3

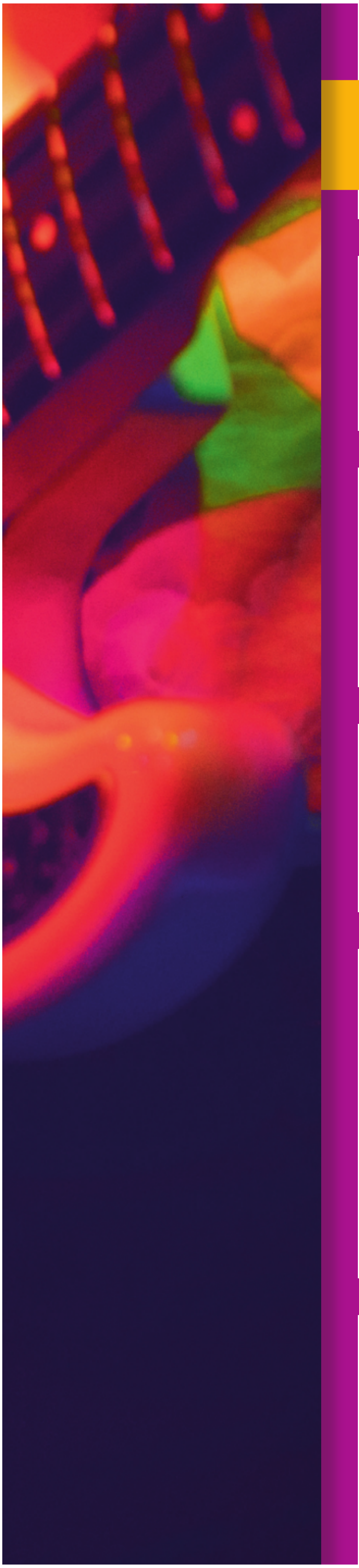
Fonctions cosinus et sinus

Depuis le XIXe siècle, grâce aux travaux de Joseph Fourier sur la propagation de la chaleur, on a réussi à modéliser le son avec plus de précisions grâce aux fonctions trigonométriques.

Comment cette modélisation est-elle réalisée ?

↪ **TP 3** p. 106

VIDÉO
Modélisation du son
lienmini.fr/maths-s03-01



Pour prendre un bon départ

EXOS Prérequis lienmini.fr/maths-s03-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Déterminer la périodicité et la parité d'une fonction

1. Déterminer la période des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \cos(x) - 3$

b) $g(x) = \dfrac{\cos(x) + 5}{2\sin(x)}$

c) $h(x) = \sin(2x) \times (\cos(2x) - 1)$

2. Déterminer la parité des fonctions précédentes.

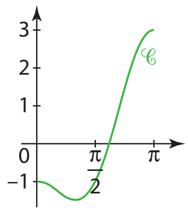
2 Étudier la courbe d'une fonction trigonométrique

On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) - \dfrac{4}{5 + \cos(x)}$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

f est paire et 2π-périodique.

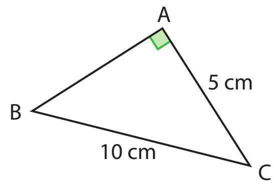
1. Comment obtenir la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; 2\pi]$?

2. Tracer la courbe sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la calculatrice. Quelles sont les transformations utilisées pour passer de la représentation sur $[0 ; \pi]$ à celle sur $\mathbb{R}$?



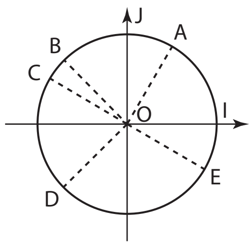
3 Se repérer dans un triangle rectangle

Déterminer la valeur exacte des angles du triangle ABC rectangle en A.



