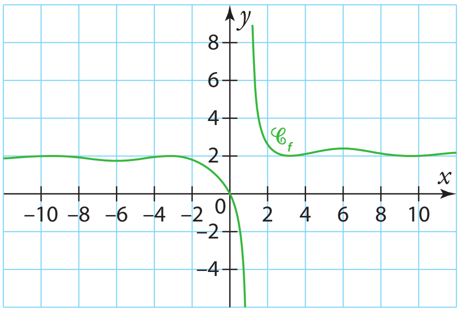
DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-s02-05

Exercices calculs et automatismes

24 Lecture graphique

Soit une fonction f dont une courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation :

a $x = 1$ **b** $x = 0{,}5$ **c** $y = 0$ **d** $y = 1$

2. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation :

a $x = 0$ **b** $x = 0{,}5$ **c** $y = 0$ **d** $y = 2$

25 Opérations sur les limites

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. La limite est égale à 0 pour :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x$ **b** $\lim\limits_{x \to 0} 2x^2 - \dfrac{1}{2}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ **d** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x^4}$

2. La limite est égale à $+\infty$ pour :

a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ **b** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3\sqrt{x}$

c $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{2x-7}{x^3}$ **d** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-5x}$

26 Limites diverses

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^2} = -\infty$	☐	☐
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 1$	☐	☐
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-3x} = -\infty$	☐	☐
4. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{1-2x^3} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{1-2x^3}$	☐	☐

27 Formes indéterminées

Déterminer s'il s'agit d'une forme indéterminée.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x > 0 \\ x \to 0}} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - x^3$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{x-1}$

28 Inégalités

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1. Pour $x > 0$, on a :

a $\dfrac{\cos(x)}{x} < 1$ **b** $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{\cos(x)}{x} < \dfrac{1}{x}$

c $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ **d** $0 \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

2. Pour tout réel x, on a :

a $0 \leqslant \dfrac{\cos^2(x)}{e^x} \leqslant 1$ **b** $0 \leqslant \dfrac{\cos^2(x)}{e^x} < e^{-x}$

c $-\dfrac{1}{e^x} \leqslant \dfrac{\cos^2(x)}{e^x} < \dfrac{1}{e^x}$ **d** $\dfrac{1}{e^{-x}} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

3. Pour x tel que $0 < x < 1$, on a :

a $\dfrac{\sin(x)}{x^3} \geqslant 0$ **b** $\dfrac{\sin(x)}{x^3} \leqslant 1$

c $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x}$ **d** $-\dfrac{1}{x^3} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^3}$

29 Encadrement

Choisir la (les) bonne(s) réponses.

On a encadré la fonction f, déterminer si possible la limite demandée.

1. $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $+\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

2. $f(x) \leqslant \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $+\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

3. $1 - x \leqslant f(x) \leqslant e^x$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $+\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

30 Comparaison

Choisir la (les) bonne(s) réponses.

1. $f(x) \leqslant e^x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $-\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

2. $f(x) \geqslant x^3$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $-\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

3. $f(x) \leqslant -e^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est égale à :

a 0 **b** 1
c $-\infty$ **d** On ne peut pas déterminer cette limite.

Exercices d'application

Courbe représentative

31 On considère une fonction f admettant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Tracer une allure de la courbe représentative de f.

32 On considère la fonction f admettant le tableau de variations suivant.

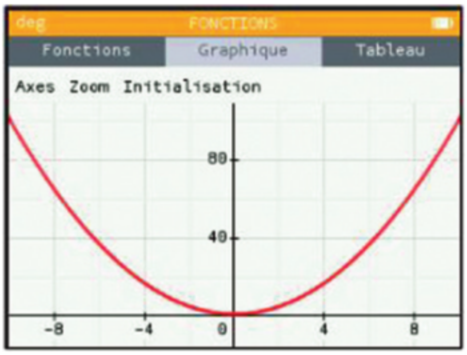
x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Limites à l'infini

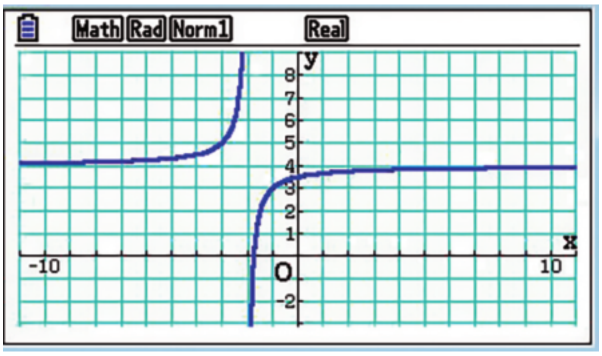
Méthode 1 p. 53

33 Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
On a tracé sa courbe représentative sur une calculatrice.
Conjecturer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.



34 Soit $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{x+2}$ définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]-2\,;+\infty[$.

On a tracé la courbe de cette fonction sur une calculatrice.



Conjecturer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

35 À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer la valeur des limites suivantes. TICE

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 2x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)$

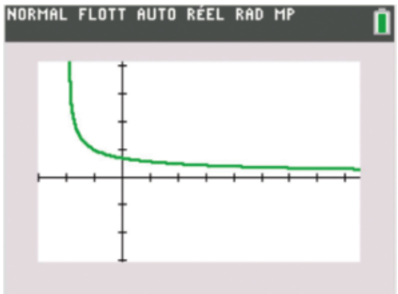
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\sin(x^3)}{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^6 e^x}{5}\right)$

Limites en une valeur réelle

Méthode 2 p. 55

36 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ définie sur $]-2\,;+\infty[$.

On a tracé sa courbe représentative sur une calculatrice.



Conjecturer sa limite quand x tend vers -2.

