en 0 ?

2. Démontrer cette conjecture.

50 Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} & \text{si } x \neq 9 \\ f(9) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

1. Étudier la continuité en 9.

2. Contrôler ce résultat à l'aide d'une calculatrice.

51 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : **Démo**

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Montrer que la fonction f est continue en 0.

52 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme : $f(x) = \dfrac{-x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

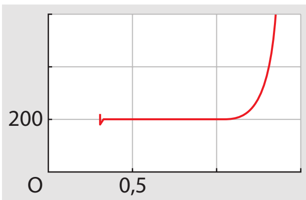
2. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b) Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue en 0 ?

53 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Voici la reproduction d'un écran d'une calculatrice représentant la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$.



1. Au vu du graphique, peut-on dire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$?

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ puis justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Comment peut-on expliquer la représentation graphique de la calculatrice ?

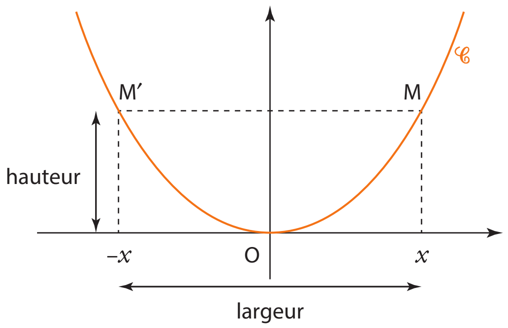
Exercices d'entraînement

Solution d'équation avec une fonction continue

54 Soit la courbe $\mathscr{C}$ d'équation :

$$y = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x} - 2).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».
On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette » délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.



On définit la « largeur » et la « hauteur » de l'arc de chaînette délimité par les points M et M′ comme indiqué sur le graphique.
Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation :

$$(E) : e^{x} + e^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{x} + e^{-x} - 4x - 2$$

et l'on admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à résoudre $(e^{x})^2 - 4e^{x} - 1 = 0$.

c) On pose $X = e^{x}$, montrer alors que l'équation $f(x) = 0$ admet pour unique solution x_1 tel que $e^{x_1} = 2 + \sqrt{5}$.

3. On donne le tableau de signes de $f'(x)$.

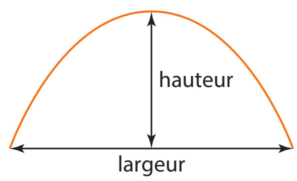
x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α strictement positive tel que $2 < \alpha < 3$.

c) À l'aide de l'algorithme de dichotomie donner un encadrement de α à 10^{-3} près.

5. La *Gateway Arch*, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure suivante.



Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.
La largeur de cet arc, exprimée en mètres, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

Donner un encadrement de la hauteur de la *Gateway Arch*.

Travailler le Grand Oral

55 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction E correspond à la fonction partie entière.

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f pour x non nul. Que peut-on conjecturer sur la continuité de la fonction f en 0 ?

2. Démontrer à l'oral devant la classe cette conjecture en calculant les limites à gauche et à droite de 0.

Coup de pouce Penser à utiliser le théorème des gendarmes.

56 Fonction et suite (1)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $$f(x)=5-\frac{4}{x+2}.$$
On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On note α la solution.
Donner la valeur exacte de α puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$ où α est le réel défini dans la question **2**.

b) La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la suite (S_n) par : $$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n.$$

a) CalculerS_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

57 Fonction et suite (2)

A ▸ Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $$g(x)=\mathrm{e}^x-x-1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g.

2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^x-x>0$.

B ▸ On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par : $$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-x}.$$
On donne ci-dessous la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal. On admet que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x)\in[0\,;1]$.

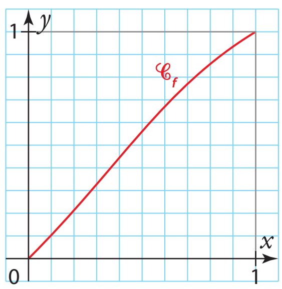
2. Soit (D) la droite d'équation $y=x$.

a) Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$: $$f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x-x}.$$

b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur $[0\,;1]$.

C ▸ Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.



