# Exercices calculs et automatismes

## 15 Valeurs remarquables (1)

Donner les valeurs exactes de :

**a)** $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ; $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ; $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

**b)** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ; $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ; $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ; $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

## 16 Valeurs remarquables (2)

Donner les valeurs exactes de :

**a)** $\cos\left(\frac{25\pi}{6}\right)$ ; $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ ; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$ ; $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

**b)** $\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$ ; $\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)$ ; $\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ ; $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

## 17 Dériver des fonctions (1)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

**a)** $\cos(x) + 2$
**b)** $\cos(x) + 3x + 5$
**c)** $2\sin(x)$
**d)** $3\sin(x) + 8x - 1$
**e)** $5\cos(x) - 5\sin(x) + 7x - 11$
**f)** $6\sin(x) - 7\cos(x) + 5x + 4$

## 18 Déterminer la parité ou non d'une fonction

Calculer $f(-x)$ dans chacun des cas suivants et préciser si la fonction est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

**a)** $f(x) = 2\cos(x) + 13$
**b)** $f(x) = \sin(x) - x$
**c)** $f(x) = 2\sin(x) - \cos(x)$
**d)** $f(x) = x^2 + 3\cos(x)$
**e)** $f(x) = x^3 + 5\sin(x)$

## 19 Vrai ou faux ?

**Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?**

**a)** La fonction cosinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**b)** La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**c)** La fonction sinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.

**d)** La fonction cosinus est croissante sur $[-\pi\,;\pi]$.

## 20 Périodiques ?

Déterminer si les fonctions suivantes sont périodiques. Si oui, préciser leur période.

**a)** $f(x) = \sin(x) + 3\cos(x)$ **b)** $f(x) = \sin(2x)$
**c)** $f(x) = \cos^2(x)$ **d)** $f(x) = \sin(x) + \cos(2x)$
**e)** $f(x) = e^{\sin(x)}$ **f)** $f(x) = \cos(x) + x$

## 21 Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ les équations suivantes.

**a)** $\cos(x) = -1$ **b)** $\sin(x) = 0$

**c)** $\cos(x) = \frac{1}{2}$ **d)** $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**e)** $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f)** $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 22 Résoudre une inéquation trigonométrique

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ les inéquations suivantes.

**a)** $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ **b)** $\sin(x) > 0$

**c)** $\sin(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$

## 23 Dériver des fonctions (2)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.

**a)** $f(x) = 4\cos(3x)$
**b)** $f(x) = 6\sin(5x)$
**c)** $f(x) = \sin^2(x)$
**d)** $f(x) = \cos^2(x)$
**e)** $f(x) = 5\sin(x) + \sin(5x)$
**f)** $f(x) = \cos\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$

## 24 QCM

**Pour les questions suivantes, choisir la bonne réponse.**

**1.** Pour tout réel $a \in [-1\,;1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle :

**a** $[-\pi\,;\pi]$ **b** $[-2\pi\,;2\pi]$ **c** $[0\,;\pi]$

**2.** Pour tout réel $a \in [-1\,;1]$, l'équation $\sin(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle :

**a** $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ **b** $[-\pi\,;\pi]$ **c** $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{2}\right]$

## 25 Déterminer les variations d'une fonction

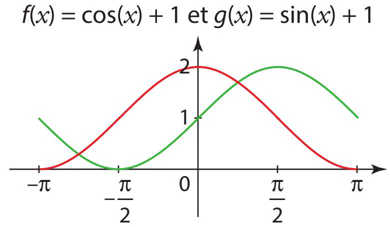
La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$ ?

**a)** $f(x) = x + \cos(x)$ **b)** $f(x) = 0{,}5x + \sin(x)$

## 26 Lecture graphique

En vous aidant du graphique ci-dessous, associer chaque fonction à sa courbe représentative.

$f(x) = \cos(x) + 1$ et $g(x) = \sin(x) + 1$



# Exercices d'application

## Image d'un nombre par une fonction trigonométrique

**27** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(x) - 4.$$

Calculer l'image des nombres $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ par $f$.

**28** Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $g(x)=\sin(x)-\dfrac{3}{\cos(x)}$.

**1.** Déterminer les images de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\pi$ par $f$.

**2.** Déterminer les images de $\pi$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{3\pi}{4}$ par $g$.

**29** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos^2(x)-\frac{1}{3}\sin(x).$$

Déterminer les images de $\pi$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{4}$ par $f$.

## Périodicité et parité

**30** **1.** Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{2+\cos(x)}.$$

**a)** Démontrer que $f$ est $2\pi$-périodique.
**b)** Démontrer que $f$ est une fonction paire.
**2.** Reprendre les questions précédentes avec la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + 5\cos^2(x)$.

**31** Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin(x)\cos(x)$$

$$g(x)=\sin(x)+\frac{3}{2+\sin(x)}.$$

**1.** Démontrer que $f$ et $g$ sont $2\pi$-périodiques.
**2.** Étudier la parité des fonctions $f$ et $g$.

**32** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x).$$

**1.** Déterminer si $f$ est une fonction $2\pi$-périodique.
**2.** Étudier la parité de la fonction $f$.

**33** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

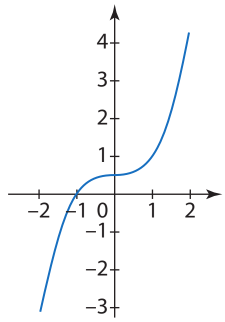
$$f(x)=7\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

**1.** Déterminer si $f$ est une fonction périodique.
Si oui, déterminer sa période.
**2.** Étudier la parité de la fonction $f$.

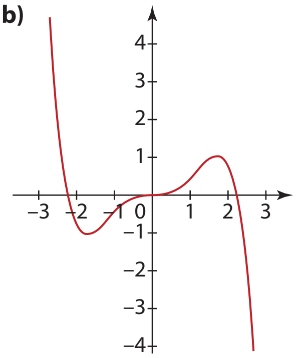
## Représentation graphique

**34** Voici la représentation graphique de quelques fonctions. Déterminer pour chacune d'elle si elle est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

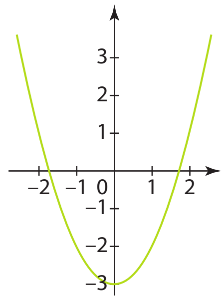
**a)**



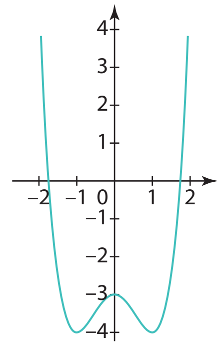
**b)**



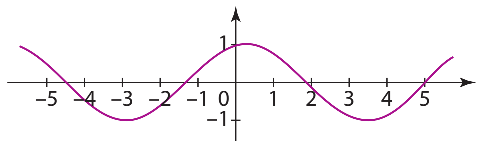
**c)**



**d)**

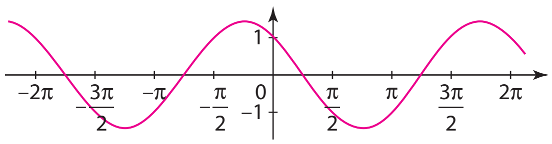


**e)**

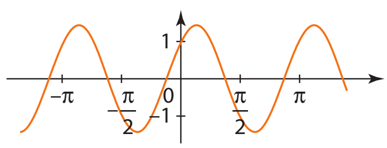


**35** Voici la représentation graphique de quelques fonctions. Déterminer pour chacune d'elle si elle est périodique. Si oui, donner sa période.

