2

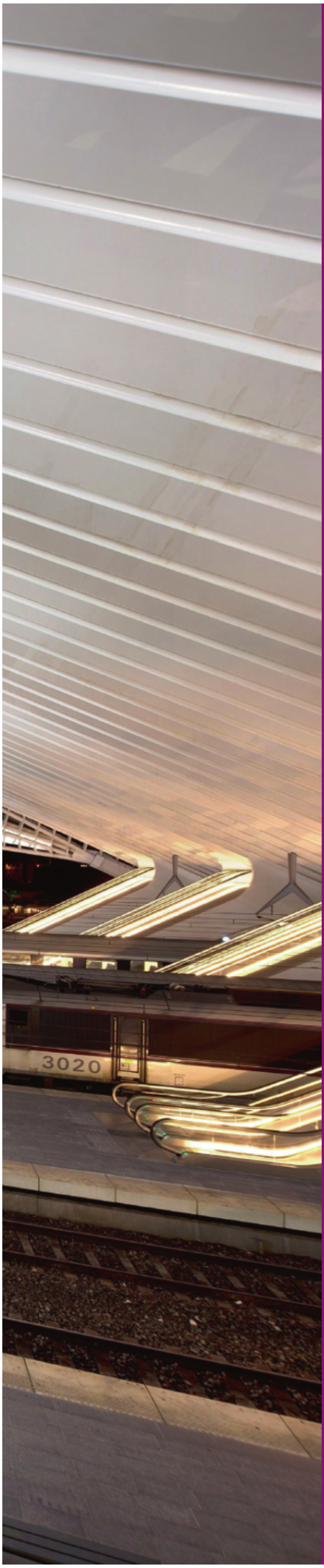
Limites de fonctions

La gare des Guillemins de Liège (Belgique) a été inaugurée en 2009. Elle est l'œuvre de l'architecte espagnol Santiago Calatrava. Le choix du blanc et l'absence de façade accentuent l'impression de légèreté de cette œuvre. La forme ressemble à celle d'un coquillage ou d'une vague, mais on peut aussi y apercevoir des courbes harmonieusement disposées qui semblent converger vers une même limite.

D'autres courbes représentatives de fonctions partagent-elles cette propriété ?
Comment les reconnaître ?

↪ Activité 1 p. 50

VIDÉO
Maquette virtuelle de la gare de Liège
lienmini.fr/maths-s02-01



Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s02-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des limites

Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}+\mathrm{e}^{-n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^n+1)\left(1-\sqrt{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^3-n$

2 Étudier les variations de fonctions

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^3+3x^2-9x+1$, $g : x \mapsto \dfrac{3x-2}{4x-1}$ et $h : x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

1. Déterminer l'expression de f' et en déduire les variations de f sur son ensemble de définition.

2. Faire de même pour g et h.

3. Tracer une allure de la courbe représentative de ces deux fonctions dans un repère.

3 Manipuler des expressions algébriques

1. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x+1)(-3x^2+4x-2)$

b) $\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{2-x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}}\right)$

c) $\left(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{2x-1}\right)^2$

2. Factoriser les expressions suivantes.

a) $8x^3+6x^2-12x$

b) $\mathrm{e}^{6x}-4\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{9x}$

c) $\mathrm{e}^{2x}-49x^2$

3. Pour chaque quotient, simplifier le dénominateur en multipliant par la quantité indiquée.

a) $\dfrac{2-x}{\sqrt{x}-4}$ (Multiplier par $(\sqrt{x}+4)$).

b) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}$ (Multiplier par $(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})$).

4 Encadrer des fonctions

1. Étudier la position relative de la courbe de $f : x \mapsto x^2-2x+4$ et de la droite d d'équation $y=2x+1$

2. a) Justifier que, pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{2x+3}{3x+4} \geqslant 0$.

b) Montrer que $\dfrac{2x+3}{3x+4} \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 0$.

3. Dans chaque cas, encadrer la fonction f par deux autres fonctions pour tout réel x.

a) $f : x \mapsto x+\cos(x)$

b) $f : \mapsto x\sin(x)$

c) $f : x \mapsto \dfrac{\cos^2(x)}{x^2+1}$

Activités

TICE 35 min

1 Découvrir la notion d'asymptotes et de limites de fonctions

On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $g : x \mapsto \frac{\sin(5x)}{x} + 10$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$.