37 La fonction inverse admet-elle une limite quand x tend vers 0 ?

38 Avec une calculatrice ou un logiciel, conjecturer la valeur des limites suivantes. TICE

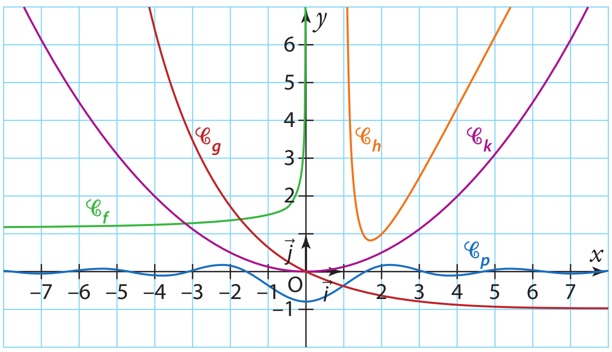
a) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(-\dfrac{2}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \left(x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

Déterminer des asymptotes

Méthode 3 p. 55

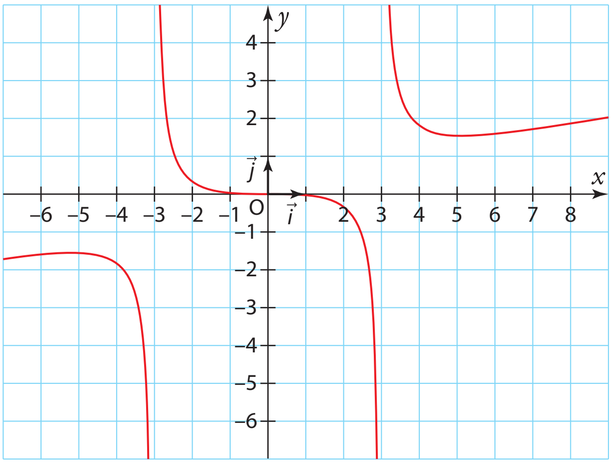
39 Pour chaque courbe, déterminer si elle semble posséder une ou plusieurs asymptotes et, le cas échéant, déterminer son équation.



40 Déterminer graphiquement :

a) les limites à droite et à gauche de f quand x tend vers 3 et -3.

b) les limites quand x tend vers 0, vers $+\infty$ et vers $-\infty$.



41 On considère une fonction f admettant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	10	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Préciser l'équation des éventuelles asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Opérations sur les limites

Méthode 4 p. 57

42 En utilisant les règles opératoires, calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x}+1$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x+1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\sqrt{x}+1$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{1-\sqrt{x}}$

43 En utilisant les règles opératoires, calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^x$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{\frac{1}{x}-2}$

44 **1.** Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto x^2+\frac{1}{\mathrm{e}^x}$ **b)** $g : x \mapsto -x(2x-1)$

c) $h : x \mapsto \frac{-1}{x-1}$ **d)** $k : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}+1}{\mathrm{e}^x-1}$

2. En déduire les asymptotes éventuelles des courbes représentatives de f, g, h et k.

Opérations sur les limites en une valeur

Méthode 4 p. 57

45 En utilisant les règles opératoires, calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-1$ **b)** $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x-1}{x+3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to2} x^3\mathrm{e}^x$ **d)** $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{x^2+3}{x-2}$

46 Étudier les limites à gauche et à droite quand x tend vers a des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ avec $a=1$. **b)** $g : x \mapsto \frac{-1}{2-x}$ avec $a=2$.

c) $h : x \mapsto \frac{-1}{(x+1)^2}$ avec $a=-1$. **d)** $k : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-1}$ avec $a=0$.

Comparaison de fonctions

Méthode 5 p. 59

47 Dans chaque cas, déterminer s'il est possible de trouver la limite demandée et la donner le cas échéant.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x) \geqslant x$ pour $x > 1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$ pour $x > 1$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ avec $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$ pour $x < 1$.

d) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ avec $1+x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$ pour $x \geqslant 0{,}01$.

48 **1.** Minorer les fonctions suivantes par une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto 2x+\sin(x)$ **b)** $g : x \mapsto \frac{x^2+\cos(x)}{x+1}$

2. En déduire leur limite en $+\infty$.

49 **1.** Minorer les fonctions suivantes sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ en 0^+.

a) $f : x \mapsto \frac{1+\sin^2(x)}{x}$ **b)** $g : x \mapsto \frac{1}{x\cos(x)}$

2. En déduire leur limite à droite en 0.

3. En majorant f et g sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ par une fonction qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^-, donner la limite de ces fonctions quand x tend vers 0^-.

50 **1.** Encadrer les expressions suivantes par deux autres expressions dans l'intervalle souhaité.

a) $\frac{\cos(x)}{x+1}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$

b) $\frac{x+\sin^2(x)}{x}$ pour $x \in]-\infty\,;0[$

c) $\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x^2}$ pour $x \in]0\,;+\infty[$

2. En déduire leur limite en $+\infty$.

Exercices d'application

Croissances comparées

Méthode 5 p. 59

51 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^5}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}(x^2+2x-5)$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2}{e^x}$

Composition de limites

Méthode 6 p. 59

52 **1.** Dans chaque cas, déterminer u et v tels que $f(x) = v(u(x))$.

a) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2+3}$ **b)** $f : x \mapsto e^{-2x-1}$

c) $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **d)** $f : x \mapsto \sqrt{e^{-x}}$

2. En déduire, dans chaque cas, la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

53 Déterminer la limite en a des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2+5x+1}$ pour $a = +\infty$.

b) $g : x \mapsto e^{-2x^2+5}$ pour $a = -\infty$.

c) $h : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ pour $a = 0^+$ puis pour $a = 0^-$.

d) $k : x \mapsto e^{\frac{-2}{x-3}}$ pour $a = 3^+$ puis pour $a = 3^-$.

54 Déterminer la limite en a des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}-1} + 2$ pour $a = +\infty$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{1-2x}}$ pour $a = -\infty$.

c) $h : x \mapsto 3x^3 + \sqrt{\dfrac{5x+1}{x-1}}$ pour $a = 1^+$.

d) $k : x \mapsto e^{-2x-\sqrt{\frac{1}{x}}}$ pour $a = 0^+$.

55 **1.** Exprimer la suite (u_n) sous la forme $u_n = f(v_n)$ pour tout entier n.

a) $u_n = e^{-3n-1}$ **b)** $u_n = \sqrt{\dfrac{1}{4+n^2}}$

2. En déduire, dans chaque cas, la limite de (u_n)

56 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) $u_n = e^{-3n+2}$

b) $v_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c) $w_n = \sqrt{\dfrac{1}{3n-2}}$

d) $t_n = e^{\frac{1}{n+2}}$

Formes indéterminées

Méthode 7 p. 60 Méthode 8 p. 61

57 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{(1-x)^2}$.

1. Justifier que la limite est une forme indéterminée quand x tend vers 1.

2. Factoriser $x^2 - 3x + 2$ et simplifier $f(x)$

3. En déduire les limites à gauche et à droite quand x tend vers 1.

58 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-3x^2+5x+2}{x-2}$.

