4

Continuité

La méthode de Newton Raphson est redoutablement efficace pour déterminer en un minimum d'étapes une approximation d'un zéro d'une fonction continue.

Comment fonctionne la méthode de Newton Raphson ?

↪ TP 2 p. 135

VIDÉO WEB

Méthode de Newton Raphson
lienmini.fr/maths-s04-01

Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s04-02

Les rendez-vous Sésamath

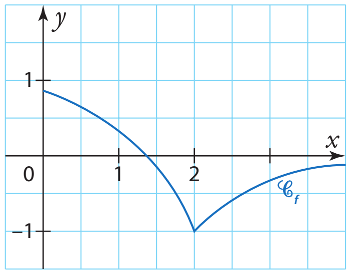
1 Calculer une limite en un point

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -1} x^2 - 3x + 5$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{5x}{2 - x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{(x-1)^2}$

2 Interpréter une courbe

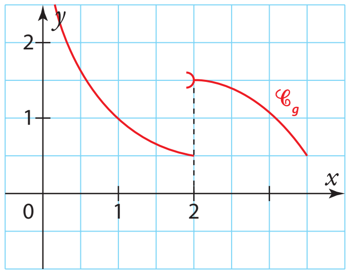
a)



Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Pourquoi ?

b)



Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$.

La fonction g admet-elle une limite en 2 ?

La fonction g est-elle dérivable en 2 ? Pourquoi ?

3 Déterminer les variations d'une fonction

Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes puis déterminer leurs variations.

a) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$ **b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + x + 1}$ **c)** $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^x$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$

4 Montrer la convergence d'une suite

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} < 3$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

2. Peut-on affirmer que :

a) $\ell = 3$? **b)** $\ell < 3$? **c)** $\ell \leqslant 3$? **d)** ℓ est quelconque ?

5 Comprendre une fonction en langage Python

Qu'affiche cet algorithme pour $f(1)$, $f(0.9)$ et $f(1.1)$?

```
def f(x):
    if x<1:
        return x+1
    elif x>1:
        return -x**2+4*x+1
    else:
        return 3
```

En déduire $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

15 min

1 Découvrir la fonction partie entière

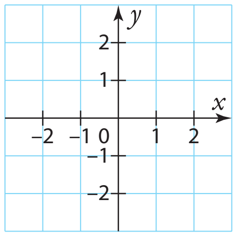
A ▶ Représentation

La fonction partie entière, notée E, associe à tout réel x le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Pour tout réel x, on détermine l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$, on a alors $E(x) = n$.

1. Déterminer $E(2,3)$, $E(4)$, $E(-1,7)$, $E(-3)$.

2. Représenter la fonction partie entière E dans l'intervalle $[-3\,;3]$ dans un repère semblable au repère ci-contre.



B ▶ Continuité

1. Déterminer la limite à droite et à gauche de la partie entière en 2. La fonction partie entière admet-elle une limite en 2 ? Pourquoi ?

2. On considère maintenant un réel a non entier. La fonction partie entière admet-elle une limite en $x = a$? Si oui que vaut cette limite ?

3. On dit qu'une fonction est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Sur quels intervalles des réels la fonction partie entière est-elle continue ? En quelles valeurs de $\mathbb{R}$ la fonction partie entière n'est-elle pas continue ?

↪ Cours 1 p. 112

15 min

2 Comprendre le lien entre continuité et dérivabilité

A ▶ Une première fonction et valeur absolue

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |2x - 3|$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x)$. La fonction f admet-elle une limite en $\frac{3}{2}$? Pourquoi ?

2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^-} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}}$ et $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}^+} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}}$.

b) La fonction f est-elle dérivable en $\frac{3}{2}$? Pourquoi ?

3. Tracer la fonction f à l'aide de la calculatrice.
Comment interpréter graphiquement les résultats obtenus pour les questions **1.** et **2.** ?

B ▶ Une seconde fonction et racine carrée

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite en 0 ? Pourquoi ?

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x}$. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Pourquoi ?

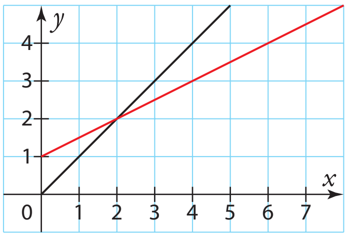
3. Tracer la fonction g à l'aide de la calculatrice.
Comment interpréter graphiquement les résultats obtenus pour les questions **1.** et **2.** ?