Coup de pouce Pour tracer la courbe représentative de *h*, écrire $\boxed{\text{h(x) = sqrt(x)}}$ dans la barre de saisie.

A ▸ Observations graphiques

1. Ouvrir le logiciel **Geogebra** et tracer les courbes représentatives de *f*, *g* et *h*.

2. À l'aide de l'outil réduction, dézoomer jusqu'aux marques – 200 et 200 en abscisses.

a) À quoi ressemblent les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* à leurs extrémités ? (Les faire afficher séparément.)

b) Peut-on faire la même affirmation pour la courbe de *h*?
Lorsque x tend vers l'infini, les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* se rapprochent de plus en plus d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.
On dit dans ce cas que les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* possèdent une **asymptote horizontale**.

3. Relever graphiquement l'équation de chaque asymptote observée.

B ▸ Observations numériques

1. Ouvrir le tableur de **GeoGebra.**

a) Dans la colonne A, écrire la liste de nombres 10, 20, 30, ..., 300.

b) Écrire dans la colonne B les images de ces nombres par la fonction *f*.

c) De même, calculer les images par *g* et par *h* respectivement dans les colonnes C et D.

2. Parmi les trois fonctions précédentes, on dit que certaines ont une **limite finie** et que d'autres ont une **limite infinie**.
Quelle(s) fonction(s) semble(nt) avoir une limite infinie en $+\infty$? une limite finie ? (Préciser la valeur de la limite dans ce cas.)

↪ Cours 1 p. 52

TICE 20 min

2 Découvrir la notion de limite en un point

On reprend les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sin(5x)}{x} + 10$ de l'activité précédente.

1. Ces fonctions semblent-elle définies en 0 ? Justifier.

2. Ouvrir la partie tableur de **Geogebra**. On peut approcher 0 de deux manières différentes :
• en décroissant à partir d'un nombre positif (« depuis la droite »).
• en croissant à partir d'un nombre négatif (« depuis la gauche »).

3. Nous allons commencer par approcher 0 « depuis la gauche ».

a) Entre A1 et A31 écrire la liste des nombres – 0,3 ; – 0,29 ; – 0,28 ; ... ; – 0,01 ; 0.

b) Dans les colonnes B et C, faire calculer les images des nombres de la colonne A respectivement par *f* et *g*.

c) Comment semblent se comporter les images par *f* lorsque l'on se rapproche de 0 « depuis la gauche » ? Que dire des images par *g* ?

4. Approchons maintenant 0 « depuis la droite ».

a) Entre A31 et A61 écrire la liste des nombres 0 ; 0,01 ; 0,02 ; ... ; 0,29 ; 0,3.

b) En procédant de la même manière, observer le comportement des images par *f* et *g* lorsque l'on se rapproche de 0 « depuis la droite ». Est-ce le même comportement que précédemment ?

↪ Cours 2 p. 54

TICE 30 min

3 Effectuer des opérations sur les limites

On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $h : x \mapsto x$ et $k : x \mapsto x^2$.

1. Préciser les limites de f, g, h et k en 0 et en $+\infty$.

2. Conjecturer les limites de sommes suivantes à l'aide de la question précédente et vérifier, le cas échéant, avec la calculatrice ou **GeoGebra**.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + h(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) + k(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} k(x) + h(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) + k(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) + h(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + h(x)$ **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) + g(x)$

3. Conjecturer les limites de sommes suivantes à l'aide de la question précédente et vérifier, le cas échéant, avec la calculatrice ou **GeoGebra**.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \square\, h(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \square\, k(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \square\, k(x)$ **d)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \square\, k(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x) \square\, h(x)$ **f)** $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) \square\, h(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \square\, h(x)$ **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) \square\, k(x)$

↪ Cours 4 p. 56

30 min

4 Déterminer des limites de de fonctions rationnelles

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 - x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4}$.

1. Vérifier que le calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ conduit à une forme dite indéterminée.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x^2}\right)$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

> **Coup de pouce** Factoriser le numérateur par x^3 et le dénominateur par x^2.