4 Se repérer sur le cercle trigonométrique

Associer chacun des nombres suivants à un point du cercle trigonométrique.



a) $\dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{\pi}{3}$ **d)** $-\dfrac{\pi}{6}$ **e)** $-\dfrac{3\pi}{4}$

5 Connaître les valeurs remarquables

Donner les valeurs exactes de :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **c)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ **d)** $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Activités

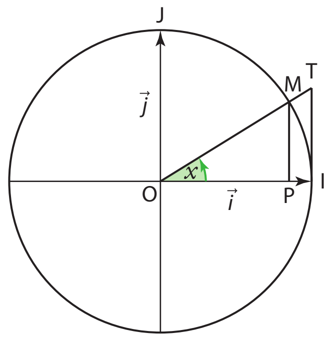
55 min

1 Dériver les fonctions cosinus et sinus

A ▸ Limite… finie ?

On considère la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Le but de cette partie est de déterminer, si elle existe, la limite de f en 0.



1. Soit $x \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On considère le cercle trigonométrique et M un point de ce cercle associé à la valeur de l'angle x, en radians. Soit P le projeté orthogonal de M sur (OI) et T le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente en I au cercle trigonométrique.

Montrer, à l'aide de considérations géométriques, que, pour tout $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{\cos(x)}$.

Coup de pouce Comparer les aires des triangles OMP, OTI et de la portion de disque OMI.

2. Déterminer la limite de f en 0.

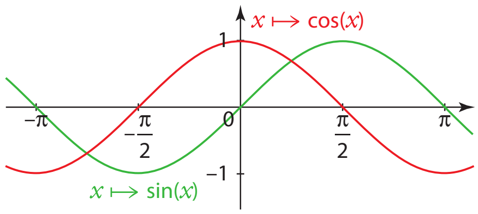
Coups de pouce
- Deux cas devront être étudiés.
- Déterminer la parité de la fonction f.

B ▸ Vers la dérivation…

On admet que, pour tous nombres a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \text{ et } \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$

1. En s'aidant du graphique ci-dessous représentant les fonctions cosinus et sinus, conjecturer une relation entre les variations de la fonction sinus (respectivement cosinus) et le signe de la fonction cosinus (respectivement sinus).



2. Soit x un réel quelconque et h un réel aussi proche de zéro que l'on veut.

a) Démontrer l'égalité $\dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x) \times \dfrac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \times \dfrac{\cos(h) - 1}{h}$.

b) Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(h) - 1}{h} = 0$.

Coup de pouce
Utiliser l'égalité $\dfrac{\cos(h) - 1}{h} = \dfrac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)}$ et le résultat trouvé dans la partie **A**.

c) Une des conjectures émises dans la question **1.** est-elle vérifiée ?

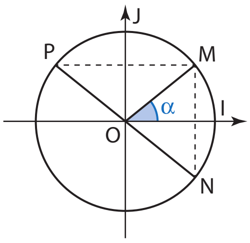
3. Par un raisonnement analogue, déterminer si la deuxième conjecture est vraie.

↪ Cours 1 p. 84

2 Résoudre des équations trigonométriques

20 min

A ▶ Résoudre une équation en cosinus



1. On considère le cercle trigonométrique et un point M de celui-ci tel que $\widehat{IOM} = \alpha$, exprimé en radians. Quelle est l'abscisse du point M ?

2. Soit le point N symétrique du point M par rapport à (OI).
Quelle est l'abscisse du point N ? Compléter l'égalité suivante : $\cos(-\alpha) = \ldots$

3. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$. En s'aidant des questions précédentes, résoudre l'équation $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$.

b) Donner les solutions de l'équation précédente lorsque α et β sont deux réels quelconques.

B ▶ Résoudre une équation en sinus

Soit le point P, symétrique du point M par rapport à (OJ).

1. a) Déterminer la valeur, en radians, de l'angle $\widehat{IOP}$.

b) En déduire l'ordonnée du point P. Compléter l'égalité suivante : $\sin(\pi - \alpha) = \ldots$

2. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $[0\,;2\pi[$. En s'aidant des questions précédentes, résoudre l'équation $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$.

b) Donner les solutions de l'équation précédente lorsque α et β sont deux réels quelconques.