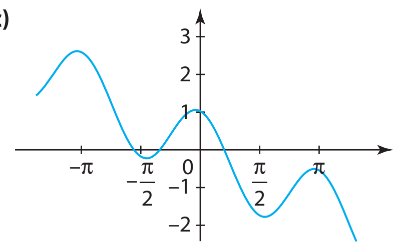
**a)**



**b)**



**c)**



**36** Tracer, en s'aidant de la calculatrice, la courbe de la fonction $f$ définie par $f(x) = 2\cos(x) - 1$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

**37** Tracer, en s'aidant de la calculatrice, la courbe de la fonction $f$ définie par $f(x) = \sin(x) + 2$ sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

## Tableau de variations

**38** Tracer le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, puis sur $[0 ; 2\pi]$.

**39** Tracer le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, puis sur $[0 ; 2\pi]$.

## Dérivation

Méthode 1 et Méthode 2 p. 85

**Dans les exercices 40 à 43, déterminer la dérivée des fonctions proposées sur l'intervalle I.**

**40** **a)** $f(x) = 3\sin(x) + x^2\cos(x)$ — $I = \mathbb{R}$
**b)** $f(x) = 2\cos(x) + x$ — $I = \mathbb{R}$
**c)** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ — $I = ]0 ; \pi[$
**d)** $f(x) = 5x^2\sin(x) + x\cos(x)$ — $I = \mathbb{R}$

**41** **a)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ — $I = \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$
**b)** $f(x) = 5x\sin(x)$ — $I = \mathbb{R}$
**c)** $f(x) = \sqrt{4 + \sin(x)}$ — $I = \mathbb{R}$
**d)** $f(x) = (\cos(x))^4$ — $I = \mathbb{R}$

**42** **a)** $f(x) = -3\cos(3x)$ — $I = \mathbb{R}$
**b)** $f(x) = \sin(x^2 + x)$ — $I = \mathbb{R}$
**c)** $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{2 + x^3}\right)$ — $I = \mathbb{R}$
**d)** $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}$ — $I = \mathbb{R}$
**e)** $f(x) = -\sin\left(-3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ — $I = \mathbb{R}$
**f)** $f(x) = \sin(2x) - 3\cos(x)$ — $I = \mathbb{R}$

**43** **a)** $f(x) = \cos(\sqrt{1 + x^2})$ — $I = \mathbb{R}$
**b)** $f(x) = \sin\left(-5x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ — $I = \mathbb{R}$
**c)** $\dfrac{\cos(2x) - x}{\sin(2x) + x}$ — $I = [3 ; +\infty[$
**d)** $f(x) = e^{\cos(x)}$ — $I = \mathbb{R}$

## Résolution d'équation

Méthode 3 p. 87

**44** Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$.

**a)** $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
**b)** $\sin(6x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
**c)** $\sqrt{2}\cos(x - \pi) = 1$
**d)** $\sqrt{2}\sin(2x) + 3 = 4$

**45** Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

**a)** $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$
**b)** $2\cos(x + \pi) + \sqrt{3} = 0$
**c)** $2\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$
**d)** $-2\cos(3x - \pi) - \sqrt{2} = 0$

**46** Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

**a)** $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$
**b)** $4\cos(5x - \pi) + 2 = 0$
**c)** $2\cos(3x - \pi) - \sqrt{2} = 0$
**d)** $\cos(x - \pi) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

## Résolution d'inéquation

Méthode 3 p. 87

**47** Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I.

**a)** $\sin(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ — $I = [0 ; \pi[$
**b)** $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqslant \dfrac{-1}{2}$ — $I = [0 ; 2\pi[$
**c)** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ — $I = [0 ; 2\pi[$
**d)** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > \dfrac{1}{2}$ — $I = [0 ; 2\pi[$

**48** Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I.
**a)** $\sin(x + \pi) < 0$ — $I = [0 ; 2\pi[$
**b)** $1 + 2\cos(x) > 0$ — $I = ]-\pi ; \pi]$
**c)** $\sqrt{3} - 2\sin(x) < 0$ — $I = ]-\pi ; \pi]$
**d)** $\sqrt{2} - 2\cos(x) \geqslant 0$ — $I = [0 ; 2\pi[$

**49** Résoudre les inéquations suivantes sur l'intervalle I.
**a)** $(\sqrt{2}\sin(x) - 1)(\sqrt{2}\sin(x) + 1) \leqslant 0$ — $I = ]-\pi ; \pi]$
**b)** $(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1) > 0$ — $I = ]-\pi ; \pi]$
**c)** $4\cos^2(x) - 3 \geqslant 0$ — $I = [0 ; 2\pi[$
**d)** $2\cos^2\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 < 0$ — $I = [0 ; 2\pi[$

# Exercices d'entraînement

## Étude d'une fonction trigonométrique

Méthode 4 p. 88

**50** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) + \cos^2(x)$$

et $\Gamma$ sa courbe représentative.

**1.** Montrer que la fonction $f$ est $2\pi$-périodique.

**2.** Montrer que la fonction $f$ est paire.

**3.** Montrer que $\Gamma$ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $0$ ; $\frac{2\pi}{3}$ ; $\pi$ et $\frac{4\pi}{3}$.

**4.** Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

**5.** Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | | | | |

**6.** Tracer $\Gamma$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

**51** Soit $f$ la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(x) = (1 - \sin(x))\cos(x).$$

**1. a)** Calculer $f'(x)$.

**b)** Montrer que $f'(x) = (2\sin(x) + 1)(\sin(x) - 1)$.

**2. a)** Déterminer le signe de $2\sin(x) + 1$, puis celui de $(\sin(x) - 1)$ sur $[0 ; \pi]$.

**b)** En déduire le sens de variation de $f$.

**52** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{\sin(x)+3}$.

**1.** Justifier que $f$ est définie pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

**2.** Calculer $f'(x)$.

**3.** En déduire les variations de $f$ sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

**53** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin^2(x)$ et $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

**1.** Montrer que, pour tout réel $x$, on a :

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + 1 \text{ et } f(x+\pi) = f(x) + \pi.$$

**2.** En s'aidant de la question précédente, déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**3.** Calculer $f'(x)$.

**4.** Déterminer le tableau de variations de $f$ sur $[0 ; \pi]$. (*Indication* : pour tout nombre $a$, $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.)

**5.** En s'aidant du résultat de la question **1.**, déterminer comment tracer $\Gamma$ à partir de la représentation de $f$ sur $[0 ; \pi]$.

**6.** Tracer $\Gamma$ sur $[0 ; \pi]$, puis sur $[0 ; 2\pi]$.

**54** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \sin(x)$$

et $\Gamma$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

**1.** Montrer que, pour tout réel $x$, on a :

$$x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x + 1.$$

**2.** Déterminer les tangentes horizontales à $\Gamma$.

**3.** Déterminer l'équation des tangentes à $\Gamma$ aux points d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ puis $-\frac{\pi}{2}$. Que peut-on en déduire sur la courbe $\Gamma$ ?

**4.** Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice en traçant $\Gamma$ et les droites d'équation $y = x - 1$ et $y = x + 1$.