2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $$\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

58 Résolution d'équation

Soit l'équation : (E) : $2x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+4=\pi\sqrt{x}$.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E) et de déterminer une approximation de chacune des solutions.

1. On pose pour tout $x>0$, $g(x)=x\sqrt{x}-1$.

a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α que l'on déterminera.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ pour $x>0$.

2. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $$f(x)=2x-3+\frac{4}{\sqrt{x}}.$$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $f(x)=\pi$ pour $x\neq 0$.

b) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).

c) Donner un encadrement à 10^{-2} de la ou les solutions de (E).

59 Fonction irrationnelle

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.
Soit la fonction f définie par : $$f(x)=\sqrt{x^3-3x+3}.$$

Affirmation 1 L'équation $x^3-3x+3=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 2 La fonction f est dérivable sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Affirmation 3 Pour tout réel m positif ou nul, l'équation $f(x)=m$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

60 Fonction auxiliaire

A ▸ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$g(x)=(x+2)\,\mathrm{e}^{x-4}-2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Montrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.

3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

6. À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

B ▸ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $$f(x)=x^2-x^2\,\mathrm{e}^x-4.$$

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x)=-x\,g(x)$
où la fonction g est celle définie à la partie **A**.
Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercices bilan

61 Portail

Une technicienne doit concevoir et réaliser un portail en bois plein, sur mesure, pour un pavillon.
L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder quatre mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure 1 ci-dessous. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.

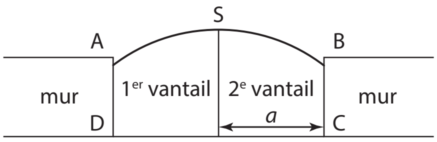


Figure 1

Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur [– 2 ; 2] par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \text{ où } b > 0.$$

Le repère de la figure 2 est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;f(-a))$, $(a\,;f(a))$, $(a\,;0)$ et $(-a\,;0)$ et on note S le sommet de la courbe de f.

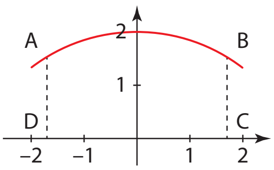


Figure 2

A ▶ 1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;2]$, $f(-x) = f(x)$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?

2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

B ▶ La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. Justifier que $b = 1$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle [0 ; 2] et en déduire une valeur approchée de a au centième.

3. On choisit $a = 1{,}8$ et $b = 1$.
Les clients décident d'automatiser le portail si la masse d'un vantail excède 60 kg.
La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à $20\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$.
Que décideront les clients?

62 Population de grenouilles

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang. Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ où t est le temps écoulé depuis 2018, en années : $P(t) = \dfrac{1\,000}{0{,}4 + 3{,}6e^{-0{,}5t}}$.

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0) = 2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.

63 Plant de maïs

Algo

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + be^{-0{,}04t}}.$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t, en jours. Les constantes a et b sont des réels positifs.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

1. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

2. On suppose que la fonction h est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation $h(t) = 1{,}5$ admet une unique solution t_0.

b) À l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

D'après Bac Pondichéry 2013

Préparer le BAC L'essentiel

Continuité des fonctions usuelles

Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir de fonctions élémentaires sont continues sur leur ensemble de définition.

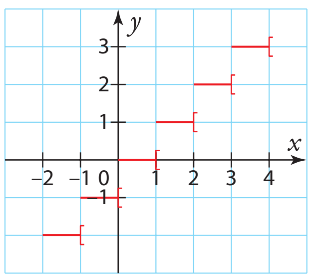
Continuité et dérivabilité

f dérivable en $a \Rightarrow f$ continue en a

f continue en $a \not\Rightarrow f$ est dérivable en a

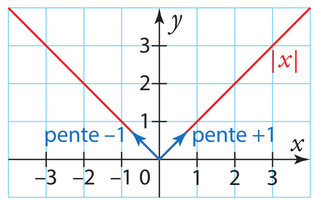
Continuité

- $E(x)$ non continue en $x \in \mathbb{Z}$



f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

- $|x|$ continue et non dérivable en 0



Continuité et suite

Soit une suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) convergente et f est continue en ℓ,
alors ℓ vérifie $f(x) = x$.