↪ Cours 2 p. 144

15 min

3 Utiliser les notions de limite et fonction associée

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.



1. a) Reproduire le graphique ci-contre puis placer les points d'ordonnées nulles A_0, A_1, A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

b) Que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?

2. Soit la fonction f associée à la suite (u_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Résoudre l'équation $f(x) = x$. On appelle par la suite a la solution de l'équation.

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - a$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison q et son premier terme v_0.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Montrer alors que la suite (u_n) converge et calculer sa limite ℓ.

d) Quelle relation existe-t-il entre la limite ℓ et la fonction f ?

↪ Cours 3 p. 114

15 min

4 Résoudre une équation

1. On donne les tableaux de variations de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	5	↘	-1

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	$\frac{3}{2}$	↘	-2

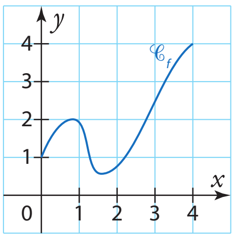
On considère les équations $(E_1) : f(x) = k$ et $(E_2) : g(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

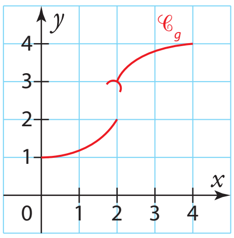
a) On prend $k = 0$. Combien de solutions possèdent les équations (E_1) et (E_2) ? Pourquoi ?

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_1).

c) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_2).

2. On donne les représentations de deux nouvelles fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$.





On considère les équations suivantes avec $k \in [1 ; 4]$:

$(E_1) : f(x) = k$;

$(E_2) : g(x) = k$.

a) La fonction g est-elle continue en $x = 2$? Pourquoi ?

Quelle est l'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par la fonction g ?

b) Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de k, des équations (E_1) et (E_2).

↪ Cours 3 p. 114

Cours

1 Définition et propriétés

Définition **Continuité**

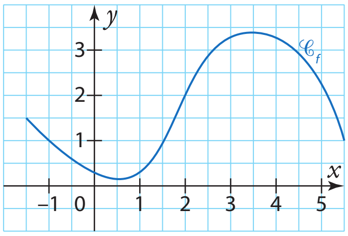
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel *a*. On dit que la fonction *f* est continue en un point *a* si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

La fonction *f* est continue sur un intervalle I si, et seulement si, *f* est continue en tout point de I.

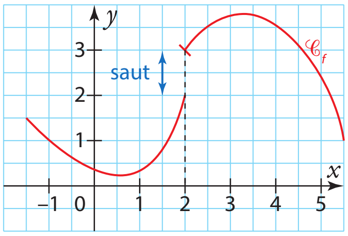
Remarques

• Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.

• On définit la continuité sur un intervalle fermé en prenant la limite à droite de la borne inférieure et la limite à gauche de la borne supérieure.



Fonction continue
sur son intervalle de définition



La fonction *f* n'a pas de limite en 2

f est discontinue en 2 donc non continue
sur son intervalle de définition

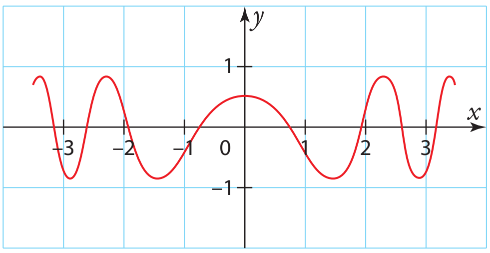
Propriétés **Continuité des fonctions usuelles**

- **Les fonctions puissance $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont continues sur $\mathbb{R}$.**
- **La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$.**
- **La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.**
- **La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.**
- **La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.**
- **Les fonctions sinus $x \mapsto \sin x$ et cosinus $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.**
- **D'une façon générale, toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition à partir des fonctions mentionnées ci-dessus sont continues sur leur ensemble de définition.**

Remarque Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemple

La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin[\cos(x^2 + 1)]$ est continue par somme et composition de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.