↪ Cours 4 p. 56

TICE 30 min

5 Encadrer et comparer des fonctions

On considère les fonctions $f : x \mapsto x + 10 + 10\sin(x)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(10x)}{x}$.

A ▸ Utilisation des outils acquis et des observations graphiques

1. Peut-on déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ à partir d'opérations sur les limites ?

2. Ouvrir le logiciel **GeoGebra** et y tracer les courbes représentatives des fonctions f et g. Quelles conjectures peut-on émettre quant à leur comportement en $+\infty$?

B ▸ Démonstration algébrique

1. À l'aide d'un encadrement de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, montrer les affirmations suivantes.

a) $f(x) \geqslant x$ pour tout réel x. **b)** $-\dfrac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout réel x non nul.

2. Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$? Vérifier graphiquement.

↪ Cours 5 p. 58

Cours

1 Limite d'une fonction en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[b\,;+\infty]$
(b pouvant ne pas être compris et pouvant être $-\infty$).

Définition Limite infinie

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,
lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.
C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$.

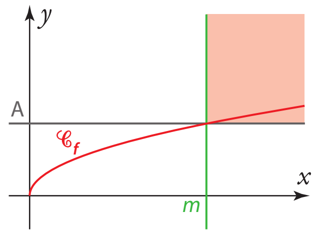
Exemple

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc si $A = 100$ alors,

pour $x > 10\,000$ on a $\sqrt{x} > \sqrt{10\,000}$ soit $\sqrt{x} > 100$.

Ce raisonnement peut se poursuivre quelle que soit la valeur de A
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Définition Limite finie en l'infini

On dit que $f(x)$ tend vers ,quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$,
lorsque tout intervalle ouvert contenant , contient $f(x)$ pour x assez grand.
C'est-à-dire que pour tout intervalle ouvert I contenant x, il existe un réel m tel que si $x > m$ alors $f(x) \in$ I.

Remarque On définit de la même manière qu'en $+\infty$ mais avec des réels x négatifs et f définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,; b]$ la limite d'une fonction f en $-\infty$.

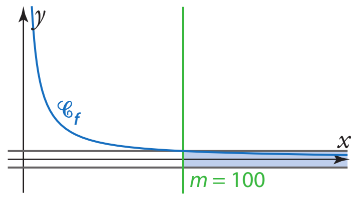
Exemple

On souhaite étudier le comportement de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$.

Si on considère l'intervalle $]-0{,}01\,; 0{,}01[$ alors on constate que,

pour $x > 100$ on a $-0{,}01 < \dfrac{1}{x} < 0{,}01$.

On montre que, quel que soit l'intervalle I ouvert contenant 0,
on peut trouver une valeur de m assez grande telle que I contient
toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x > m$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.



Définition Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$,
est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple

La courbe représentative de la fonction inverse admet donc la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$ (et en $-\infty$).

C'est-à-dire que la courbe se rapproche de la droite pour x assez grand positif (et négatif), comme on le constate sur la figure précédente.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer une limite en l'infini

Énoncé

On considère les fonctions f et g dont les courbes représentatives, nommées respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, sont tracées dans le repère ci-contre.

1. Déterminer graphiquement à partir de quelle valeur de x on a :

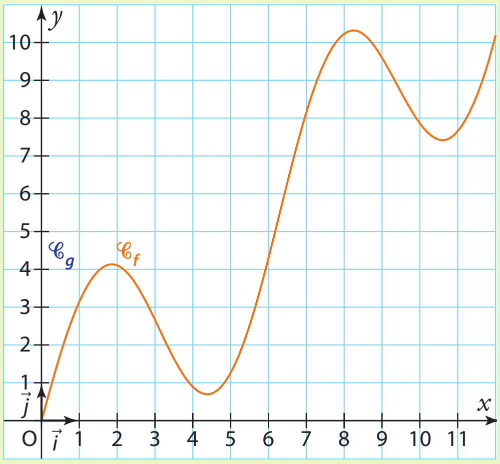
a) $f(x) > 1$ **b)** $f(x) > 10$

2. Déterminer graphiquement à partir de quelle valeur de x on a :

a) $g(x) \in]0\,;2[$ **b)** $g(x) \in]-1{,}4\,;1{,}4[$

3. À l'aide d'un tableur, on a dressé le tableau de valeurs suivant.
a) Que peut-on conjecturer quant à la limite de f en $+\infty$?
b) Que peut-on conjecturer quant à la limite de g en $+\infty$?