Continuité et équation

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

- **Valeurs intermédiaires**

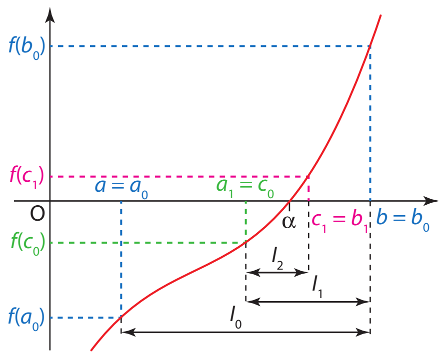
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

- **Bijection**

f est strictement monotone sur $[a\,;b]$:

pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Résolution de $f(x) = 0$ par dichotomie



Pour encadrer c, la méthode par dichotomie consiste à réduire l'intervalle $[a\,;b]$ en le divisant par 2.

Préparer le BAC **Je me teste**

Je dois être capable de...

Parcours d'exercices

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Étudier la continuité d'une fonction et la dérivabilité en un point	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 20, 21, 3, 4, 25, 26
▶ Déterminer la limite d'une suite	Méthode 3, Méthode 5	5, 6, 29, 30, 9, 10, 40, 41
▶ Trouver le nombre de solutions d'une équation	Méthode 4	7, 10, 35, 36
▶ Utiliser une fonction auxiliaire	Méthode 6	13, 14, 46, 47

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s04-05

QCM Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
64 Si une fonction f est continue au point a alors :	f est définie en a.	f est dérivable en a.	la limite en a n'existe pas.	la limite en a existe et vaut $f(a)$.
65 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x+1}$	f est continue sur $[-1\,;+\infty[$.	f est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$.	f est continue mais pas dérivable en 0.	f n'admet pas de tangente au point -1.
66 Soit la suite (u_n) décroissante et minorée définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n}{2u_n+1} \end{cases}$	La suite (u_n) converge vers 0.	La suite (u_n) converge vers $\frac{3}{2}$.	La suite (u_n) converge mais on ne peut rien dire sur sa limite.	La suite (u_n) diverge.
67 Soit f définie sur $\mathbb{R}$. $\begin{array}{cccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty \end{array}$ L'équation $f(x)=1$:	n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.	admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.	admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.	admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.
68 Soit f définie sur $\mathbb{R}$. $\begin{array}{cccccccc} x & -\infty & & 1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f & +\infty & \searrow & -1 & \nearrow & 3 & \searrow & 1 \end{array}$ L'équation $f(x)=0$:	n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.	admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.	admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.	admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.
69 Soit f définie sur $[-2\,;\,2]$ par $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$. Alors $f(x)=\dfrac{2}{3}$:	n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.	admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.	admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.	admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.
70 Une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution $x^3+2x-1=0$ est :	0,3.	0,4.	0,5.	0,6.

71 Ensemble de continuité

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+2x-1 & \text{si } x<-1 \\ f(x)=\sqrt{x+1}-2 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f.
Que peut-on conjecturer sur l'ensemble sur lequel la fonction f est continue ?
2. Démontrer cette conjecture en étudiant les cas $x\neq -1$ et $x=-1$.

Méthode 1 p. 113

72 Dérivabilité en 0

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=e^{-x} & \text{si } x\leqslant 0 \\ f(x)=x^2+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1. Montrer la continuité en 0.
2. Visualiser sur une calculatrice la fonction f et expliquer la non dérivabilité en 0.

Méthode 2 p. 115

73 Limite par récurrence

Soit la fonction f définie sur $[0\,;9]$ par :

$$f(x)=6-\frac{5}{x+1}.$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[0\,;9]$.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
2. a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant 9$.
b) On admet que la suite (u_n) est croissante, en déduire que la suite (u_n) est convergente vers ℓ.
c) Déterminer ℓ.