↪ Cours 2 p. 86

3 Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation trigonométrique

Algo 20 min

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3\cos(2x - 1)$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

1. a) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

2. Dans cette question, on va déterminer une valeur approchée des solutions précédentes.

Pour cela, on a programmé l'algorithme suivant sous **Python**.

```
from math import*
def dichotomie(n):
      a=0.5
      b=pi/2+0.5
      while abs(b-a)>1/(10^n):
            c=(a+b)/2
            if 3*cos(2*c-1)>0:
                  a=c
            else:
                  b=c
      print("Une valeur approchée de x est comprise entre",a,"et",b)
```

PYTHON
Valeur approchée d'une solution d'une équation trigonométrique
lienmini.fr/maths-s03-03

a) Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 4$. En déduire ce qu'il retourne.

b) Modifier l'algorithme pour déterminer une valeur approchée de la deuxième solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

c) Programmer l'algorithme précédent sous **Python** et déterminer une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ à 10^{-4} près.

↪ Cours 2 p. 86

Cours

1 Dérivabilité

Propriétés Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x)$$

Démonstrations

① $$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \frac{\cos(x)(\cos(h)-1)}{h} - \frac{\sin(h)}{h} \times \sin(x) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$ ↪ Activité 1

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\cos^2(h)-1}{h(\cos(h)+1)}$$

$$= \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h)+1)}$$

$$= -\frac{\sin(h)}{h} \times \frac{\sin(h)}{\cos(h)+1} \text{ avec } \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{\cos(h)+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Ainsi, on obtient $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x)$

② Pour la démonstration concernant la dérivée de la fonction sinus ↪ Activité 1

Remarque Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(t) = \cos(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de la fonction sinus	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(t) = -\sin(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de la fonction cosinus	-1	↗	1	↘	-1

Propriété Compléments sur la dérivation

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Les fonctions f et g définies sur I par $f(t) = \cos(u(t))$ et $g(t) = \sin(u(t))$ sont dérivables sur I et, pour tout nombre t de I :

$$f'(t) = -u'(t)\sin(u(t)) \text{ et } g'(t) = u'(t)\cos(u(t)).$$

Exemples

- $f(x) = \sin(5x+1)$; $f'(x) = 5\cos(5x+1)$
- $g(x) = \cos\left(\frac{x}{3}+5\right)$; $g'(x) = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+5\right)$
- $h(x) = \cos(3x^2+5x-1)$; $h'(x) = -(6x+5)\sin(3x^2+5x-1)$

Exercices résolus

Méthode 1 Dériver une fonction trigonométrique

Énoncé

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[0\,;\pi[$ par $f(x)=\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos(x)}$.

Solution

$f(x)=\dfrac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos(x)}$ **1**

$f'(x)=\dfrac{(\cos(x)-\sin(x))(1+\cos(x))-(\sin(x)+\cos(x))(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}$ **2**

$f'(x)=\dfrac{\cos(x)+\cos^2(x)-\sin(x)-\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)+\cos(x)\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$f'(x)=\dfrac{\cos(x)-\sin(x)+1}{(1+\cos(x))^2}$

Conseils & Méthodes

1 Reconnaître la forme de la fonction et de sa dérivée (ici $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$).

2 Appliquer les formules de dérivées des fonctions cosinus et sinus.

À vous de jouer !

1 Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$ $\quad$ $\mathrm{I}=]0\,;\pi[$

b) $f(x)=2\cos(x)\sin(x)$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

2 Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$

b) $f(x)=\dfrac{x+\cos(x)}{3+\sin(x)}$ $\quad$ $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

→ Exercices 40 et 41 p. 93

Méthode 2 Dériver une fonction composée

Énoncé

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\cos(2x-1)\sin(5x+3).$$

Solution

$f(x)=\cos(2x-1)\sin(5x+3)$ **1**

On pose $u(x)=2x-1$ et $v(x)=5x+3$ **2**

$u'(x)=2$ et $v'(x)=5$

$f'(x)=-2\sin(2x-1)\sin(5x+3)+5\cos(2x-1)\cos(5x+3)$

Conseils & Méthodes

1 Reconnaître les formules $\cos(u)'=-u'\sin(u)$ et $\sin(u)'=u'\cos(u)$ où u est une fonction définie sur un intervalle I.