x	1	10	100	1 000	10 000	10 0000	1 000 000
$f(x)$	3,12	7,88	149,19	2391,12	378 56,52	600 000,11	9509358,10
$g(x)$	2,00	1,32	1,10	1,03	1,01	1,00	1,00



Solution

1. a) Sur le graphique, on peut observer que les points de la courbe de f ont une ordonnée supérieure à 1 lorsque leur abscisse est supérieure à environ 4,8. 1 2
On peut donc estimer graphiquement que $f(x) > 1$ pour tout $x > 4{,}8$.

b) Sur le graphique, on peut observer que les points de la courbe de f ont une ordonnée supérieure à 10 lorsque leur abscisse est supérieure à environ 12. On peut donc estimer graphiquement que $f(x) > 10$ pour tout $x > 12$.

Conseils & Méthodes

1 Si N est un point de la courbe de f, alors son ordonnée est l'image par f de son abscisse.

2 Il s'agit ici de relever à partir de quand tous les points de la courbe sont au-dessus de l'ordonnée 1, pas de déterminer le premier point de la courbe ayant une ordonnée supérieure à 1.

2. a) Sur le graphique, on peut observer que les points de la courbe de g ont une ordonnée comprise strictement entre 0 et 2 lorsque leur abscisse est supérieure à environ 1.
Nous pouvons donc estimer graphiquement que $g(x) \in]0\,;2[$ pour tout $x > 1$.

b) Sur le graphique, on peut observer que les points de la courbe de g ont une ordonnée comprise strictement entre $-1{,}4$ et 1,4 lorsque leur abscisse est supérieure à environ 6.
Nous pouvons donc estimer graphiquement que $g(x) \in]-1{,}4\,;1{,}4[$ pour tout $x > 6$.

3. On peut conjecturer à l'aide du tableau de valeurs que $\lim f(x) = +\infty$ et que $\lim g(x) = 1$.

À vous de jouer !

1 Soit $f : x \mapsto -x^2$, définie pour tout réel x et $g : x \mapsto 1 + \dfrac{3}{2x}$ définie pour tout réel $x \neq 0$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g entre les abscisses -10 et 10.

2. Relever graphiquement à partir de quelle valeur de x on a :
a) $f(x) < -10$. **b)** $g(x) \in]0{,}5\,;1{,}5[$.

3. Conjecturer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2 Soit $f : x \mapsto -(x-3)^2$, définie pour tout réel x et $g : x \mapsto -2 + \dfrac{1}{2x}$ définie pour tout réel $x \neq 0$.

1. Tracer les courbes représentatives des fonction f et g entre les abscisses 0 et 10.

2. Relever graphiquement à partir de quelle valeur de x on a :
a) $f(x) < -10$. **b)** $g(x) \in]-2\,;0[$.

3. Conjecturer les limites de f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.

➥ Exercices 33 à 35 p. 64

Cours

2 Limite d'une fonction en une valeur réelle

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles) et a un réel appartenant à $\mathcal{D}$ ou étant une borne de $\mathcal{D}$.

Définition Limite infinie

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, lorsque tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$. C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si $x \in \mathcal{D} \cap \mathrm{I}$ alors $f(x) > A$.

Remarque On définit de la même manière que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, quand tout intervalle de la forme $]-\infty\,;a[$ contient $f(x)$ pour x assez proche de a.

Définition Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

- **On dit que f admet une limite à gauche de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x < a$.**
- **On dit que f admet une limite à droite de a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec $x > a$.**

Remarques

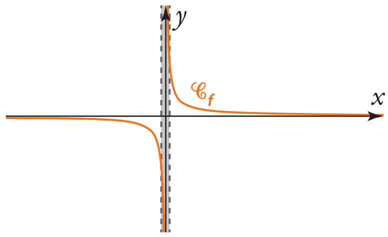
1. On écrit aussi $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ pour la limite à gauche et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ pour la limite à droite.
2. Les limites à droite et à gauche peuvent être différentes ou égales.
3. Dans le cas où f est définie en a et où les limites à droite et à gauche sont égales alors la limite (tout court) est $f(a)$ et dans le cas où f n'est pas définie en a et où les limites à droite et gauche sont égales, la limite existe et est égale à la limite à droite et à gauche.