Méthode 3 p. 115 Méthode 5 p. 118

74 Étude de fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x-\frac{2}{x^2+1}.$$

1. Démontrer pour tout réel que $f'(x)=\dfrac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$, où $g(x)=x^3-x^2+3x+1$.
2. a) Calculer les limites de la fonction g en $\pm\infty$.
b) Déterminer les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variations.
c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha\in[-1\,,0]$.
d) À l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement à 10^{-3} près de α.
3. a) Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x puis déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
b) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Méthode 6 p. 119

75 Deux solutions

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=e^x-x-3.$$

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
b) Déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
2. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β, $(\alpha<\beta)$, sur $\mathbb{R}$.
b) Vérifier que $\beta\in[1\,;2]$ puis déterminer par balayage d'une calculatrice un encadrement de β au dixième.

Méthode 4 p. 117

76 Unique solution

Algo Démo

Le but de cet exercice est de démontrer que l'équation $(E) : e^x=\dfrac{1}{x}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et de construire une suite qui converge vers cette solution.

A ▶ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x-e^{-x}.$$

1. Démontrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x)=0$ pour $x\neq 0$.
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
b) Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
c) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ puis vérifier que $\alpha\in[\frac{1}{2}\,;1]$.
d) Quel est le signe de f sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$?

B ▶ Soit la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x)=\frac{1+x}{1+e^x}.$$

1. a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $g(x)=x$ avec $x\neq 0$.
b) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)=-\dfrac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$.
En déduire que la fonction g est croissante sur $[0\,;\alpha]$.
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$.
a) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers α.
c) À l'aide d'une fonction $u(n)$ en **Python** renvoyant la valeur de u_n, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Méthode 4 p. 117 Méthode 6 p. 119

Exercices vers le supérieur

77 Fonction définie par une relation fonctionnelle

Démo

On se propose de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Soit f une fonction remplissant ces conditions.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. a) Démontrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$f(nx) = n\,f(x).$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$f(-nx) = -n\,f(x).$$

On a donc, pour tout entier relatif k :

$$f(kx) = k\,f(x).$$

d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$f\left(\frac{1}{n} \times x\right) = \frac{1}{n} \times f(x).$$

e) Démontrer que, pour tout nombre rationnel q :

$$f(qx) = qf(x).$$

f) On pose : $f(1) = \lambda$.
Démontrer que, pour tout nombre rationnel q :

$$f(q) = \lambda q.$$

2. On admet que tout nombre réel x est la limite d'une suite de nombres rationnels.

a) Démontrer que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = \lambda x.$$

On pourra poser :
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x = \lim\limits_{n \to \infty} q_n$ où $q_n \in \mathbb{Q}$.

Coup de pouce Appliquer le théorème du point fixe.

b) Quelles sont toutes les fonctions continues f vérifiant la relation fonctionnelle ?

78 Somme et continuité

On rappelle que E désigne la fonction partie entière.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = E(x) + [x - E(x)]^n.$$

a) Visualiser les fonctions f_2, f_5 et f_{50} sur la calculatrice.

b) Tracer sur une feuille l'allure de ces fonctions.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Coup de pouce On analysera la continuité sur les réels non entiers puis sur les entiers relatifs.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = E(x) + E(1-x).$$

Déterminer l'expression de $g(x)$ en analysant les cas où x est un entier relatif et x non entier.
Visualiser la fonction g sur la calculatrice et critiquer cette représentation graphique.

3. Que peut-on dire de la somme de deux fonctions discontinues en a ?

79 Produit de fonctions et continuité

1. Soit une fonction f continue en a avec $f(a) \neq 0$ et g une fonction discontinue en a. Montrer, par l'absurde, que la fonction $f \times g$ est discontinue en a.

2. Soit une fonction f continue en a avec $f(a) = 0$ et g une fonction discontinue en a.

a) On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = E(x)$.
Montrer que la fonction $f \times g$ est continue en 0.

b) On définit les fonctions f et g sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$
Montrer que la fonction $f \times g$ est discontinue en 0.

c) Quelle condition supplémentaire faut-il ajouter à la fonction g pour que la fonction $f \times g$ soit toujours continue en a ?

3. Soit deux fonctions f et g discontinues en a.
Montrer, en prenant des exemples, que la fonction $f \times g$ peut être soit continue soit discontinue en a.

80 Discontinuité

On rappelle que si u_n est une suite convergente vers a et si f est une fonction qui admet pour limite ℓ en a alors $\lim\limits_{x \to a} f(u_n) = a$. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice. Que peut-on conjecturer sur la continuité en 0 ?