2 Identifier alors u puis calculer sa dérivée.

À vous de jouer !

3 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=5\sin(3x+12)$

b) $g(x)=8\cos(-5x+4)$

c) $h(x)=-7\cos(-2x-3)$

4 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) $f(x)=\dfrac{\cos(3x)-x}{\sin(3x)+x+2}$

b) $g(x)=\dfrac{\cos(5x+1)}{\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)+3}$

→ Exercices 42 et 43 p. 93

Cours

2 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriété Résolution d'équations

Pour résoudre une équation du type cos(x) = cos(a) ou sin(x) = sin(a), on s'appuie sur le cercle trigonométrique pour ne pas oublier de solutions.

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exemple

Soit l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que l'on veut résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Cette équation a pour solution l'ensemble $S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Propriété Résolution d'inéquations

Soit a un nombre réel.

- **Les solutions de l'inéquation cos (x) $\leqslant$ cos (a) sont les nombres vérifiant :**

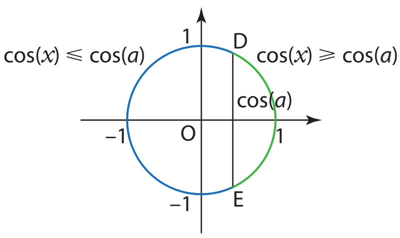
$$a + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

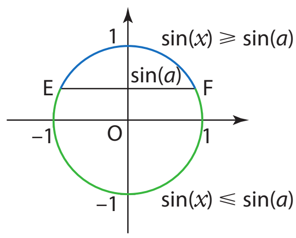
- **Les solutions de l'inéquation sin (x) $\leqslant$ sin(a) sont les nombres vérifiant :**

$$-\pi - a + 2k\pi \leqslant x \leqslant a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque Pour résoudre une inéquation du type cos (x) $\leqslant$ cos(a) ou sin(x) $\leqslant$ sin(a) sur l'intervalle $[0\ ;2\pi[$, on peut s'appuyer sur le cercle trigonométrique.

En effet, deux points d'un cercle trigonométrique d'abscisses cos(a) (respectivement sin(a)) définissent deux arcs de cercle représentant les solutions de cos(x) $\leqslant$ cos(a) et cos(x) $\geqslant$ cos(a) (respectivement sin(x) $\leqslant$ sin(a) et sin(x) $\geqslant$ sin(a)).





On peut alors trouver l'ensemble des solutions des inéquations cos(x) $\leqslant$ cos(a) ou sin(x) $\leqslant$ sin(a) sur $\mathbb{R}$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s03-04 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Résoudre une équation ou une inéquation

Énoncé

1. Résoudre sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Résoudre l'inéquation $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

Solution

1. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 1

$\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $2x=\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

On détermine les valeurs de k pour lesquelles les solutions appartiennent à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$: 3

$-\pi<\frac{\pi}{24}+k\pi\leqslant\pi\Leftrightarrow-\frac{25\pi}{4}<k\pi\leqslant\frac{23\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{25}{4}<k\leqslant\frac{23}{4}$ avec $k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow k\in\mathbb{Z}$

$-\pi<\frac{5\pi}{24}+k\pi\leqslant\pi\Leftrightarrow-\frac{29\pi}{24}<k\pi\leqslant\frac{19\pi}{24}\Leftrightarrow-\frac{29}{24}<k\leqslant\frac{19}{24}$ avec $k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow k\in\{-1\,;0\}$

Les solutions de l'équation $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sont $-\frac{23\pi}{24}\,;-\frac{19\pi}{24}\,;\frac{\pi}{24}$ et $\frac{5\pi}{24}$.