Exemple On étudie la fonction inverse quand x tend vers zéro.

Si $A = 100$ alors, pour $0 < x < 0{,}01$, on a $\dfrac{1}{x} > 100$. On en déduit que pour x proche de zéro et positif, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

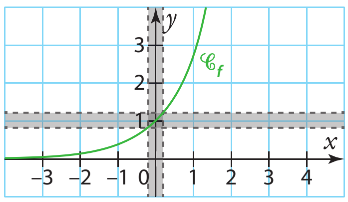
De même si $A = -100$ alors, pour $-0{,}01 < x < 0$, on a $\dfrac{1}{x} < -100$.

On en déduit que pour x proche de zéro et négatif, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = -\infty$.



Définition Limite finie

Une fonction f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est aussi proche de ℓ que voulu, pourvu que x soit suffisamment proche de a.



Exemple Pour la fonction exponentielle on a $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$.

Définition Asymptote verticale

Si la limite à gauche ou/et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est infinie alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple La courbe représentative de la fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. C'est-à-dire que la courbe se rapproche de la droite pour x assez proche de la valeur 0 comme on le voit sur la courbe de la fonction inverse.

Exercices résolus

Méthode 2 Conjecturer une limite en un réel

Énoncé

On considère la fonction : $x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$.

Conjecturer à l'aide des données la limite de f en 0.

NORMAL FLOTT AU APP SUR + POUR	
X	Y1
-0.5	1.2974
-0.4	1.2296
-0.3	1.1662
-0.2	1.107
-0.1	1.0517
0	ERREUR
0.1	0.9516
0.2	0.9063
0.3	0.8639
0.4	0.8242
0.5	0.7869

X=0.5

NORMAL FLOTT AUT APP SUR + POUR	
X	Y1
-0.005	1.0025
-0.004	1.002
-0.003	1.0015
-0.002	1.001
-0.001	1.0005
0	ERREUR
0.001	0.9995
0.002	0.999
0.003	0.9985
0.004	0.998
0.005	0.9975

X= -0.005

Solution

Le graphique semble indiquer que la fonction f tend vers 1 en 0. **1**
Les tables de valeurs confirment cette conjecture : pour tout intervalle aussi petit soit-il contenant 1, on peut se trouver assez proche de 0 pour que les images par la fonction soient dans l'intervalle. **2**

Conseils & Méthodes

1 Savoir utiliser le mode tableur de sa calculatrice

2 Au besoin savoir modifier le pas ou l'intervalle d'étude.

À vous de jouer !

3 Soit $f : x \mapsto -\dfrac{5}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$.

À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture sur la limite de f en 0 sur $]0\,;+\infty[$ et celle de g en -1 sur $]-1\,;+\infty[$.

4 Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{-2x^2-5x+1}{1-2x}$

À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture sur la limite de f en 0 sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et celle de g en $\dfrac{1}{2}$ sur $]-\infty\,;0{,}5[\cup]0{,}5\,;+\infty[$.

➥ Exercices 36 à 38 p. 64

Méthode 3 Conjecturer la présence d'asymptotes

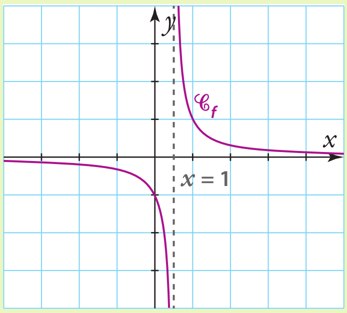
Énoncé

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$.

On donne sa représentation graphique ci-contre.

1. Conjecturer les limites de f : a) en $-\infty$ et en $+\infty$. b) à droite et à gauche de 1.

2. En déduire une conjecture quant à l'existence d'éventuelles asymptotes.



Solution

1. a) Lorsque x tend vers $+\infty$, les images semblent se rapprocher de 0.
Ainsi on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
De même on peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

b) Lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, les images semblent augmenter indéfiniment. Ainsi on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.
De même on peut conjecturer que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$.