Exercices résolus

Méthode 1 Conjecturer et montrer la continuité d'une fonction

Énoncé

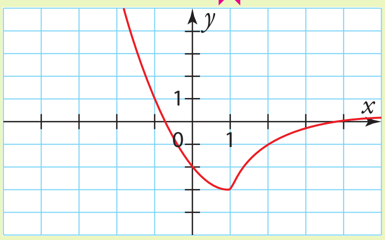
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{x-4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. **Tracer sur la calculatrice la fonction f.**
Que peut-on conjecturer sur la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$?

2. **Démontrer cette conjecture en étudiant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.**

Solution

1. On obtient la courbe suivante. 1



D'après la représentation de la fonction f on peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. 2

2. 3 • La fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 2$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $]-\infty\,;1[$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x-4}{x}$ est une fonction rationnnelle donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et donc sur $]1\,;+\infty[$.

• Analysons la continuité en 1 : 4

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2 - 2x - 2 = -3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-4}{x} = -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -3$$

or $f(1) = -3$ 5, on a donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. La fonction f est continue en 1.

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Conseils & Méthodes

1 Comme les variations de la fonction f sont inconnues, prendre une fenêtre par défaut.

2 La courbe n'a pas de saut donc elle est continue.

3 Analyse de la continuité pour $x \neq 1$. Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition.

4 Analyse de la continuité en 1. La fonction f a un changement de forme en 1, on calcule la limite à gauche et la limite à droite de 1 et on les compare à $f(1)$.

5 Pour calculer $f(1)$, on prend la première forme.

À vous de jouer !

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = -x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f.
Que peut-on conjecturer sur l'ensemble sur lequel la fonction f est continue ?

2. Démontrer cette conjecture en étudiant les cas $x \neq 1$ et $x = 1$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = -x^2 + 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f.
Que peut-on conjecturer sur l'ensemble sur lequel la fonction f est continue ?

2. Démontrer cette conjecture en étudiant les cas $x \neq 0$ et $x = 0$.

→ Exercices 20 à 24 p. 122

Cours

2 Continuité et dérivabilité

Théorème **Continuité et dérivabilité**

Si une fonction *f* est dérivable en un point *a* alors *f* est continue en *a*.
Si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle I alors *f* est continue sur I.

Démonstration

Montrons que la dérivabilité en a entraîne la continuité en a.

Pour $x \neq 0$, posons $t(x)$ le taux d'accroissement de la fonction f en a : $t(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

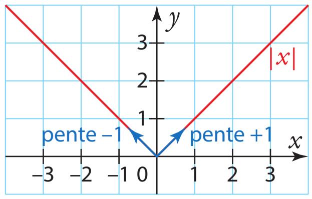
Par produit en croix : $(x - a)t(x) = f(x) - f(a) \Rightarrow f(x) = (x - a)t(x) + f(a)$.

La fonction f est dérivable en a : $\lim\limits_{x \to a} t(x) = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} (x - a) = 0$

donc par produit : $\lim\limits_{x \to a} (x - a)t(x) = 0$ et par somme : $\lim\limits_{x \to a} (x - a)t(x) + f(a) = f(a)$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction f est continue en a.

Remarque La réciproque de ce théorème est fausse. Une fonction peut être continue en a mais pas dérivable en a.
Prenons par exemple la fonction valeur absolue en 0.



- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} -1 = -1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} + \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0,

- or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = \lim\limits_{x \to 0^+} x \leqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} |x| = 0 = |0|.$

La fonction valeur absolue est continue en 0.
Une fonction continue mais pas dérivable en a est caractérisée par une courbe qui admet un point anguleux.

3 Continuité et suite

Théorème **Point fixe**

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée *f* est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

- La suite (u_n) est convergente vers ℓ. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
- De plus, la fonction f est continue en ℓ. Donc $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = f(\ell)$.
- Par composition, on en déduit que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.
- Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on en déduit alors que $f(\ell) = \ell$.

Remarques

- La condition de continuité de f en ℓ est indispensable. Comme ℓ n'est « a priori » pas connue, on prendra en pratique l'ensemble sur lequel la fonction f est continue.
- Si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on choisira celle qui correspondra aux caractéristiques de la suite.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$.