**55** On considère, dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ direct, les points $I(0 ; 1)$ et $M(\cos(x) ; \sin(x))$ où $x$ est un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

**1.** Déterminer la nature du triangle OIM. On note $p(x)$ son périmètre.

**2.** Montrer que $p(x) = 2 + \sqrt{2(1-\cos(x))}$.

**3.** Étudier les variations de $p$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

**4.** En déduire la valeur exacte du périmètre maximal du triangle OIM.

**5.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $p(x) = 3$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**56** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

**1.** Vérifier que la fonction $f$ est impaire.

**2.** Montrer que la fonction $f$ est périodique et préciser sa période.

**3. a)** Calculer $f(\pi - x)$, puis $f(\pi + x)$.

**b)** Que peut-on en déduire concernant la courbe $\mathscr{C}$ ?

**4.** Déterminer le sens de variation de $f$ sur $[0 ; \pi]$.

**5.** Tracer $\mathscr{C}$ sur $[0 ; \pi]$, puis sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

**57** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\cos(x)+1}{2+\cos(x)}.$$

**1.** Montrer que la fonction $f$ est $2\pi$-périodique.

**2.** Montrer que la fonction $f$ est paire.

**3.** En déduire que l'on peut étudier $f$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

**4.** Déterminer le tableau de variations de $f$ sur $[0 ; \pi]$.

**5.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution $\alpha$ sur $[0 ; \pi]$ et donner une valeur approchée de $\alpha$ au millième près.

**58** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

**1.** Déterminer si la fonction $f$ est périodique. Si oui, préciser la période $T$ de $x$.

**2.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 3$.

**3.** Calculer $f'(x)$.

**4.** Déterminer les variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}\right]$.

**5.** En déduire que la fonction $f$ admet un minimum sur $\left[-\frac{\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}\right]$ et déterminer sa valeur.

**6.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{8}$.

**59** Sachant que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Démo

**60** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : Algo

$$f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}.$$

**1.** Montrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

**2.** On admet que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ :

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x).$$

Démontrer que la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

**3. a)** Montrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$.

**b)** En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**c)** Écrire un algorithme permettant de déterminer un réel $x_0$ tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 10^{-6}$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

## Résolution d'équations et d'inéquations

Méthode 8 p. 89

**61** Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

**a)** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

**b)** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** $\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

**d)** $2\cos(2x) = 1$

**62** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

**a)** $4\cos^2(x) - 6\cos(x) + 2 = 0$

**b)** $4\cos^2(x) - 6\cos(x) + 2 \geqslant 0$

**63** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

**a)** $6\sin^2(x) + 9\sin(x) + 3 = 0$

**b)** $6\sin^2(x) + 9\sin(x) + 3 \leqslant 0$

**c)** $2\sin^2(x) + \sin(x) + 2 = 0$

**64** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

**a)** $4\cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{3})\cos(x) - \sqrt{3} = 0$

**b)** $4\cos^2(x) + (2 - 2\sqrt{3})\cos(x) - \sqrt{3} \geqslant 0$

**65** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

**a)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**b)** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

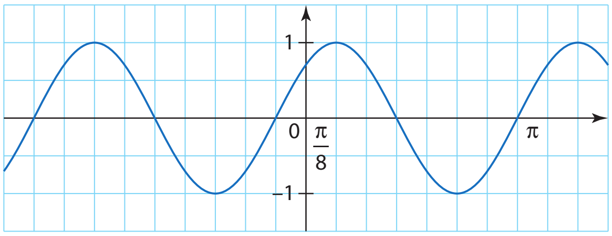
**c)** $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos(x)$

**66** Choisir la bonne réponse.

**1.** La solution de l'équation $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est :

**a** $\frac{5\pi}{6}$ **b** $\frac{5\pi}{2}$ **c** $\frac{\pi}{6}$ **d** $-\frac{\pi}{2}$

Pour les questions **2.** et **3.**, on considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. Une partie de la courbe représentative de la fonction $f$ est tracée ci-dessous.




**2.** L'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ :

**a** aucune solution **b** une solution

**c** deux solutions **d** on ne peut pas savoir

**3.** L'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $\left]-\frac{5\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{8}\right[$ :

**a** aucune solution **b** une solution

**c** deux solutions **d** trois solutions

**4.** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

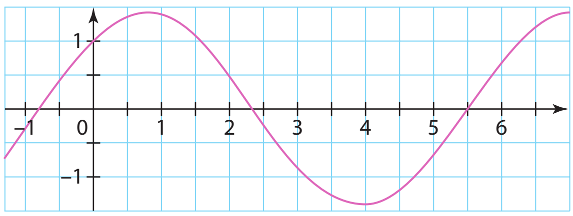
La valeur de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est :

**a** 3 **b** $-\frac{1}{4}$ **c** $\frac{11}{4}$ **d** $-3$

**67** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Une partie de la représentation graphique de cette fonction est donnée ci-dessous.




**1.** Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

**a)** Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1{,}5$ sur $[0\,;2\pi]$ ?

**b)** Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 1$ sur $[0\,;2\pi]$ ?

**c)** Combien de solutions possède l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$ ?

**d)** Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$ ?

**2.** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

**68** Préciser pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse en justifiant.

**a)** On considère l'égalité suivante : pour tout nombre réel $x$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.

**Affirmation 1 :** Pour tout nombre réel $a \in [-\pi\,;0]$ tel que $\cos(2a) = \dfrac{7}{25}$, on a $\sin(a) = -\dfrac{3}{5}$.

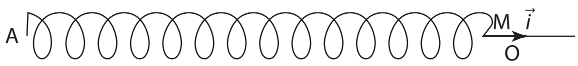
**b)** On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.

**Affirmation 2 :** La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.

D'après BAC S, Nouvelle-Calédonie, 2019.

## Modélisation

**69** Un ressort à spires est attaché à son extrémité fixe A. On attache un mobile à son autre extrémité M. On admet que l'abscisse du point M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ vérifie, pour tout $t$ réel, $t \geqslant 0$, l'équation $(E) : f''(t) + 9f(t) = 8\sin(t)$ où $t$ représente le temps exprimé en seconde et $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$. **Physique**




**1. a)** Montrer que la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = A\cos(3t) + B\sin(3t) + \sin(t)$$

avec $A$ et $B$ des nombres réels, est solution de $(E)$.

**b)** Que représente la fonction $g$ dans ce contexte ?

**2.** On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le ressort étant compressé, le mobile passe en O avec une vitesse de $4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Cela se traduit par le fait que $f'(0) = 4$.

Déterminer les valeurs de $A$ et $B$ pour que la fonction $g$ vérifie les conditions $g(0) = 0$ et $g'(0) = 4$.

**3.** On admet dans cette question que :

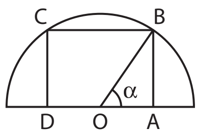
$$\sin(3t) = -4\sin^3(t) + 3\sin(t).$$

Déterminer les instants $t$ où le mobile repasse par le point de départ, c'est-à-dire résoudre dans l'ensemble $]0\,;+\infty[$ l'équation $g(t) = 0$.

Bac STI, La Réunion, septembre 2002.