1. Justifier que la limite est une forme indéterminée quand x tend vers 2.

2. Factoriser $-3x^2 + 5x + 2$ et simplifier $f(x)$

3. En déduire les limites à gauche et à droite quand x tend vers 2.

59 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-3\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x^2-x+6}{(x+3)^2}$.

1. Justifier que la limite est une forme indéterminée quand x tend vers -3.

2. Factoriser $-x^2 - x + 6$ et simplifier $f(x)$

3. En déduire les limites à gauche et à droite quand x tend vers -3.

60 On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x) = -x^2 + 4x - 5$, $g(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ et $h(x) = 2x - 4x^4 + 1$.

1. Déterminer lesquelles de ces fonctions ont une limite indéterminée en $-\infty$.

2. Déterminer lesquelles de ces fonctions ont une limite indéterminée en $+\infty$.

3. Factoriser les expressions de ces trois fonctions.

4. En déduire les deux limites en $+\infty$ et en $-\infty$ pour chacune de ces fonctions.

61 On considère les fonctions f, g et h définies par

$f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3}$, $g(x) = \dfrac{x^2+5}{3-x}$ et $h(x) = \dfrac{2+x-x^2}{3+x^2}$.

1. Déterminer lesquelles de ces fonctions ont une limite indéterminée en $-\infty$.

2. Déterminer lesquelles de ces fonctions ont une limite indéterminée en $+\infty$

3. Factoriser et simplifier les expressions de ces trois fonctions.

4. En déduire les deux limites en $-\infty$ et $+\infty$ pour chacune de ces fonctions.

62 On considère la fonction f définie sur $[4\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-4}$.

1. Justifier que la forme est indéterminée en plus l'infini.

2. Multiplier par l'expression conjuguée pour simplifier l'écriture de $f(x)$.

3. En déduire la limite cherchée.

Utiliser la définition de limite

63 Soit $f : x \mapsto 3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$. TICE

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2. Démontrer ces conjectures à l'aide de la définition de la limite en l'infini.

Démo

64 En utilisant les définitions du cours, démontrer les propositions suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 3 = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} - 2 = -2$

65 Démontrer, en utilisant les définitions que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$.

66 Étudier l'existence des limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$. On explicitera l'asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$.

67 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - 2x}$ définie sur $\mathbb{R}$. TICE

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer la limite de f à droite et à gauche quand x tend vers 2.

2. Démontrer ces conjectures à l'aide de la définition de la limite à droite et à gauche en une valeur.

Démo

68 En utilisant les définitions du cours, démontrer les propositions suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{1}{x - 1} = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \dfrac{1}{(x + 2)^2} = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{-2}{(x - 1)^2} = -\infty$

Opérations sur les limites

69 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser l'équation des éventuelles asymptotes.

a) $f : x \mapsto 2x^3 + 3x - \dfrac{1}{x}$

b) $g : x \mapsto (e^{2x} - 1)(1 - e^x) + \dfrac{1}{x}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{-2}{x^3 + 2x} + \sqrt{x^2}$

d) $k : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 1} - 1} + e^x$

70 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.

2. Donner la limite de f en $+\infty$.

3. En déduire la limite en $-\infty$.

71 Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions ci-dessous. Préciser l'équation des éventuelles asymptotes.

a) $f : x \mapsto 4x^7 + 3x^5 - x$

b) $g : x \mapsto 3x^2 + 6x - \dfrac{1}{3 - x}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{4 + 6e^x}{(2 - 3e^{-2x})}$

d) $k : x \mapsto \dfrac{(e^x + 1)x}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

72 Déterminer les limites à droite et à gauche en a des fonctions suivantes. Préciser l'équation des éventuelles asymptotes et si la limite en a existe.

a) $f : x \mapsto \dfrac{-3}{6 + 3x}$ pour $a = 1$.

b) $g : x \mapsto (2x - 1)e^{-x}$ pour $a = 0$.

c) $h : x \mapsto \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ pour $a = -2$.

d) $k : x \mapsto \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$ pour $a = -1$.

73 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$.
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

74 Déterminer les limites de la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - (x + 1)e^x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

75 Déterminer les limites de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

76 Déterminer les limites à droite et à gauche en a des fonctions suivantes. Préciser l'équation des éventuelles asymptotes et si la limite en a existe.

a) $f : x \mapsto \dfrac{(x + 5)(x - 1)}{x^2 + 3x - 4}$ pour $a = -4$.

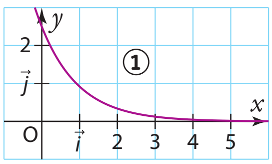
b) $g : x \mapsto \dfrac{(\sqrt{x} - 2)e^x}{4 - x}$ pour $a = 4$.

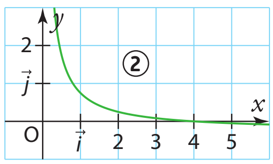
c) $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x - 1)^2}$ pour $a = 1$.

d) $k : x \mapsto \dfrac{xe^x}{x - \sqrt{x}}$ pour $a = 1$.

77 Associer à chaque fonction sa courbe représentative en justifiant.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{5}{2}e^{-x}$





Exercices d'entraînement

Formes indéterminées

78 **1.** Factoriser les expressions suivantes par le terme de plus haut degré ou par l'exponentielle ayant la puissance de plus haut degré.

a) $x^4 - 5x^3 + x - 1$ **b)** $-5x^4 + 3x^3 - x$

c) $e^{2x} - e^x$ **d)** $e^{4x} + e^{2x+1} - e^x - 3$

2. En déduire leur limite en $+\infty$ et $-\infty$.

79 **1.** Factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré, puis simplifier la fraction.

a) $\dfrac{2x-1}{3x+2}$ **b)** $\dfrac{x^2-3x-2}{-2-3x}$

c) $\dfrac{4-3x+x^3}{3-x^2+4x}$ **d)** $\dfrac{e^{3x}-e^x+1}{e^x-2e^{4x}}$

2. En déduire leur limite en $+\infty$ et $-\infty$.

80 Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes. En cas d'indétermination, la lever par une transformation algébrique.

a) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ **b)** $g : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 2x$

c) $h : x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{1-x}$ **d)** $k : x \mapsto \dfrac{e^{2x}+e^x-1}{e^x-3e^{2x}}$

81 **1.** Factoriser le numérateur et le dénominateur, puis simplifier le plus possible la fraction.