1. Pourquoi la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. a) Sur une calculatrice tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans la fenêtre $x \in [-5\,;3]$ et $y \in [-0{,}5\,;3{,}5]$.

b) D'après la courbe $\mathscr{C}_f$, la fonction f est-elle dérivable en -3 et en 1 ? Conclure.

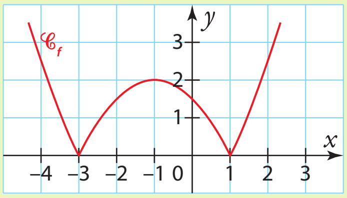
Conseils & Méthodes

1 La courbe de f admet deux points anguleux en -3 et 1 et donc n'admet pas de tangente en ces points.

Solution

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ par composition d'une fonction polynôme et d'une valeur absolue.

2. a) On obtient la courbe ci-contre.



b) La fonction f n'est pas dérivable en -3 ni en 1 car en ces points la courbe n'admet pas de tangente. 1

Une fonction peut être continue et non dérivable.

À vous de jouer !

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. Montrer la continuité en 0.

2. Visualiser sur une calculatrice la fonction f et expliquer la dérivabilité en 0.

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1. Montrer la continuité en 1.

2. Visualiser sur une calculatrice la fonction f et expliquer la non dérivabilité en 1.

↪ Exercices 25 à 28 p. 122

Méthode 3 Déterminer la limite d'une suite croissante et convergente

Énoncé

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n\,(1 - u_n)$. On admet que la suite (u_n) est croissante et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

Conseils & Méthodes

1 Lorsque l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on garde celle qui correspond aux caractéristiques de la suite.

Solution

La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = 2x(1 - x)$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $2x(1 - x) = x \Leftrightarrow 2x - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(1 - 2x) = 0$.

Cette équation admet deux solutions $x = 0$ ou $x = 0{,}5$. Comme la suite est croissante et $u_0 = 0{,}1$ alors $\ell \geqslant 0{,}1$.

La solution qui convient est alors $\ell = 0{,}5$. 1

À vous de jouer !

5 Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 6$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$.

On admet que la suite (u_n) est décroissante et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

6 Soit la suite (u_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$.

On admet que la suite (u_n) est minorée par 1 et convergente vers ℓ. Déterminer ℓ.

↪ Exercices 29 à 33 p. 123

Cours

4 Continuité et équation

Théorème Valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

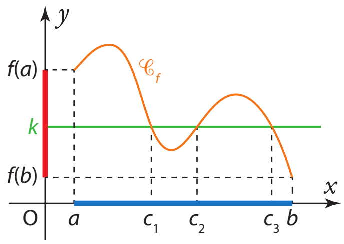
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Démonstration

L'idée de la démonstration est d'encadrer k dans des intervalles d'amplitude de plus en plus petite par un procédé de dichotomie, et de montrer l'existence de c par la continuité de la fonction f par passage à la limite. ↪ **Exercice 81** p. 132

Remarques

- Ce théorème s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires car le réel k est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.
- L'existence d'une solution c peut s'expliquer par l'absence de « saut » de la courbe $\mathscr{C}_f$. Ainsi l'**image de l'intervalle** $[a\,;b]$ par une fonction continue est un **intervalle** qui contient nécessairement k.
- L'existence de c ne veut pas dire qu'il n'existe qu'une seule solution à l'équation $f(x)=k$. Sur le graphe ci-contre, il existe trois solutions, notées c_1, c_2 et c_3.



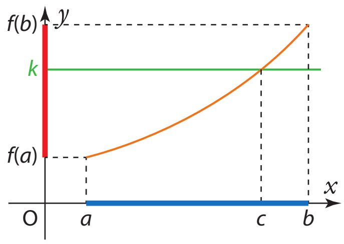
Théorème Bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Démonstration

L'existence d'une solution est montrée par le théorème des valeurs intermédiaires. On montre l'unicité par l'absurde : supposons que l'équation $f(x)=k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2, avec $c_1<c_2$, la stricte monotonie de la fonction f entraîne pour f croissante $f(c_1)<f(c_2)$, ou pour f décroissante $f(c_1)>f(c_2)$, ce qui est contradictoire avec $f(c_1)=f(c_2)=k$.