**70** **TICE** **1.** Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

**a)** Reproduire la figure ci-contre dans laquelle on a inscrit un rectangle ABCD dans un demi-cercle de diamètre 2 cm. On note $\alpha$ l'angle $\widehat{AOB}$.




**b)** Déterminer pour quelle valeur de $\alpha$ l'aire du rectangle ABCD est maximale.

**2.** Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ la fonction exprimant l'aire du rectangle ABCD en fonction de la valeur de $\alpha$, exprimée en radians.

**a)** Déterminer une expression de $\mathscr{A}(\alpha)$.

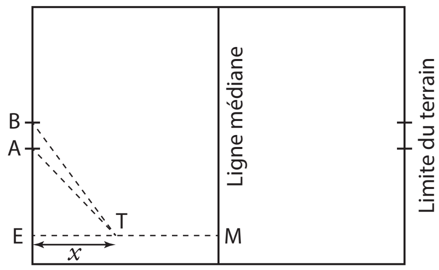
**b)** Étudier les variations de $\mathscr{A}$ sur l'intervalle $]0\,;\pi[$.

**c)** Quelle est la valeur de $\alpha$ pour laquelle l'aire de ABCD est maximale ?

Déterminer cette aire maximale.

**71** Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E situé à l'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus




Le but de cet exercice est de chercher s'il existe une position du point T sur [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximal et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans la suite de l'exercice, on note $x$ la longueur ET.

On a EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m, et on note $\alpha$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{ETA}$, $\beta$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{ETB}$ et $\gamma$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{ATB}$.

**1.** La fonction tangente est définie sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Exprimer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$ en fonction de $x$ dans les triangles rectangles ETA et ETB.

**2.** Montrer que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**3.** L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure $\gamma$ appartenant à $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels $a$ et $b$ de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}.$$

Montrer que $\tan(\gamma) = \dfrac{5{,}6x}{x^2 + 765}$.

**4. a)** L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure $\gamma$ est maximale.

Montrer que cela correspond à un minimum sur $]0\,;50]$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

**b)** Montrer qu'il existe une unique valeur de $x$ pour laquelle $\widehat{ATB}$ est maximal et déterminer cette valeur de $x$ au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.

D'après Bac S, France métropolitaine, juin 2016.

## Déterminer des valeurs de cos et sin

**72** On donne $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

**73** On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

**74** On considère les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$ et $g(x)=f(x)-\frac{x^4}{24}$.

**1.** Démontrer que, pour tout réel $x$, $f(x) \geqslant 0$.

**Coup de pouce** Dériver deux fois $f$.

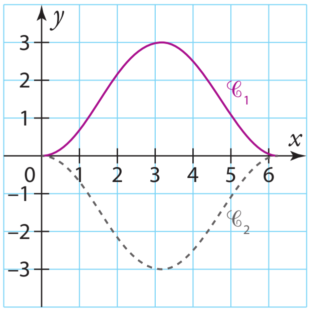
**2.** Démontrer que, pour tout réel $x$, $g(x) \leqslant 0$.

**Coup de pouce** Dériver quatre fois $g$.

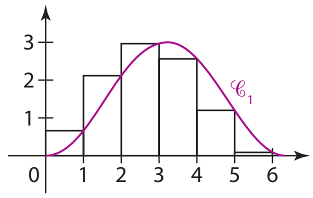
**3.** En déduire un encadrement de $\cos(x)$.
**4.** Déterminer la précision $\varepsilon(x)$ de l'encadrement, puis étudier les variations de la fonction $\varepsilon$.
**5.** En déduire à quelle condition sur $x$ il est pertinent d'utiliser cet encadrement.
**6.** À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et estimer sa précision.

## Déterminer une aire entre deux courbes

**75** Algo On considère la fonction $f$ définie sur $[0 ; 2\pi]$ par $f(x)=-1{,}5\cos(x)+1{,}5$.
On admet que la fonction $f$ est continue sur $[0 ; 2\pi]$. On note $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé (voir le graphique suivant).




**1.** Démontrer que la fonction $f$ est positive sur $[0 ; 2\pi]$.
**2.** Sur la figure ci-dessus, la courbe tracée en tirets, notée $\mathscr{C}_2$, est la courbe symétrique de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des abscisses.
L'objectif est de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ délimitée par les droites d'équations $x=0$ ; $x=2\pi$ ; $y=-1{,}5\cos(x)+1{,}5$ et $y=1{,}5\cos(x)-1{,}5$ exprimée en unités d'aire.
**a)** Pour cela, on va d'abord déterminer l'aire $\mathscr{A}_1$ délimitée par les droites d'équations $x=0$ ; $x=2\pi$ et $y=-1{,}5\cos(x)+1{,}5$.
On partage cette aire à l'aide de rectangles de largeur $\frac{2\pi}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et de longueur $f\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Plus $n$ est grand, plus l'aire obtenue en sommant l'aire de chaque rectangle est proche de l'aire $\mathscr{A}_1$.




Compléter le programme suivant écrit en **Python** permettant de calculer $\mathscr{A}_1$.

```
from math import*
def aire(n) :
    s=0
    for k in range (1,n) :
        s=s+(2*pi/n)*...
    print ("L'aire est égale à environ")
    print (s)
```

**b)** Déterminer l'aire $\mathscr{A}_1$ lorsque $n=100$.
**c)** Compléter le programme précédent pour pouvoir déterminer l'aire $\mathscr{A}$.

D'après BAC S, Nouvelle-Calédonie, 2019.

## Travailler le Grand Oral

**76** Oral Essayer de répondre le plus rapidement possible aux questions suivantes face à un camarade de classe.
**1.** Donner les valeurs exactes des expressions suivantes.
**a)** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
**c)** $4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**2.** Dériver les fonctions suivantes.
**a)** $f(x)=\cos(x)+2x$
**b)** $g(x)=-3\sin(x)+1$
**c)** $h(x)=-\cos(x)+5\sin(x)+5x^2$

**77** Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $]0 ; \pi[$ par $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$.
Écrire un compte-rendu détaillant la démarche effectuée et une conclusion à la question posée.

# Exercices bilan

## 78 Étudier une fonction

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x\cos(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de $f$ dans un repère orthogonal.

**1. a)** Montrer que, pour tout réel $x$, $-e^x \leqslant f(x) \leqslant e^x$.

**b)** En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote au voisinage de $-\infty$. Donner l'équation de cette asymptote.

**2.** Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

**3.** On admet l'égalité suivante, pour tous nombres $a$ et $b$ :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\sin(a) - \cos(b)\sin(b).$$

Démontrer que, pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

**4.** On étudie la fonction $f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**a)** Calculer $f'(x)$.

**b)** Montrer que $f$ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**c)** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**d)** Préciser les valeurs prises par $f$ en $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

**5.** Tracer $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ à l'aide de la calculatrice.

**6.** Démontrer que, sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique $\alpha$.

**7.** Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée de $\alpha$ arrondie au centième.

**8.** Déterminer l'équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ en 0, puis la tracer sur le graphique précédent.

## 79 Nombre de solutions

Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$.