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ **b)** $\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-6x+4}$

2. En déduire leur limite à droite et à gauche en 1.

82 Calculer les limites à droite et à gauche en a des fonctions suivantes, en cas d'indétermination, la lever par une factorisation.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ pour $a = 1$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$ pour $a = 2$.

c) $h : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$ pour $a = -3$.

d) $k : x \mapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ pour $a = 1$ (uniquement à droite).

83 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2-x}$.

84 Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}(1-\sqrt{x})$.

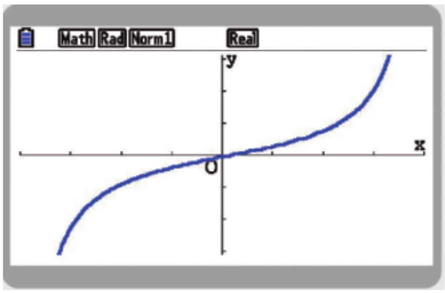
85 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Donner le plus grand ensemble de définition possible de f.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Que peut-on dire quant à d'éventuelles asymptotes ?

86 **1.** On considère une fonction f dont on a tracé la courbe représentative sur une calculatrice.



Quelles semblent être les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

2. On a $f : x \mapsto \dfrac{1-5x}{x^2-16}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Comment expliquer le constat fait à la question **1.** ?

87 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

2. En multipliant par le conjugué du dénominateur, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

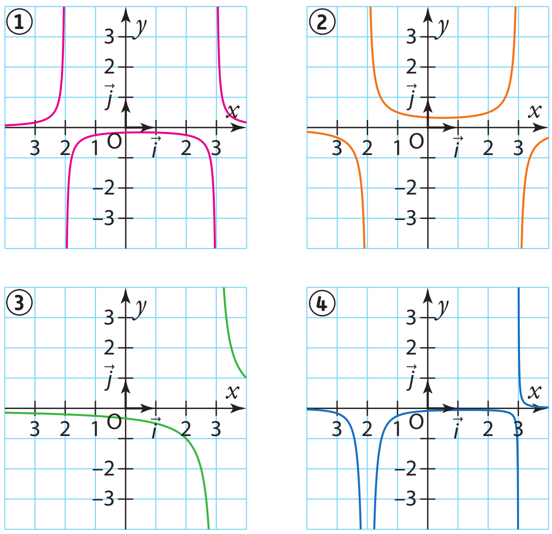
88 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}} - x$

89 Associer à chaque fonction sa courbe représentative en justifiant.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x-6}$ $g : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

$h : x \mapsto \dfrac{1}{(x-3)(x+2)^2}$ $k : x \mapsto \dfrac{-2}{(x+2)(x-3)}$



Comparaison

90 Déterminer par comparaison les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2x \cos x + 1)$

c) $\lim\limits_{\substack{x<1 \\ x \to 1}} \left(\dfrac{x^3 + \sin(x)}{x-1}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3+2}{(x+\cos x)^2}\right)$

91 Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$0 \leqslant \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$.

92 On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \dfrac{E\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x}$.

On admet que $x - 1 \leqslant E(x) \leqslant x$ pour tout réel x.

1. Établir l'encadrement $1 - \dfrac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2x}$.

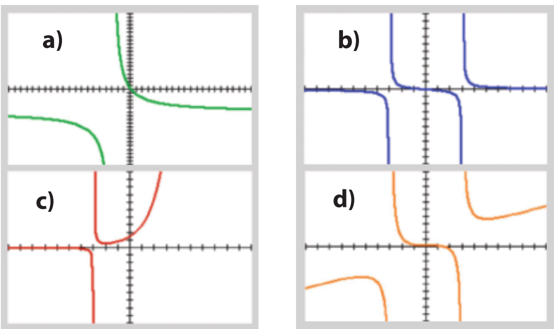
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Croissances comparées

93 Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 9}$ **2.** $g : x \mapsto \dfrac{90e^x}{20x + 60}$

3. $h : x \mapsto \dfrac{0{,}5x^3 - 2}{x^2 - 9}$ **4.** $k : x \mapsto \dfrac{1 - 6x}{x + 3}$



94 Déterminer les limites de ces fonction en $-\infty$ et en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$

b) $g : x \mapsto e^x + x$

c) $h : x \mapsto e^{2x} - x e^x + 1$

d) $k : x \mapsto x^4 - 2x e^x + e^2$

Composition de limites

95 Déterminer les limites des fonctions suivantes en a.

a) $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 3x - 6}$ pour $a = -\infty$ et pour $a = +\infty$.

b) $g : x \mapsto e^{-\frac{1}{(x-2)}}$ pour $a = 2$ à droite et à gauche.

c) $h : x \mapsto \sin\left(\dfrac{3\pi x - 2\pi + 1}{1 - 6x}\right)$ pour $a = -\infty$ et pour $a = +\infty$.

d) $g : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}$ pour $a = 0$ à droite et à gauche.

96 Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$. Vérifier que, si $x > 0$, on a $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}(1-x)e^{1-x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Étude de fonctions

97 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-4x - 9}{-3x - 7}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Donner l'expression de $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Tracer le tableau de variations de f.

98 Dresser le tableau de variations complet de la fonction $f : x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

99 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-2}{2x+8}$.

1. Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède deux asymptotes : une d'équation $y = \dfrac{1}{2}$ et une d'équation $x = -4$.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote horizontale.

100 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

1. Montrer que f possède une asymptote horizontale et préciser son équation.

2. Calculer les limites à droite et à gauche de f en 2. La courbe de f possède-t-elle une asymptote verticale ? Si oui, préciser son équation.

3. La courbe de f possède-t-elle une autre asymptote verticale ? Justifier.

4. Dresser le tableau de variations de f.

5. En déduire une allure de la courbe de f.

Travailler le Grand Oral

101 Présenter une démonstration de la règle d'additivité des limites : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell'$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$.

102 **1.** Faire une présentation sur la règle de l'Hôpital en précisant les conditions d'utilisation.

2. Donner des exemples résolus avec et sans cette règle.

Exercices bilan

103 Calcul de limite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x^2}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$

2. Montrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.

D'après Bac S, Pondichéry, 2009.