2. $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)<\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 1

$\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}+2k\pi<4x-\frac{\pi}{3}<2\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow\frac{2\pi}{3}+2k\pi<4x<2\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi(1+k)}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

On détermine les valeurs de k pour lesquelles les solutions appartiennent à l'intervalle $[0\,;2\pi[$: 3

$0\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<2\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{k\pi}{2}<\frac{11\pi}{6}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi<\frac{11\pi}{3}$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\leqslant k<\frac{11}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{0\,;1\,;2\,;3\}$

$0\leqslant\frac{\pi(1+k)}{2}<2\pi\Leftrightarrow0\leqslant1+k<4\Leftrightarrow-1\leqslant k<3$ avec $k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow k\in\{-1\,;0\,;1\,;2\}$

Les solutions de l'inéquation $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$ sont :

$\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right[\cup\left]\frac{7\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right[$.

Conseils & Méthodes

1 Se ramener à une inégalité de cosinus ou de sinus en utilisant les valeurs remarquables.

2 Appliquer la propriété vue dans le cours sans oublier le $+\,2k\pi$.

3 Chercher les solutions sur l'intervalle donné en prenant des valeurs de k particulières.

À vous de jouer !

5 Résoudre les équations sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

a) $\cos(3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

6 Résoudre les équations sur l'intervalle $]-2\pi\,;2\pi]$.

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $2\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)=-1$

7 Résoudre l'inéquation $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $[-\pi\,;\pi[$.

8 Résoudre l'inéquation $\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

↪ Exercices 44 à 49 p. 93

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s03-04 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 4 — Étudier une fonction trigonométrique

↪ Cours 1 p. 84

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin^3(x) - 3\sin(x)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. a) Montrer que f est une fonction périodique.

b) Étudier la parité de f.

c) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Que peut-on en déduire ?

2. On admet la formule $2\sin^2(a) = 1 - \cos(2a)$.

Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -3\cos(x)\cos(2x)$.

3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Conseils & Méthodes

1 Connaître la périodicité T de la fonction sinus, puis calculer $f(x + T)$.

2 Calculer $f(-x)$.
- Si $f(-x) = f(x)$, f est paire.
- Si $f(-x) = -f(x)$, f est impaire.

3 Calculer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ puis $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et comparer les résultats ou utiliser la formule $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Solution

1. a) $f(x + 2\pi) = 2\sin^3(x + 2\pi) - 3\sin(x + 2\pi)$ **1**

$f(x + 2\pi) = 2\sin^3(x) - 3\sin(x) = f(x)$

f est donc 2π-périodique.

b) $f(-x) = 2\sin^3(-x) - 3\sin(-x) = -2\sin^3(x) + 3\sin(x) = -f(x)$ **2**

f est une fonction impaire.

c) $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 - 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **3**

$$= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)\right)^3 - 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)\right) = 2\cos(x)^3 - 3\cos(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Ainsi, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$f'(x) = 6\cos(x)\sin^2(x) - 3\cos(x)$

$f'(x) = -3\cos(x)(1 - 2\sin^2(x))$

$f'(x) = -3\cos(x)(1 - 1 + \cos(2x))$

$f'(x) = -3\cos(x)\cos(2x)$

$\cos(2x) < 0 \Leftrightarrow \cos(2x) < \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < 2\pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$

3.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$-3\cos(x)$		$-$		$-$	
$\cos(2x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1

À vous de jouer !

9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3\cos^2(x) - 6\cos(x)$.

a) Montrer que f est une fonction périodique.

b) Que peut-on en déduire sur l'intervalle d'étude de f ?

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2\cos(2x) + \sin^2(x)$.

a) Montrer que f est une fonction périodique de période π.

b) Montrer que f est paire.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$, puis sur $[-\pi ; \pi]$.