**1. a)** Montrer que, pour tout $x$ réel, $1 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow x > 2$ et $-1 - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

**b)** En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet des solutions uniquement dans l'intervalle $[-2\,;2]$.

**2.** Dresser le tableau de variations de $g$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

**Remarque** L'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ contient $[-2\,;2]$.

**3.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

**4.** Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près par défaut de la plus grande solution.

## 80 Suites et fonctions trigonométriques

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\cos(4x)$$

et $\Gamma$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère également la fonction $g$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

**1. a)** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

**b)** En déduire la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$.

**3.** On définit la suite $(u_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

**a)** Montrer que la suite $(u_n)$ est géométrique et préciser sa raison.

**b)** En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$ et étudier sa convergence.

**4. a)** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = -e^{-x}[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$.

**b)** En déduire que les courbes $\Gamma$ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

**5.** Donner une valeur approchée au dixième près par excès du coefficient directeur de la droite $T$ tangente à la courbe $\Gamma$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

## 81 Équations de fonctions

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(3x) - 2\sin(3x).$$

**1.** Déterminer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

**2.** Trouver une relation entre $f''(x)$ et $f(x)$.

**3.** Soit la fonction $g$ définie pour tout $x$ réel par :

$$g(x) = \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right).$$

Vérifier que $g''(x) + 9g(x) = 0$ et que $g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ avec $g''$ la dérivée seconde de la fonction $g$.

**4.** Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'équation $g(x) = 0$.

**5.** Montrer que les solutions obtenues forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$.

## 82 QCM

Parmi les fonctions suivantes, laquelle vérifie, pour tout $x$ réel, $f'(x) + 2f(x) = e^{-2x}\cos(x)$ et $f(0) = 1$ ?

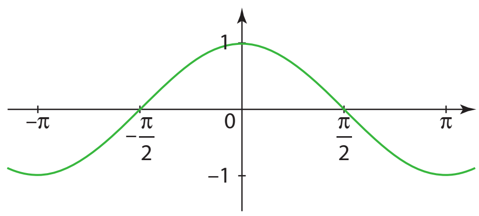
**a** $f(x) = e^{-2x}\cos(x)$

**b** $f(x) = -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(x)$

**c** $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})\cos(x)$

**d** $f(x) = (1 + \sin(x))e^{-2x}$

## Fonction cosinus




### Périodicité et parité

- **Périodique**, de période $2\pi$ : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- **Paire** : $\cos(-x) = \cos(x)$

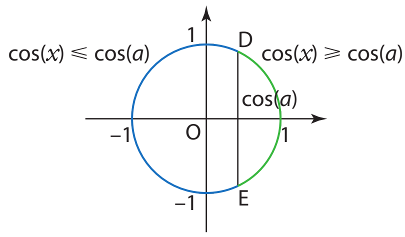
### Dérivée

Dérivable sur $\mathbb{R}$ :

$\cos'(x) = -\sin(x)$

### Résolution d'inéquation

$\cos(x) \leqslant \cos(a) \Leftrightarrow a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

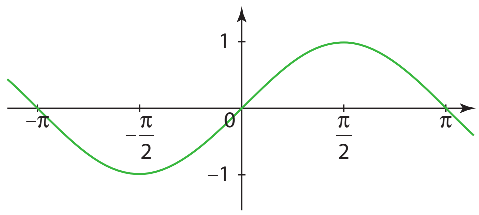



### Résolution d'équation

$\cos(x) = \cos(a)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad , k \in \mathbb{Z} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$$

## Fonction sinus




### Périodicité et parité

- **Périodique**, de période $2\pi$ : $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- **Impaire** : $\sin(-x) = -\sin(x)$

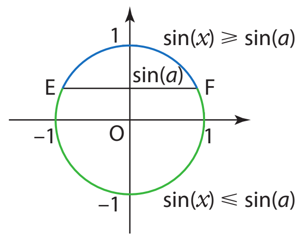
### Dérivée

Dérivable sur $\mathbb{R}$ :

$\sin'(x) = \cos(x)$

### Résolution d'inéquation

$\sin(x) \leqslant \sin(a) \Leftrightarrow -\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$




### Résolution d'équation

$\sin(x) = \sin(a)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \qquad , k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

# Préparer le BAC Je me teste

| Je dois être capable de... | Méthode | Parcours d'exercices |
|---|---|---|
| ▶ Dériver une fonction trigonométrique | 1, 2 | 1 à 4, 40, 41, 42 |
| ▶ Résoudre une équation trigonométrique | 3 | 5, 6, 44, 45 |
| ▶ Résoudre une inéquation trigonométrique | 3, 5 | 7, 8, 11, 12, 47, 48, 62, 63 |
| ▶ Étudier une fonction trigonométrique | 4 | 9, 10, 50, 51 |

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s03-06

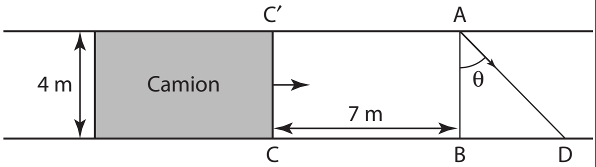
## QCM

**Pour les exercices suivants, choisir la bonne réponse.**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **83** Dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $x-\cos(x)=0$ a : | deux solutions | une solution | aucune solution | plus de deux solutions |
| **84** Soit la fonction $f$ définie et dérivable pour tout nombre réel $x$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$. | La fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;+\infty\right[$. | Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. | La fonction $f$ est positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. | La fonction $f$ est périodique. |
| **85** L'équation $\sqrt{2}\cos(2x+\pi)=1$ a pour solution dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$ : | $\left\{\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right\}$ | $\left\{\frac{-3\pi}{8}\,;\frac{-5\pi}{8}\,;\frac{-5\pi}{8}\,;\frac{-13\pi}{8}\right\}$ | $\left\{\frac{5\pi}{8}\,;\frac{13\pi}{8}\right\}$ | $\left\{\frac{3\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{8}\,;\frac{11\pi}{8}\,;\frac{13\pi}{8}\right\}$ |
| **86** L'équation $5\sin^2(x)+\frac{5}{2}\sin(x)-\frac{5}{2}=0$ a pour solution dans $[-\pi\,;\pi[$ : | $\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$ | $\left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$ | $\left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$ | $\left\{-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$ |
| **87** Soit la fonction $f$ définie sur $]-\pi\,;\pi[$ par $f(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à : | $\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $\frac{-1}{\sin^2(x)}$ | $\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{\sin^2(x)}$ | $\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ |
| **88** L'inéquation $2\sin(x)\geqslant\sqrt{3}$ a pour solution sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ : | $\left\{\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right\}$ | $\left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right\}$ | $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$ | $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ |
| **89** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)$. Sa dérivée $f'(x)$ est égale à : | $2\sin(x)\,(\cos(x)-\sin^2(x))+\cos^2(x)$ | $6\sin(x)\cos(x)+2$ | $2(3\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x))$ | $6\sin(x)+2$ |

## 90 Un lapin qui vit dangereusement

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire… 30 km/h !
L'avant du camion est représenté par le segment [CC′] sur le schéma ci-dessous.
Le lapin part du point A en direction de D. Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).