104 Suite de fonctions

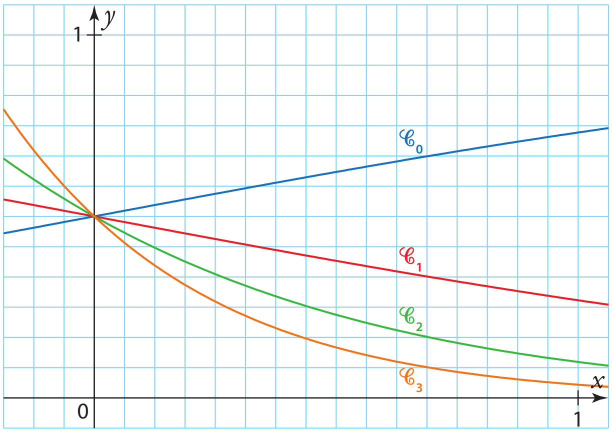
Soit n un entier naturel.

On note f_n la fonction définie sur l'ensemble des réels par :

$$f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous.



1. Démontrer que pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun dont on précisera ses coordonnées.

2. On étudie la fonction f_0.

a) Étudier le sens de variation de f_0.

b) Préciser les limites de f_0 en $-\infty$ et $+\infty$.

Interpréter graphiquement ces limites.

c) Dresser le tableau de variation de f_0 sur $\mathbb{R}$

3. On étudie la fonction f_1.

a) Démontrer que $f_0(x)=f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b) En déduire les limites de f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

c) Donner une interprétation géométrique de la question

4. a) pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

5. On étudie la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x)=\frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$$

b) Étudier les limites de f_n en $-\infty$ et $+\infty$.

c) Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$

D'après Bac S, Centres étrangers, 2009.

105 Évolution d'une proportion

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $p(x)=\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

1. Quel est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.

2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;+\infty[$.

b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.

c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

D'après Bac S, Antilles Guyane, 2019

106 Taux d'alcoolémie

Algo

Dans le cadre d'une étude visant à limiter la consommation d'alcool, on étudie la concentration d'alcool dans le sang d'un étudiant de corpulence moyenne. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(t)=2te^{-t}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de de l'étudiant est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque f tend vers $+\infty$ et en déduire celle que $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g · L^{-1}.

a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) On donne l'algorithme en langage naturel suivant où f est la fonction définie par $f(t)=2te^{-t}$.

```
t←3,
p←0,25
C←0,21
Tant que C>5×10⁻³ faire :
      t←t+p
      t←f(t)
Fin Tant que
Afficher t
```

Recopier et compléter le tableau suivant en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

D'après Bac S Polynésie 10 juin 2016

Préparer le BAC L'essentiel

Limites des fonctions de référence

• Fonction inverse

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ • $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ • $\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

• Fonction puissance

- pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$
- si n est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$

et si n est impair $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$

• Fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

• Fonction racine carrée

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

Opérations sur les limites

Somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$+\infty$	**indéterminée** « $\infty - \infty$ »	$-\infty$	$-\infty$

Produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	ℓ'	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) \times g(x))$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$ **règle des signes**	$\pm\infty$ **règle des signes**	**indéterminée** « $0 \times \infty$ »

Quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ **règle des signes**	$\pm\infty$ **règle des signes**	**indéterminée** « $\frac{0}{0}$ »	**indéterminée** « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Lever une forme indéterminée

- Factoriser par le terme de plus haut degré.
- Multiplier par le conjugué.
- Utiliser le théorème d'encadrement ou de comparaison
- Utiliser les croissances comparées

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de…		Parcours d'exercices
▶ Déterminer une limite en l'infini	Méthode 1	1, 2, 33, 34
▶ Déterminer une limite en un réel	Méthode 2	3, 4, 36, 38
▶ Conjecturer la présence d'asymptotes	Méthode 3	5, 6, 39, 40
▶ Déterminer une limite à l'aide des opérations sur les limites	Méthode 4	7, 8, 42, 43, 45
▶ Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison	Méthode 5	12, 13, 47, 48, 51
▶ Déterminer une limite en utilisant la composée de fonctions.	Méthode 6	14, 15, 52, 53
▶ Lever une indétermination	Méthode 7 Méthode 8	16, 17, 20, 21, 57, 58, 62

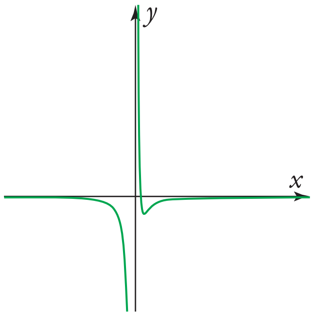
EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-s02-06

QCM Pour les exercices suivants, choisir la bonne réponse.

	A	B	C	D
107 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2\right)$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
108 $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1-2x}{1-x}$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
109 $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
110 La courbe de $f : x \mapsto 2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$ admet une asymptote d'équation :	$x = 0$	$y = 0$	$x = 2$	$y = 2$
111 $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 + 2x^3 - 1)$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
112 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-6}{1+2x}$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
113 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)+1}{x^2}$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
114 $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$
115 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2+x}{x^3-1}}\right)$ est égale à :	$-\infty$	0	1	$+\infty$

116 Observations graphiques

Soit f une fonction admettant la représentation graphique ci-contre.



Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. On peut conjecturer que :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

2. On peut conjecturer que :

a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

b $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

c $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$

d $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

3. f semble admettre :

a une asymptote. b deux asymptotes.

c trois asymptotes. d quatre asymptotes.

Méthode 1 p. 53

117 Courbe représentative

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2+5x+6}$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La courbe représentant la fonction f :

a n'admet pas d'asymptote horizontale

b admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

c admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

d admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

2. La courbe représentant la fonction f :

a n'admet pas d'asymptote verticale

b admet exactement une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

c admet exactement une asymptote verticale d'équation $x = -3$.

d admet exactement deux asymptotes verticales d'équations respectives $x = -3$ et $x = -2$.