2. Montrer cette conjecture. On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 2\pi$ et $nv_n = 2\pi n + \dfrac{\pi}{3}$.

81 Valeurs intermédiaires

Démo

Soit un fonction f continue sur un intervalle $I = [a\,;b]$.
Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
On suppose que $f(a) < f(b)$.
On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant k$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \quad \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, k est compris entre a_n et b_n et $a_n \leqslant b_n$.

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

3. On pose $u_n = b_n - a_n$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme u_0.
En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. On admet alors que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent donc vers une limite commune c.
Montrer que $k = f(c)$ puis conclure.

82 Méthode de la sécante

Algo

A ▶ Le principe

Soit une fonction f continue et monotone sur un intervalle $I = [a\,;b]$.

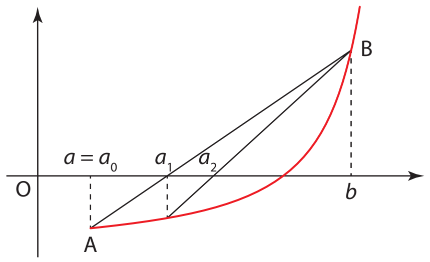
On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I.

On introduit alors la suite (a_n) telle que $a_0 = a$.

On construit les termes de la suite (a_n) de la façon suivante :

• à partir de a_0, on trace la droite (AB) (sécante à $\mathscr{C}_f$ sur I), cette droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse a_1.

• on réitère ensuite le procédé pour trouver les termes a_2, a_3, …,a_n.



1. Déterminer l'équation de la droite (AB) puis montrer que cette droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse a' tel que :

$$a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a)\,.$$

2. On introduit la suite (a_n) telle que $a_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)}f(a_n)\,.$$

On suppose dans cette question que f est croissante.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée.

b) En déduire que la suite (a_n) converge vers ℓ telle que $f(\ell) = 0$.

B ▶ Application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1.$$

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.

2. Pour trouver une valeur approchée de α, on décide d'appliquer la méthode de la sécante.

On introduit la suite (a_n) avec $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)}f(a_n).$$

a) Programmer la fonction f et une fonction secante $(a\,,b\,,p)$ en Python où a et b sont les bornes de l'intervalle I et qui donne la valeur de α avec une précision à 10^{-p} près.

b) Appliquer ce programme pour $I = [0\,;1]$ et $p = 3$.

Remarque La méthode de la sécante donne une valeur de α par défaut tandis que la méthode de Newton Raphson donne une valeur par excès. Ces deux méthodes sont donc complémentaires et donnent un encadrement de la valeur de α.

83 Relation fonctionnelle

Démo

Soit une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x, on a la relation :

$$[f(x)]^2 = 1.$$

En raisonnant par l'absurde montrer que la fonction f est constante.

Coup de pouce Penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

84 Zéros d'une famille de fonctions

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que la fonction f_n est décroissante sur $\left[0\,;\frac{2n}{n+1}\right]$.

2. Montrer que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, la fonction f_n s'annule une seule fois dans l'intervalle $\left[\frac{2n}{n+1}\,;2\right]$.

85 Nombre de solutions d'une équation

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $e^{-x^2} = e^x - 1$.

1. Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E).

2. Montrer que pour tout réel $x < 0$, on a : $e^{-x^2} > e^x - 1$.

3. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} - e^x + 1.$$

a) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) En déduire le nombre de solution de l'équation (E) sur $[0\,;+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.

86 Point fixe

Soir la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Conjecturer graphiquement le nombre de solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $f(x) = x$.

2. On pose la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

a) Calculer les limites de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Montrer que la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire le nombre de solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que la suite est convergente vers une limite ℓ.

Déterminer, à l'aide de l'algorithme de dichotomie, un encadrement à 10^{-3} près de ℓ.

Travaux pratiques

TICE — Algo — 30 min — Chercher Raisonner

1 Algorithme de dichotomie

Il s'agit de déterminer une valeur approchée de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ par une méthode de dichotomie.

1. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [0 ; 1]$.