**1.** Déterminer en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ les distances AD et CD puis les temps $t_1$ et $t_2$ mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

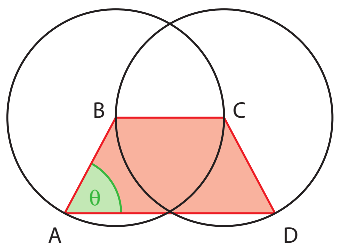
**2.** On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \dfrac{4}{\cos(\theta)}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

**3.** Conclure.

Méthode 1 p. 85 Méthode 3 Méthode 4 p. 87-88

## 91 Aire maximale d'un trapèze TICE

**1.** Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
**a)** Tracer un segment [BC] de longueur 1 cm puis le cercle de centre B et de rayon 1 cm et le cercle de centre C et de rayon 1 cm.
**b)** Placer un point A sur le cercle de centre B et de rayon 1 cm, puis tracer un trapèze isocèle ABCD tel que AB = BC = CD = 1 cm.
**c)** On note θ la mesure de l'angle en radians de l'angle $\widehat{BAD}$. Afficher la mesure de l'angle θ et l'aire de ABCD.
Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire semble maximale.




**2.** Dans cette question, on cherche à déterminer, par le calcul, l'aire maximale de ABCD notée $\mathscr{A}(\theta)$.
**a)** Déterminer l'intervalle dans lequel varie θ.
**b)** Montrer que $\mathscr{A}(\theta) = (1 + \cos(\theta))\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
**c)** Déterminer le tableau de variations de $\mathscr{A}$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
**d)** Conclure.

Méthode 1 p. 85 Méthode 4 p. 88

## 92 Étude de fonctions

Soit la fonction $f$ définie sur $[0\,;2\pi]$ par :

$$f(x) = 1 + \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

**1.** Déterminer la dérivée de la fonction $f$.
**2.** On admet l'égalité suivante, pour tout nombre réel $a$ :

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Montrer que pour tout réel $x \in [0\,;2\pi]$ :

$$f'(x) = -\sin(x)\,(1 + 2\cos(x)).$$

**3.** Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$, l'équation $\sin(x)\,(1 + 2\cos(x)) = 0$.
**4.** Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.
**5.** Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse $x$ vérifient $f'(x) = 0$.

Méthode 1 p. 85 Méthode 4 p. 88

## 93 Étude de fonctions avec une fonction auxiliaire

**A ▶** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3(x-1)^3}{3x^2+1}.$$

**1.** Calculer $f'(x)$.
**2.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**3.** Déterminer une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.

**B ▶** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{3(\sin(x)-1)^3}{3\sin^2(x)+1}.$$

**1.** Vérifier que $g$ est $2\pi$-périodique.
**2. a)** Écrire une relation entre $f$ et $g$.
**b)** On admet que, si $u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée de $v$ suivie de $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$[u(v(x))]' = v'(x) \times u'(v(x)).$$

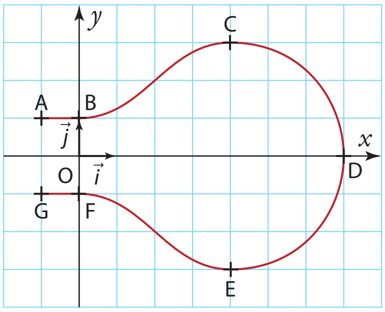
En déduire une expression de $g'(x)$.
**3.** Dresser le tableau de variations de $g$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

Méthode 1 p. 85 Méthode 4 p. 88

# Exercices vers le supérieur

## 94 Représenter une ampoule

Dans cet exercice, on s'intéresse à la modélisation d'une ampoule basse consommation.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(– 1 ; 1), B(0 ; 1), C(4 ; 3), D(7 ; 0), E(4 ; – 3), F(0 ; – 1) et G(– 1 ; 1).
On modélise la section de l'ampoule par un plan passant par son axe de révolution à l'aide de la figure suivante.




La partie de la courbe située au-dessus de l'axe des abscisses se décompose de la manière suivante :
- la portion située entre les points A et B est la représentation graphique de la fonction constante $h$ définie sur $[-1 ; 0]$ par $h(x) = 1$ ;
- la portion située entre les points B et C est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie sur $[0 ; 4]$ par :

$$f(x) = a + b\sin\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des réels non nuls fixés et où le réel $c$ appartient à $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ;
- la portion située entre les points C et D est un quart de cercle de diamètre [CE].

La partie de la courbe située en dessous de l'axe des abscisses est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

**1.** Pour tout réel $x \in [0 ; 4]$, déterminer $f'(x)$.
**2.** Déterminer la valeur du réel $c$ sachant que les tangentes aux points B et C à la représentation graphique de $f$ sont parallèles à l'axe des abscisses.
**3.** Déterminer les réels $a$ et $b$.

D'après Bac S, Polynésie, 2018.

## 95 Suite de sinus

Démo

Montrer que la suite $(u_n)$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + ... + \frac{\sin(n)}{n^2}$ est convergente.

## 96 Suite de suite

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.
Pour tout entier $n$, on pose $u_n = \sin(a_n)$.
Peut-on choisir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

## 97 Variations de fonctions

PACES

On considère que $x \in [0 ; 4\pi]$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
**a)** La fonction cosinus est décroissante sur $[0 ; \pi]$ et sur $[2\pi ; 3\pi]$.
**b)** Les fonctions sinus et cosinus sont décroissantes sur $\left[\frac{5\pi}{2} ; 3\pi\right]$.
**c)** Sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ les fonctions cosinus et sinus ont des sens de variations contraires.

## 98 Une formule utile

MPSI PCSI

Dans cet exercice, on va démontrer que pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$
$$\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a).$$

On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique noté $\mathscr{C}$ et $a$ et $b$ deux nombres réels.
Soit M et M′ deux points de $\mathscr{C}$ vérifiant que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) = a + \frac{\pi}{2}$.
**1.** Quelles sont les coordonnées des points M et M′ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ?
**2.** On place le point N sur $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = b$. Dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, quelles sont les coordonnées de N ?
**3.** Exprimer les coordonnées de N dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de deux manières différentes.
**4.** Conclure.

## 99 Dériver une fonction

PACES

La fonction tangente est définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
**a)** La fonction $\cos(x)$ est croissante sur $[0 ; \pi]$.
**b)** $(\tan(x))' = \frac{1}{1 + \cos(2x)}$ **c)** $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
**d)** $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$

## 100 Déterminer des valeurs exactes

On admet que pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

La fonction tangente est définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

**1.** Que vaut $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ? En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
**2.** Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

## 101 Inégalité de Huygens

Démo

On cherche à démontrer dans cet exercice que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $2\sin(x)+\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 3x$.

Cette inégalité est appelée inégalité de Huygens.

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=2\sin(x)+\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-3x.$$

**1.** Calculer $f'(x)$.

**2.** On considère le polynôme défini sur $]0\,;1]$ par :

$$P(x)=2x^3-3x^2+1.$$

**a)** Montrer que $P(x)=(x-1)^2(2x+1)$.

**b)** Déterminer le signe de $P(x)$ sur $]0\,;1]$.

**3.** On rappelle que la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et son intervalle image est $]0\,;1]$.

**a)** Vérifier que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\dfrac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}$.