Méthode 8 p. 61

118 Opérations sur les limites

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + x + \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 - 3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5-2x}{2x+1}$

Méthode 4 p. 57

119 Comparaison de fonctions

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sin x)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \cos x)$

Méthode 5 p. 59

120 Limites et croissances comparées

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

Méthode 5 p. 59

121 Composition de limites

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{-\frac{1}{x}}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

Méthode 6 p. 59

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\sqrt{2x+1}}$ est égale à :

a $-\infty$ b $+\infty$ c 0 d 1

Méthode 7 p. 60

Exercices vers le supérieur

122 Calcul de limites

Calculer les limites en 0 suivantes.

a) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}$

b) $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^n}}{x}$ pour n entier naturel

c) $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

d) $k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$

123 Contres-exemples

Justifier que chacune des propositions suivantes sont fausses en exhibant un contre-exemple

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Alors f est positive sur $\mathbb{R}$.

124 Utiliser les définitions

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x+2}.$$

A ▶ Préliminaires

1. Soit $M > 0$, calculer le discriminant de l'équation $x^2 + (3 - M)x + 1 - 2M = 0$ et justifier qu'il est positif.

2. On cherche à montrer avec la définition que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x+2} = 0$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier pourquoi, si $x > 0$, on a l'équivalence $\dfrac{-1}{x+2} \in]-\varepsilon\,;\varepsilon[\Leftrightarrow -\varepsilon < \dfrac{-1}{x+2} < 0$.

b) Résoudre alors cette inéquation et en déduire le résultat.

B ▶ Démonstrations

1. Démontrer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. Soit $M > 0$.

a) Résoudre l'équation $f(x) > M$.

b) En déduire de par la définition que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$.

2. Soit $m < 0$.

a) Résoudre l'équation $f(x) < m$.

b) En déduire de par la définition que $\lim\limits_{\substack{x > -2 \\ x \to -2}} f(x) = -\infty$.

125 Asymptotes paramétrées

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax^2-(3a+1)x+2}{x-1}$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a a-t-on $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de a $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ?

3. Pour quelle(s) valeur(s) de a $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote verticale ?

Pour les exercices 126 à 130 on précise la définition suivante : une droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0$.

126 Asymptote oblique (1)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{2x-2}$.

Déterminer l'existence de trois réels a, b et c tels que

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-2}$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique dont on précisera une équation.

127 Asymptote oblique (2)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+2}{2x}$.

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

c) Déterminer les éventuelles asymptotes horizontales et verticales de la courbe de f.

2. Soit d la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\right)$.

b) On vient de montrer que d est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de d.

3. À l'aide des asymptotes et du tableau de variations, tracer une allure de $\mathscr{C}_f$.

128 Asymptote oblique (3)

On définit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+2x+5}{2x+2}$.

1. Étudier l'existence d'une asymptote verticale à la courbe de f.

2. Montrer que la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe de f.

3. Déterminer le point d'intersection des deux asymptotes et montrer qu'il s'agit d'un centre de symétrie de la courbe.

129 Branches infinies (1)

Soit les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les limites en $+\infty$ de f et g.

Ces deux fonctions ayant la même limite infinie en $+\infty$, nous allons les différencier par leur vitesse de croissance.

2. Montrer les résultats suivants.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$

Étant donné ces résultats on peut affirmer que, en $+\infty$:

• f croît moins vite que la fonction $x \mapsto x$, on dit que la courbe de f admet une branche parabolique d'axe (Ox).

• g croît plus vite que la fonction $x \mapsto x$, on dit que la courbe de g admet une branche parabolique d'axe (Oy).

On peut retrouver les mêmes résultats en $-\infty$.

3. Déterminer les éventuelles asymptotes et branches paraboliques en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - 3x}{x+1}$ **b)** $g : x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x} + x - 4}{x+2}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{e^x + 1}{x^2}$ **d)** $k : x \mapsto \sqrt{|x|} + \sin(x)$

130 Branches infinies (2)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 + x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + x\sqrt{x}}{x+1}$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ et $\dfrac{g(x)}{x}$ tendent, lorsque x tend vers $+\infty$, vers un même réel que l'on notera a.

c) En $+\infty$, les courbes de f et g admettent-elle une branche parabolique d'axe (Oy) ? d'axe (Ox) ?

Dans le cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ (a réel), la vitesse de croissance de f est identique à la fonction $x \mapsto ax$, il est donc possible que f admette une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

2. Soit d une droite d'équation $y = ax + b$. Supposons que d soit une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

a) D'après l'affirmation ci-dessus, que vaut a ?

b) Montrer que $f(x) - (ax+b) = \dfrac{-(1+b)x - b}{x+1}$ pour tout réel x.

c) Déduire de ce qui précède que la courbe de f admet une asymptote oblique et préciser son équation.

3. En appliquant le même raisonnement que pour la question **2.**, montrer que la courbe de g n'admet pas d'asymptote oblique.

On dit que la courbe de g admet une branche parabolique d'axe $y = ax$.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - ax)$

Que retrouve-t-on pour f ?

131 Fonction paire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que f admet la limite ℓ en $-\infty$.

132 Utilisation de la dérivée

1. On souhaite déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9-x} - 3}{x}$.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{9-x}$.

a) Calculer $\dfrac{f(0+x) - f(0)}{x}$.

b) Que rappelle la formule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(0+x) - f(0)}{x}$?

c) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9-x} - 3}{x}$.

2. Par le même raisonnement, déterminer :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - e}{x - 1}$

133 Règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital est une propriété permettant de lever certaines indéterminations.

Son énoncé est le suivant.

> Soit f et g définies et dérivables sur un intervalle contenant un réel a et telles que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$ et $g'(a) \neq 0$.
>
> Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

1. En utilisant la règle de L'Hôpital, calculer :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x^2}{e^x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x e^{x^2} - 1}{e^x - 1}$

2. a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{3x+1}{x^2 - 1}$.

b) A-t-on le même résultat avec la règle de l'Hôpital ? Pourquoi ?

3. Soit $h : x \mapsto \dfrac{x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$.

a) Simplifier l'expression de h puis, en posant $X = \dfrac{1}{x}$, déterminer $\lim\limits_{\substack{x > 0 \\ x \to 0}} h(x)$.

b) Soit $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g : x \mapsto x$.

Montrer que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

> **Coup de pouce** On pourra utiliser la formule suivante. Pour toute fonction dérivable u, $(\sin u)' = u' \times \cos u$.)

c) En calculant $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)}$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f'(v_n)}{g'(v_n)}$, où (v_n) est une suite à choisir, démontrer que $\dfrac{f'}{g'}$ n'a pas de limite à droite de 0.

d) Comment s'explique la différence entre les résultats des questions **3. a)** et **c)** ?