2. On voudrait obtenir un encadrement de cette solution α. On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[0 , 1]$ en deux intervalles $\mathrm{I}_1 = \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

a) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.
b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $\mathrm{I}_3 = \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{4}\right]$ et $\mathrm{I}_4 = \left[\frac{3}{4} ; 1\right]$.
Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$. Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

3. On décide d'automatiser ce procedé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieur à 10^{-3}. On donne le programme en **Python** suivant.

```
1  def f(x):
2     return x**3+x-1
3  def dicho(a,b) :
4     n=0
5     while b-a>=10**(-3):
6        c=(a+b)/2
7        if f(a)*f(c)<0:
8           b=c
9        else:
10          a=c
11       n=n+1
12    return a,b,n
```

a) Quelles valeurs doit-on utiliser pour a et b pour exécuter la fonction dicho ?
b) Que représente la variable n ?
c) Expliquer les lignes 7, 8, 9, 10 du programme.
d) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α.
En combien d'itérations est-il obtenu ?
e) Que faut-il modifier pour avoir un encadrement à 10^{-6} ?
Donner alors cet encadrement ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

TICE Algo 50 min **Chercher Modéliser**

2 La méthode Newton Raphson


Fourier

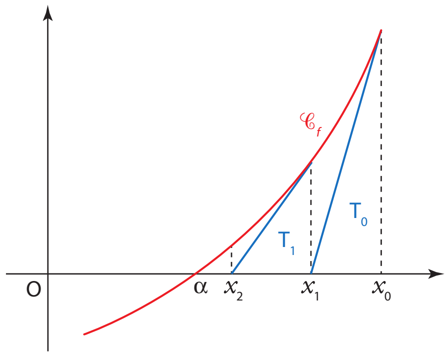
La méthode de résolution des équations numériques a été initiée par Isaac Newton vers 1669 sur des exemples numériques mais la formulation était fastidieuse. Puis, Joseph Raphson met en évidence une formule de récurrence. Plus tard, Mouraille et Lagrange étudient la convergence des approximations successives en fonction des conditions initiales par une approche géométrique. Enfin, Fourier et Cauchy s'occupent de la rapidité de la convergence.


Cauchy

A ▸ Le principe

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I. On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans I. On introduit alors la suite (x_n) telle que x_0 est une valeur proche de α. On construit les termes de la suite (x_n) de la façon suivante : à partir de x_0, on détermine un nouveau terme x_1 en traçant la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_1.

On réitère ensuite le procédé pour trouver les termes $x_2, x_3, \dots, x_n$.
Soit x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de la tangente T_n à $\mathscr{C}_f$ en x_n.



1. En considérant la pente de la tangente T_n en x_n, établir que : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que la suite (x_n) existe sur $\mathbb{N}$?

Remarque Pour que la suite (x_n) soit convergente, en pratique, il faut prendre un x_0 assez proche de la valeur α de façon à ce qu'il n'y ait pas de changement de convexité.

B ▸ Application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,,1]$.

2. Pour trouver une valeur approchée de α, on décide d'appliquer la méthode de Newton. On introduit la suite (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

a) Pourquoi ne peut-on pas prendre $x_0 = 0$?

b) On décide pour la suite du TP de prendre $x_0 = 1$. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau ci-contre pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. On donnera les valeurs à 10^{-3} près.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	1				

c) Quelle est la précision obtenue ?

3. On décide d'automatiser les calculs avec la foncion `newton(a,p)` en **Python** où `a` correspond à x_0 et `p` la précision à 10^{-p} près.

a) Compléter le programme. La fonction `fprime` correspond à la dérivée de la fonction f.

b) Rentrer ce programme dans la calculatrice. Expliquer la condition de la ligne 9.

c) Quel est le nombre d'itération pour avoir une précision de10^{-3} ? Même question pour des précisions de 10^{-6} et de10^{-12}.

d) Que peut-on dire de la précision à chaque itération ?

```
1  from math import *
2  def f(x):
3      return …
4  def fprime(x):
5      return …
6  def newton(a,p):
7      x=a
8      n=0
9      while abs(f(x))>=10**(-p):
10         x=…
11         n=…
12     return x,n
```