Remarques

- On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert $\mathrm{I}=]a\,;b[$ où a et b peuvent être réels, ou $\pm\infty$, k doit alors être compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.
- Lorsque $k=0$, il suffira de montrer que la fonction f change de signe sur I.
- Le terme « bijection » signifie qu'une image par la fonction f n'admet qu'un et un seul antécédent.
- Un tableau de variations suffit pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction. Les flèches « montantes » ou « descendantes » indiquent la continuité et la monotonie qui doivent être listées comme hypothèses dans la rédaction de la démonstration.

Exemple

L'équation $x^3=20$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;+\infty[$ car la fonction cube $x\mapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et 20 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 4 Trouver le nombre de solutions d'une équation

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $[-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2\,;+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2\,;+\infty[$.

Donner un encadrement au dixième près de α.

Solution

1. Étudions les variations de la fonction f sur $[-2\,;+\infty[$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme.

On calcule $f(0) = 3$, $f(2) = -1$ et $f(-2) = -17$.

x	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-17	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'existence de solutions on utilise le théorème des valeurs intermédiaires, la monotonie de la fonction f n'est pas une hypothèse.

2 Lorsqu'une équation n'a pas de solution, une simple majoration est suffisante pour conclure.

3 Pour connaître le nombre de solutions, on utilise le théorème de la bijection, l'étude des variations de la fonction f est indispensable.

2. a) La fonction f est continue sur $[-2\,;+\infty[$ car dérivable. **1**

1 est compris entre $f(-2) = -17$ et $f(0) = 3$ entre $f(0) = 3$ et $f(2) = -1$, et entre $f(2) = -1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans $[-2\,;+\infty[$.

b) Sur l'intervalle $[-2\,;2[$, $f(x)$ est majorée par 3 donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution. **2**

Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement monotone. 5 est compris entre $f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[2\,;+\infty[$. **3**

Conclusion : l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

Par le balayage d'une calculatrice avec un pas de 0,1, on trouve $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$.

X	Y1
3	3
3.1	3.961
3.2	5.048
3.3	6.267

À vous de jouer !

7 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

b) Contrôler en traçant la fonction f sur une calculatrice la véracité des résultats.

8 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β, $(\alpha < \beta)$ et que $\alpha \in [0\,;1]$.

b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

↪ Exercices 33 à 39 p. 123

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s04-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 5 Déterminer la limite d'une suite

Cours 3 p. 114

Algo

Énoncé

On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n + 1}$.

1. a) Écrire une fonction $u(n)$ en Python renvoyant la valeur de u_n puis compléter le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près.

n	5	10	50	100	1 000
$u(n)$					

b) Conjecturer la convergence de la suite (u_n).

2. On admet que l'on peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante et positive.
a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite ℓ.

Solution

1. a) On peut proposer le programme suivant.

```
def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=3-4/(u+1)
    return u
```

1

On obtient le tableau suivant.

n	5	10	50	100	1 000
$u(n)$	1,353	1,188	1,039	1,020	1,002

b) La suite semble converger vers 1.

2. a) La fonction f est définie par $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+1}$.

La fonction f est rationnelle donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et donc continue sur $\mathbb{R}_+$. 2

b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation

$$f(x) = x \Leftrightarrow 3 - \frac{4}{x+1} = x \xLeftrightarrow{\times(x+1)} 3(x+1) - 4 = x(x+1) \Leftrightarrow 3x + 3 - 4 = x^2 + x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1$. La suite (u_n) converge donc vers 1.

Conseils & Méthodes

1 L'ensemble des entiers `range(1,n+1)`, sont les entiers de 1 à n. On peut aussi utiliser `range(n)`.

2 Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

À vous de jouer !

9 On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$. Algo

1. Écrire une fonction $u(n)$ en **Python** renvoyant la valeur de u_n puis conjecturer avec un tableau de valeurs la convergence de la suite (u_n).

2. On admet que l'on peut montrer que la suite (u_n) est croissante de termes inférieurs à 3.
a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis montrer que f est continue sur [1 ; 3].
b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite ℓ.

10 On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$. Algo

1. Écrire une fonction $u(n)$ en **Python** renvoyant la valeur de u_n puis conjecturer avec un tableau de valeurs la convergence de la suite (u_n).