Exercices vers le supérieur

134 Coniques

Dans un plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y^2 - x^2 = 9$.

1. Tracer $\mathcal{H}$ avec la calculatrice en prenant comme intervalle $[-6 ; 6]$ pour x et $\times[-7 ; 7]$. A pour y.
Que peut-on conjecturer en $-\infty$ et $+\infty$?

2. Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 9}$ définie sur l'ensemble des réels.
Montrer que $\mathcal{H}$ est l'union de $\mathcal{C}_0$, la courbe représentative de f et de $\mathcal{C}_1$, celle de $-f$.

3. Dresser le tableau de variations de f.
Préciser ses limites en $-\infty$ et $+\infty$

4. Soit d la droite d'équation $y = x$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (-f(x) - x)$ et Qu'en déduit-on sur $\mathcal{C}_0$ et d ? et sur $\mathcal{C}_1$ et d ?

5. Déterminer l'équation de la deuxième asymptote, en justifiant.
$\mathcal{H}$ est une hyperbole, elle fait partie des coniques, à savoir l'intersection entre un cône et un plan de l'espace.

135 Calcul de limites (1) MPSI PCSI

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x^n - a^n}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x E(x)$ où $E(x)$ est la fonction partie entière.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} - \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ où $a > 0$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$.

136 Calcul de limites (2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\sqrt{x + n} - \sqrt{x}$.

2. En déduire :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 2} + \ldots + \sqrt{x + n} - n\sqrt{x}\right)$.

137 Partie entière MPSI PCSI

Soit a et b des réels strictement positifs.

On pose, pour tout $\in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{a} E\left(\dfrac{b}{x}\right)$ et $g(x) = \dfrac{b}{x} E\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

1. Etudier les limites de f et g en 0 si $a = 1$ et $b = 2$.

2. Reprendre la question précédente dans le cas général.

138 Fonction périodique MPSI PCSI

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T.
On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner la limite de la suite de terme général $x + nT$.

2. En considérant $f(x + nT)$, démontrer que la fonction f est constante.

139 Cissoïde de Dioclès TICE

Le problème de la duplication du cube, consistant à tracer à la règle et au compas le nombre $\sqrt[3]{2}$ (c'est-à-dire le nombre a tel que $a^3 = 2$), a longtemps tenu les mathématiciens en échec jusqu'à ce que l'on démontre l'impossibilité d'une telle construction.
La Cissoïde de Dioclès en est l'une des tentatives.

Dioclès

A ▶ Construction de la Cissoïde

Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on considère la droite d d'équation $x = 1$ et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OI].
Un point P sur d détermine une droite (OP), celle-ci coupe $\mathcal{C}$ en un point N, soit alors le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP}$.

1. Construire cette figure avec **Geogebra**.
Afficher la trace du point M puis faire varier P sur la droite d.
Cette courbe est la cissoïde de Dioclès.

2. Tracer sur cette même feuille la courbe représentative de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1 - x}}$.
Que constate-t-on ?
Quelle fonction est représentée par l'autre morceau de la cissoïde ?

B ▶ Équation de la Cissoïde

Soit un réel t tel que $P(1 ; t)$.

1. a) Donner une équation cartésienne de (OP) en fonction de t.
b) Donner une équation du cercle $\mathcal{C}$.
c) En déduire les coordonnées du point N en fonction de t.

2. En déduire que $M\left(\dfrac{t^2}{1 + t^2} ; \dfrac{t^3}{1 + t^2}\right)$

3. Montrer que les coordonnées de M vérifient l'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.
On en déduit que la cissoïde est contenue dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des points du plan défini par l'équation $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.

4. Montrer que $\mathcal{E}$ est la réunion de la courbe représentative de f, définie précédemment, et de sa symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

5. a) Tracer le tableau de variations de la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1 + t^2}$
en précisant ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
b) En déduire que, quand t varie sur $\mathbb{R}$, $g(t)$ varie sur $[0 ; 1[$.
c) Justifier que la cissoïde est bien $\mathcal{E}$ en entier.

C ▶ Détermination de $\sqrt[3]{2}$

1. Montrer que (AM) coupe l'axe des ordonnées au point $R(0 ; t^3)$.

2. En déduire une manière d'obtenir géométriquement $\sqrt[3]{2}$ grâce à la cissoïde.

140 Fonctions équivalentes

Soit f et g deux fonctions telles que $g(x) \neq 0$ pour $x > m$ avec m réel.
On dit que f et g sont équivalentes en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

1. Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en $+\infty$.

a) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2}}$ et $g : x \mapsto 1$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$ et $g : x \mapsto 2\sqrt{x}$.

2. Déterminer une fonction g simple équivalente en $+\infty$ à la fonction f proposée.

a) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2+2x-1}{x+2}$

c) $f : x \mapsto x + \sin(x)$ **d)** $f : x \mapsto ax + \sqrt{x^2+1}$ avec a réel :

141 Fonctions asymptotiques

On dit que deux fonctions f et g sont asymptotiques en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

Montrer que les fonctions f et g suivantes sont asymptotiques.

a) $f : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

b) $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + \cos(x)}$ et $g : x \to x^2$.

142 Calcul de limites (3) BCPST

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}} \right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

143 Étude qualitative

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est définie sur l'ensemble des réels.
2. Déterminer son tableau de variations
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sqrt{1+x^2}) = 0$ pour $x < 0$.
b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
5. Tracer une allure de la courbe de f.

144 Triangle rectangle

On considère dans le plan un triangle rectangle dont les mesures des côtés de l'angle droit sont 1 et un nombre x. L'hypoténuse est donnée fonction de x par $h(x)$.
Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x(h(x) - x)$.

145 Fonction homographique MPSI PCSI

On considère une fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$ telle que :
- la courbe représentative de f admet une asymptote d'équation $y = 2$ (en $-\infty$ et en $+\infty$) et une asymptote d'équation $x = -1$.
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Déterminer les réels b, c et d.

146 Fonction exponentielle (1)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^n}$, où n est un entier naturel non nul.

1. a) Quel est le plus grand ensemble de définition possible de f ?
b) Quel est le plus grand ensemble de dérivabilité possible de f ?
2. On suppose que n est pair.
a) Dresser le tableau de variations de f sans préciser les limites aux bornes.
b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et compléter le tableau.
3. Reprendre les questions **2. a)** et **b)** en supposant n impair.