**b)** En déduire le signe de $f'(x)$, puis les variations de $f$ sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

**c)** Prouver alors l'inégalité de Huygens.

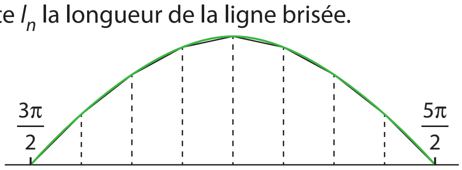
## 102 Arc de sinusoïde

Algo

Le but est d'estimer la longueur $l$ de l'arc de la courbe représentative de la fonction cosinus sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Pour cela, on subdivise l'intervalle $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ en $n$ intervalles, $n \geqslant 2$, de longueurs $\dfrac{\pi}{n}$ puis on trace une ligne brisée qui relie dans l'ordre les points de coordonnées $\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{n}\,;\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$ pour $k \in \{0\,;1\,;2\,;\dots;n\}$.

On note $l_n$ la longueur de la ligne brisée.




**1.** Calculer la valeur exacte de $l_2$ et de $l_3$.

**2.** L'algorithme ci-contre permet de déterminer la longueur $l_n$ en fonction de $n$.
Compléter cet algorithme.

```
L ← 0
Pour i allant de 0 à n:
    L ← L + …
FinPour
Afficher L
```

**3.** Le programmer sous **Python** puis déterminer la valeur de $l_{1000}$.

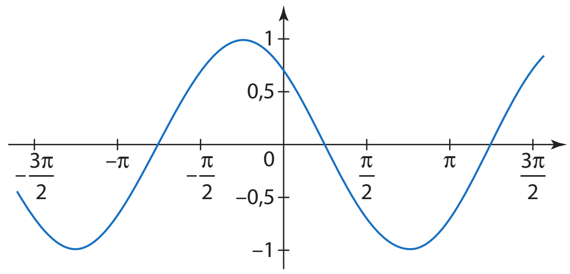
## 103 Résoudre une équation

En utilisant l'égalité démontré dans l'exercice **98**, déterminer les solutions de l'équation $\sin(x)+\sin(2x)=0$ sur $\mathbb{R}$.

## 104 Représentation graphique

PACES

On considère le graphe suivant.




Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**a)** Ce graphe représente la fonction cosinus.

**b)** La fonction qui est représentée par ce graphe est paire.

**c)** La fonction qui est représentée par ce graphe n'est ni paire ni impaire.

## 105 Fonctions hyperboliques

MPSI PCSI

Pour tout réel $x$, on pose $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ; $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ ; $th(x)=\dfrac{sh(x)}{ch(x)}$.

La fonction $sh$ est appelée « sinus hyperbolique », la fonction $ch$ est appelée « cosinus hyperbolique » et la fonction $th$ « tangente hyperbolique ».

La fonction tangente est définie sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Ces fonctions présentent des analogies avec les fonctions sinus, cosinus et tangente.

**1.** Déterminer la parité de chacune de ces fonctions.

**2. a)** Vérifier que pour tout réel $x$, on a l'égalité :

$$ch^2(x)-sh^2(x)=1.$$

**b)** Vérifier que, pour tout réel $x$, on a :

$$(ch)'(x)=sh(x)\,;\ sh'(x)=ch(x)\,;$$
$$(th)'(x)=1-th^2(x).$$

**3.** Étudier les variations de ces fonctions et les tracer dans un repère orthonormal.

## 106 Équation et algorithme

Algo

**1.** Justifier que l'équation $\cos(x)=0{,}2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\pi]$. On notera $x_0$ cette solution.

**2.** On considère l'algorithme ci-contre.
Le compléter pour qu'il affiche un encadrement de $x_0$ au millième.

```
a ← 0
b ← 3
Tant que b−a >...
    m ← (a+b)/2
    Si ...> 0,2:
        ...← m
    Sinon
        ...← m
    Fin si
Fin Tant que
Afficher a et b
```

# Travaux pratiques

Représenter
Raisonner

45 min

## 1 Chercher la tangente

On va s'intéresser à la fonction tangente en généralisant la définition vue en classe de troisième.

### A ▶ Dans le triangle rectangle

On se place dans un triangle rectangle ABC rectangle en A.

**1.** Exprimer le cosinus, le sinus, puis la tangente de l'angle $\widehat{ABC}$.

**2.** Exprimer le cosinus, le sinus, puis la tangente de l'angle $\widehat{ACB}$.

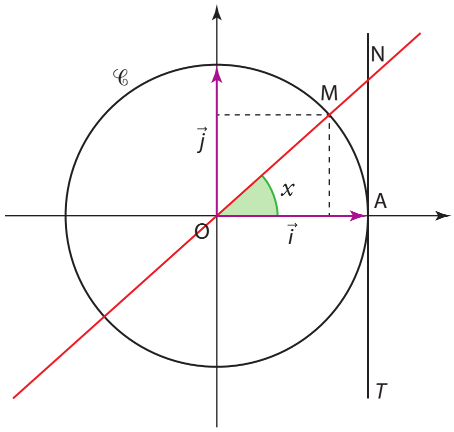
**3.** En déduire une expression de la tangente d'un angle aigu en fonction du cosinus et du sinus de cet angle.

### B ▶ Avec le cercle trigonométrique

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On trace la droite $T$ tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées A(1 ; 0).

Pour tout nombre $x$ de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on note M le point du cercle trigonométrique associé à $x$.

Soit N le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite $T$.




**1. a)** Expliquer pourquoi le point N est bien défini.

**b)** À l'aide du théorème de Thalès, démontrer que l'ordonnée du point N est égale à $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Par la suite, on appelle fonction tangente la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

**2. a)** Déterminer si la fonction tangente est périodique.
Si oui, préciser sa période.

**Coup de pouce** $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

**b)** Déterminer si la fonction tangente est une fonction paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

**c)** Expliquer pourquoi la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer sa dérivée.

**d)** En déduire les variations de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

**3. a)** Peut-on définir la fonction tangente sur $\mathbb{R}$ ?
Si non, déterminer les valeurs pour lesquelles la fonction tangente n'est pas définie.

**b)** Dresser le tableau de variations de la fonction tangente sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

**c)** À l'aide de la calculatrice, représenter la fonction tangente et vérifier les réponses aux questions précédentes.

Algo 45 min Modéliser Calculer

## 2 De plus en plus proche du sinus et du cosinus

On cherche à trouver des valeurs approchées prises par la fonction sinus pour des valeurs proches de zéro.

Joseph Fourier, mathématicien et physicien français (1768-1830), a trouvé lors de ses travaux sur la propagation de la chaleur des formules permettant d'exprimer les fonctions sinus et cosinus à l'aide de somme infinie.

### A ▶ Sinus

On admet la formule suivante pour tout réel $x$, $x$ proche de zéro :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

avec, pour tout entier naturel $n$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ et $x$ exprimé en radians.

On appelle factorielle $n$ le nombre défini par $n!$ (↪ chapitre 11)

**1. a)** Calculer 3! ; 5! et 7!

**b)** Compléter l'algorithme suivant permettant de déterminer le factoriel d'un entier naturel.

```
a ← 1
Pour i allant de …… à …… faire :
     a=…
Fin Pour
Retourner (a)
```

**c)** Le programmer sous **Python**.

On peut également écrire la formule précédente sous la forme suivante :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

où $\sum_{k=0}^{+\infty}$ signifie que la somme est infinie.

**2.** Écrire une fonction en langage **Python** permettant de calculer la valeur approchée du sinus d'un nombre proche de zéro. On peut pour cela s'aider de la formule précédente et de la fonction `factorial` de **Python**.
Cette fonction prendra en paramètres les valeurs de $n$ et de $x$.