2. On admet que l'on peut montrer que la suite (u_n) est décroissante de termes supérieurs à 1.
a) Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ puis montrer que f est continue sur [1 ; 3].
b) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite ℓ.

Exercices 40 à 43 p. 124

Méthode 6 Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

↪ Cours 4 p. 116

Énoncé

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I : $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \square\, g(x)$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution

1. $f'(x) = \dfrac{10(e^x+1) - 10xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{10(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \square\, g(x)$

Avec $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

2. a) • On étudie les variations de g et sa limite en $+\infty$. 1

$g'(x) = e^x - (1e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

Pour $x \geqslant 0$, $-xe^x \leqslant 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$. La fonction g est décroissante sur I.

• Limite en $+\infty$: on a $g(x) = e^x(1-x) + 1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty\end{array}\right\}$ par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x) = -\infty$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. On calcule $g(0) = 2$. 2

Sur I la fonction g est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et change de signe car $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) Par le balayage d'une calculatrice, on trouve : $g(1{,}27) \approx 0{,}039$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$. 3 On en déduit que $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

c) Comme la fonction g est décroissante sur I, si $x < \alpha$, $g(x) > 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) < 0$.

3. Comme, $\dfrac{10}{e^x+1} > 0$ pour tout x de I, le signe de $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ est du signe de $g(x)$, on obtient le tableau de variations ci-contre.

Conseils & Méthodes

1 L'unicité de la solution est obtenue par le théorème de la bijection. Il est nécessaire de connaître les variations de la fonction f.

2 Le changement de signe de la fonction g sur I est alors établi.

3 On programme de tableau de valeurs avec comme valeur initiale 0 et un pas de 0,01.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
g	2	↘	0	↘	$-\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

À vous de jouer !

11 Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 12x - 5.$$

1. Démontrer que pour tout réel que : $f'(x) = 12g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

12 Soit la fonction f définie et dérivable sur $I =]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}.$$

1. Démontrer que pour tout réel x de I : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$ et donner un encadrement de α à 10^{-2}.

b) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I.

↪ Exercices 44 à 47 p. 124

Exercices apprendre à démontrer

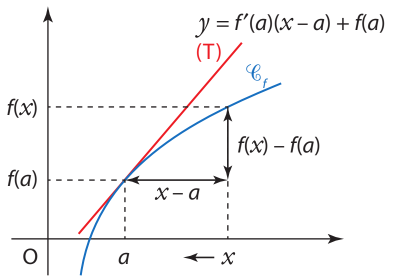
La propriété à démontrer

Si une fonction *f* est dérivable en un point *a* alors *f* est continue en *a*.

▶ Démontrer ce théorème en revenant à la définition du nombre dérivé de la fonction *f* en *a*.

Comprendre avant de rédiger

- Si la fonction *f* est dérivable en *a* alors sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse *a* et donc la courbe ne peut avoir un « saut » au point d'abscisse *a*.
- Une fonction *f* est dérivable en *a* si, et seulement si la limite du taux d'accroissement en *a* admet une limite finie : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.
- Une fonction *f* est continue en *a* si, et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.



Rédiger

Étape 1
Le taux d'accroissement est défini pour $x \neq a$.

Étape 2
On isole *f*(*x*) à l'aide d un produit en croix.

Étape 3
Comme la fonction *f* est dérivable en *a* alors la limite du taux d'accroissement est finie et vaut $f'(a)$.

Étape 4
On a bien la définition de la continuité en *a*.

La démonstration rédigée

Soit $t(x)$ le taux d'accroissement de la fonction *f* en *a*, on a : $t(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

On a alors :

$f(x) - f(a) = (x - a)\,t(x)$

$\Leftrightarrow \quad f(x) = (x - a)\,t(x) + f(a)$.

$\lim\limits_{x\to a} t(x) = f'(a)$ donc par produit :

$\lim\limits_{x\to a} (x-a)t(x) = 0 \square f'(a) = 0$

et par somme :

$\lim\limits_{x\to a} (x-a)t(x) + f(a) = 0 + f(a) = f(a)$

donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(a)$.

La fonction *f* est alors continue en *a*.

Pour s'entraîner

On donne la fonction *f* définie sur ℝ par : $\begin{cases} f(x) = x-1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Montrer que la fonction *f* est continue mais pas dérivable en 1.