147 Fonction exponentielle (2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x-1} + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
Montrer que $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$ pour tout réel x.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations sur l'ensemble des réels.

D'après Bac S, Antilles-Guyane, juin 2012.

148 Vitesse d'un véhicule Physique

Un véhicule se rend d'une ville A à une ville B à une vitesse moyenne de 80 km·h^{-1}, puis revient en ville A à une vitesse moyenne de x km·h^{-1}.
On s'intéresse à la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour $v(x)$ en fonction de x.
1. Sur quel intervalle varie x ?
2. Soit d la distance entre les villes A et B
a) Exprimer le temps t_a de parcours à l'aller en fonction de d.
b) Exprimer le temps t_r de parcours au retour en fonction de d et x.
b) En déduire le temps total t de parcours (aller-retour) en fonction de d et x.
3. En déduire la relation $\dfrac{2}{v(x)} = \dfrac{1}{80} + \dfrac{1}{x}$ puis l'expression algébrique de $v(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de v sans préciser ses limites aux bornes.
5. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to 0}} v(x)$.
Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.

Travaux pratiques

Physiques Algo TICE 55 min Chercher Raisonner

1 Datation au carbone 14

Le principe de datation au carbone 14 repose sur la mesure de la proportion de carbone 14 contenue dans un organisme mort pour estimer sa date de décès.
En effet, tant qu'un organisme est vivant, sa proportion de carbone 14 est la même que dans la biosphère, lorsqu'il meurt, cette concentration décroît suivant la fonction $C : t \mapsto C_0\, e^{-\lambda t}$ où t est le temps passé (en années) depuis la mort de l'organisme, C_0 est la concentration de carbone 14 au moment de la mort ($C_0 \approx 10^{-12}$) et λ est la constante radioactive du carbone 14 ($\lambda \approx 1{,}21 \times 10^{-4}\text{an}^{-1}$).

A ▸ Étude de la fonction C

1. Déterminer les variations de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} C(t)$.
En déduire le tableau de variations de la fonction C sur $[0\,;+\infty[$.

B ▸ Recherche de seuil

Un fossile a été découvert, l'échantillon prélevé présente une concentration de carbone de 3×10^{-14}.
On souhaite dater cet échantillon.
1. Ouvrir un logiciel avec un tableur.
Dans les colonnes A et B, dresser le tableau de valeur de la fonction C pour t allant de 0 à 30 000 avec un pas de 1 000.

Coup de pouce Quelle que soit la valeur de X (nombre, référence de case), e^X s'écrit dans un tableur EXP(X).

2. À l'aide du tableau déterminer, au millier près, la valeur du seuil t_0 à partir duquel $C(t) \leqslant 3 \times 10^{-14}$ pour $t \geqslant t_0$.
Ce seuil t_0 est le temps passé depuis la mort de l'organisme fossilisé (au millier d'années près).
3. Affiner votre tableau afin de déterminer le temps passé depuis la mort de l'individu fossilisé à l'année près.

C ▸ Programme de recherche de seuil

On souhaite automatiser cette recherche de seuil.
1. Écrire en langage **Python** une fonction `datation(C)`, où c désigne une concentration $C < 10^{-12}$), renvoyant le seuil t_0 (au millier près) à partir duquel $c(t) \leqslant C$ pour $t \geqslant t_0$.
Tester le programme avec $C = 3 \times 10^{-14}$.

Coup de pouce En **Python** e^x s'écrit `math.exp(x)`, à condition d'ajouter `import math` en première ligne de code.

2. En ajoutant des boucles `while`, augmenter la précision de votre programme à l'année près.
3. Dans le cas général, écrire une fonction `seuil(Y,p)`, où `Y` est un nombre réel et `p` un entier naturel, renvoyant le seuil x_0, à 10^{-p} près, à partir duquel on a $C(x) \leqslant Y$ pour tout $x \geqslant x_0$.

TICE 30 min Chercher Raisonner

2 Critère de Cauchy

Le critère de Cauchy permet de déterminer si une fonction admet une limite finie en un point sans nécessairement déterminer cette limite.
Son énoncé est le suivant.

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à l'intervalle I.
> f admet une limite finie en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un seuil η tel que, pour tout réel x et y,
> Si $|x - a| < \eta$ et $|y - a| < \eta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Autrement dit, f admet une limite finie en a si $f(x) - f(y)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers a.
On va appliquer ce critère sur quelques fonctions, en commençant par $f : x \mapsto x^2$

1. Rappeler les limites de f à droite et à gauche de 0.

2. Ouvrir un tableur et construire le tableau suivant.

Augustin-Louis Cauchy

TICE
Critère de Cauchy
lienmini.fr/maths-s02-07

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	y \ x	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0	–0,01	–0,02	–0,03	–0,04	–0,05
2	0,05											
3	0,04											
4	0,03											
5	0,02											
6	0,01											
7	0											
8	–0,01											
9	–0,02											
10	–0,03											
11	–0,04											
12	–0,05											

Dans ce tableau on a consigné les valeurs de x sur la première ligne et celles de y sur la première colonne.
On va maintenant calculer $f(x) - f(y)$ sur chaque case suivant les valeurs de x et y du tableau.

3. Écrire la formule `=B$1^2-$A2^2` dans la cellule B2, puis étirer cette formule sur toutes les cases vides du tableau.

a) À quoi correspond la valeur en C2 pour la fonction f ?

b) Pourquoi pouvait-on s'attendre à n'avoir que des 0 sur les diagonales de ce tableau ?
Ces valeurs ne seront donc pas prises en compte dans l'étude pour la suite.

c) Quelle zone du tableau faut-il regarder pour observer le comportement de $f(x) - f(y)$ quand x et y se rapprochent de 0 ?

d) En observant cette zone, que peut-on supposer quant à la limite de $f(x) - f(y)$ quand x et y tendent vers 0 ?
Que peut-on en déduire comme hypothèse concernant la limite de f en 0 ?
Est-ce cohérent avec la limite calculée à la main ?

4. En effaçant les cases non grises puis en complétant le tableau avec une formule appropriée, émettre une conjecture sur l'éventuelle limite en 0 de g définie par $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ en utilisant le critère de Cauchy et vérifier la cohérence de votre résultat avec celui trouvé à la main.