### B ▶ Cosinus

On admet la formule suivante, pour tout réel $x$, $x$ proche de zéro :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

où $x$ est exprimé en radians.

**1.** Écrire une formule identique à celle du sinus d'un nombre réel de la question **1. b)** pour le cosinus d'un nombre réel.

**2.** Écrire un programme en langage **Python** permettant de calculer la valeur du cosinus d'un nombre à partir de la formule précédente et de la fonction factorielle programmée dans la question **1. c)**.
Cette fonction prendra en paramètres les valeurs de $n$ et de $x$.

# Travaux pratiques

Algo · 55 min · Modéliser · Représenter · Calculer

## 3 Modélisation du son

Un son est provoqué par un mouvement de l'air. Ce mouvement se propage en faisant varier la pression atmosphérique sous la forme d'une onde, comme lorsqu'on jette un caillou dans l'eau. Un son pur est produit par un diapason et sa représentation graphique est une fonction sinusoïdale.
Une onde sonore est caractérisée par sa période $T$ qui caractérise la hauteur du son et par son amplitude $P$, exprimée en Pascal, qui caractérise son intensité.
En général, on étudie plutôt la fréquence $F$, exprimée en hertz, du son qui correspond au nombre d'oscillations par seconde. La fréquence détermine la tonalité du son : plus un son est aigu, plus sa fréquence est élevée et plus sa fréquence est lente, plus le son est grave.
On appelle **son pur** un son comportant une seule fréquence.

### A ▸ Modélisation d'un son pur

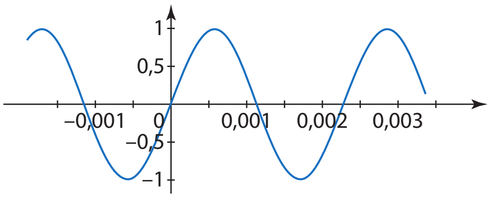
**1.** On admet qu'un son pur de fréquence $F$ et d'amplitude $P$ peut être représenté par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = P\sin(2\pi F t)$$

où $t$ désigne le temps exprimé en seconde.
**a)** Déterminer la période $T$ de cette fonction.

> **Coup de pouce**
> La fonction sinus est $2\pi$-périodique.

**b)** En déduire la relation entre la période $T$ et la fréquence $F$ d'un son.
**2.** Le la 440, aussi noté $\text{la}_3$, est une note de musique utilisée comme hauteur de référence.
Sa fréquence est de 440 Hz (hertz). On donne ci-dessous une représentation graphique de la fonction associée au la 440 pour une amplitude donnée.
**a)** Déterminer graphiquement une valeur approchée de sa période puis vérifier le résultat à l'aide d'un calcul.
**b)** Déterminer graphiquement l'amplitude associée au son représenté ci-dessus.
**c)** En déduire l'expression de la fonction représentée.

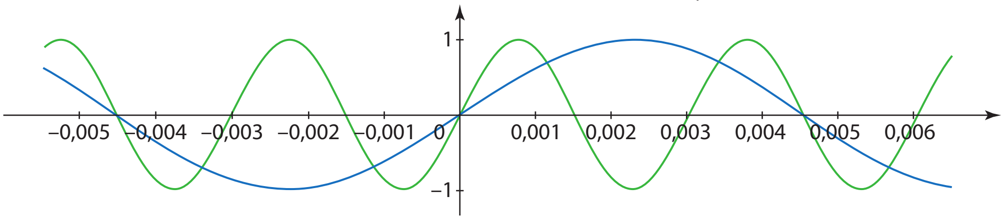



### B ▸ Modélisation d'un son

Lorsqu'un musicien joue une note avec un instrument de musique, nous avons l'impression de n'entendre qu'un seul son mais cette impression est erronée.
Joseph Fourier a affirmé en 1822 qu'un son musical peut se décomposer en plusieurs autres sons musicaux élémentaires appelés sons purs.
La fonction $f$ représentant le son entendu est composée d'une somme de fonctions sinusoïdales.
La note perçue est en fait une « harmonie » dans laquelle cette note est dominante.
Sa fréquence est appelée fréquence fondamentale, ou harmonique 1, et indique la hauteur de celle-ci.
Les fréquences des autres notes formant ce son, appelées harmoniques, sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale.

Ainsi, lorsqu'un musicien joue un la$_1$, il joue le la$_1$, ainsi que toutes ses harmoniques mais avec des amplitudes inférieures que la dominante la$_1$. Le son obtenu est la somme des sons de chaque harmonie produite.

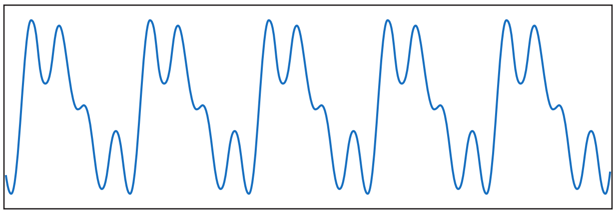
**1.** Sur le graphique suivant est représenté le signal sinusoïdal de la note la$_1$ en bleu et celui de la note mi$_3$ en vert.



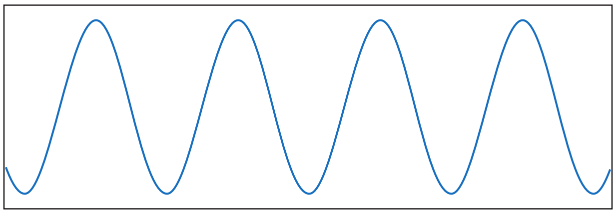

**a)** Déterminer la période $T_1$ de la note la$_1$.
**b)** Déterminer la période $T_3$ de la note mi$_3$.
**c)** Vérifier graphiquement que la note mi$_3$ est une harmonique de la note la$_1$.

**2.** On donne ci-dessous les représentations graphiques de la décomposition d'un son en somme de fonctions sinusoïdales.

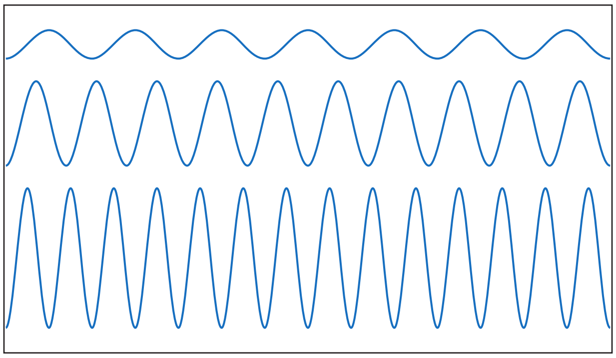
**Signal du son entendu**



**Signal de la note dominante**



**Signaux des harmoniques**



Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sin(110\pi t) + a_1 \sin(220\pi t) + a_2 \sin(330\pi t) + \ldots + a_n \sin(110(n+1)\pi t)$$

avec $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels compris entre 0 et 1, 1 étant exclu, et $n$ un nombre entier compris entre 3 et 11.
Cette fonction est une modélisation possible du signal sonore de la note la$_1$. La variable $t$ représente le temps exprimé en seconde.
Écrire un algorithme permettant de générer les différentes fonctions $f$ précédentes et de représenter celles-ci.
Le programmer ensuite à l'aide du logiciel **Python**.