↪ Exercices 50 à 60 p. 94-95

Méthode 5 Résoudre une inéquation trigonométrique de degré 3

Cours 2 p. 86

Énoncé

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'inéquation $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1 \geqslant 0$ dans $[0 ; 2\pi[$.

1. **Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Vérifier que $f(1) = 0$.**

2. **Déterminer les réels a, b et c vérifiant $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.**

3. **Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.**

4. **En déduire les solutions de l'inéquation $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1 \geqslant 0$ dans $[0 ; 2\pi[$.**

Solution

1. $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$.

2. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$ **1**

$f(x) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 0 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

Ainsi, $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$.

3. On détermine le signe du polynôme $2x^2 - x - 1$.

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

$x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$

x	$-\frac{1}{2}$		1
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$2x^2 - x - 1$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

4. Soit $X = \cos(x)$. On réalise un changement de variable :

$x \in \mathbb{R}$, mais $X \in [-1 ; 1]$ **2**

On a alors $f(X) \geqslant 0 \Leftrightarrow X \geqslant -\dfrac{1}{2}$

$\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ **3**

$\cos(x) \geqslant \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1 \geqslant 0$ dans $[0 ; 2\pi[$ est :

$S = \left[0 ; \dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3} ; 2\pi\right[$.

Conseils & Méthodes

1 Développer l'expression de f puis identifier les coefficients du polynôme.

2 Poser $\cos(x) = X$ pour se ramener à une inéquation déjà résolue.

3 Remplacer X par $\cos(x)$ en tenant compte que $\cos(x)$ est compris dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

À vous de jouer !

11 Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$:

$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 > 0$.

12 Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$:

$2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 < 0$.

13 **1.** Soit $f(x) = x^3 - 2{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$. Vérifier que $f(-1) = 0$.

2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi]$:

$\cos^3(x) - 2{,}5\cos^2(x) - 2\cos(x) + 1{,}5 < 0$.

14 **1.** Soit $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 2{,}5x - 1$. Vérifier que $f(2) = 0$.

2. Résoudre sur $[-\pi ; \pi]$:

$\sin^3(x) - 0{,}5\sin^2(x) - 2{,}5\sin(x) - 1 < 0$.

Exercices 61 à 67 p. 95

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer

L'équation $x + \sqrt{2}\sin(x) = 2$ a une solution sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

On souhaite démonter cette propriété.

Comprendre avant de rédiger

- Résoudre l'équation se ramène à une étude de fonction en posant, pour tout x réel, $f(x) = x + \sqrt{2}\sin(x) - 2$.
- On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

Rédiger

Étape 1 En posant, pour tout x réel, $f(x) = x + \sqrt{2}\sin(x) - 2$, l'équation précédente est équivalente à $f(x) = 0$.

Étape 2 On détermine la dérivée de f.

Étape 3 On va déterminer le signe de la dérivée en s'appuyant sur la connaissance des fonctions cosinus et sinus.

Étape 4 On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

Étape 5 On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle.

Étape 6 On conclut.

La démonstration rédigée

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{2}\sin(x) - 2.$$

$f'(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(x)$

$f'(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left[0\,;\dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}\,;2\pi\right]$

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-2	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{4} - 1$	$\searrow$	$\frac{5\pi}{4} - 3$	$\nearrow$	$2\pi - 2$

- f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{3\pi}{4}\right]$ avec $f(0) = -2$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) > 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[0\,;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.
- f est continue sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;2\pi\right]$ et son minimum, atteint en $\dfrac{5\pi}{4}$ est strictement positif. Ainsi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\left[\dfrac{3\pi}{4}\,;2\pi\right]$.

Ainsi, $x + \sqrt{2}\sin(x) = 2$ a une unique solution sur $[0\,;2\pi]$.

Pour s'entraîner

De la même façon, démontrer que l'équation $\sqrt{3}x + 2\cos(x) = 3$ a une unique solution sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.