2. On conjecture une asymptote horizontale d'équation $y=0$ et une asymptote verticale d'équation $x=1$.

Conseils & Méthodes

1 Savoir utiliser le mode graphique de la calculatrice.

2 Au besoin, savoir modifier la fenêtre pour mieux voir la courbe

À vous de jouer !

5 Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$.

En traçant la courbe de f à la calculatrice, conjecturer la présence ou non d'asymptotes.

6 Soit $f : x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

En traçant la courbe de f à la calculatrice, conjecturer la présence ou non d'asymptotes.

➥ Exercices 39 à 41 p. 64

Cours

3 Limite des fonctions de référence

Propriétés Limite des fonctions de référence

Fonction inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0$	• $\lim\limits_{\substack{x<0\\x\to0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x>0\\x\to0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$
Fonction puissance	• Pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$	• Si n est pair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$	• Si n est impair : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$	
Fonction exponentielle	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x=+\infty$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}=0$	• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}=+\infty$
Fonction racine carrée et racine carrée inverse	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \sqrt{x}=0$	• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$	• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

4 Opérations sur les limites

Soit f et g deux fonctions, on note α une valeur réelle a ou a^+ ou a^- ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$\ell\neq0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ **Règle des signes**
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée**	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
ℓ	$\ell'\neq0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
ℓ	0	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$ **Règle des signes**
0	0	**indéterminée**
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x=0$ donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Remarque

Une forme indéterminée ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite mais que la forme de l'expression ne permet pas de déterminer sa limite de manière certaine.

Méthode 4 Déterminer des limites à l'aide des opérations sur les limites

Énoncé

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x+e^x$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)e^x$ **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+4}$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x x^3}$

Solution

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x+e^x=-\infty$ 1 2

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1)e^x=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+4=+\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+4}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x x^3=+\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x x^3}=0^+$.

Conseils & Méthodes

1 Réaliser les opérations sans rédiger au brouillon afin de repérer rapidement les éventuelles formes indéterminées.

2 Il est important de reconnaître les fonctions de référence dans les expressions données.

À vous de jouer !

7 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+1$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{-3}{x}+1}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1+x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}+x^2$ **e)** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2+5x-\dfrac{2}{x}$

8 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2-3}{-2e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}-3}{-4e^x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x}-3}{8-4x}$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{-3}{(x-1)^2}+\sqrt{1-x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} -3e^x$ **f)** $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}e^x$

9 Recopier et compléter les phrases suivantes.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \square g(x)$ dans les deux cas suivants.

a) si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

b) si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dans les deux cas suivants.

a) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

b) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

10 Déterminer les limites des fonctions suivantes en chacune des valeurs demandées.

1. $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$:

a) en 0^+ **b)** en 0^-
c) en $+\infty$ **d)** en $-\infty$

2. $g(x)=(4-x^2)(5x-2)$:

a) en $+\infty$ **b)** en $-\infty$

3. $h(x)=5-x^2+\dfrac{3}{1-x^2}$:

a) en 1^+ **b)** en 1^- **c)** en -1^+
d) en -1^- **e)** en $+\infty$ **f)** en $-\infty$

4. $k(x)=\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$:

a) en 2^+ **b)** en 2^-
c) en $+\infty$ **d)** en $-\infty$

11 Dans chacun des cas suivants, donner deux fonctions f et g vérifiant les conditions suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+g(x)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \square g(x)=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

d) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

↪ Exercices 42 à 46 p. 65

Cours

5 Théorème de comparaison

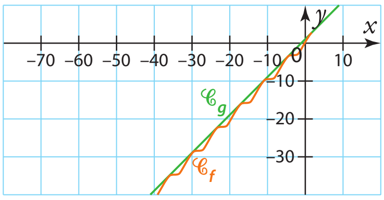
On note α une valeur de I ou une borne (finie ou infinie) de I.

Théorème Théorème de comparaison

On considère deux fonctions *f* et *g*.

- **Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ et s'il existe un réel *A* tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.**
- **Si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ et s'il existe un réel *A* tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$.**

Exemple On considère *f* la fonction définie par $f(x) = x + \sin(x)$.
On a l'inégalité $f(x) < x + 1$.
Or $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$ donc on en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



Corollaire Croissance comparée

Pour tout entier naturel *n*, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s02-04

Apprendre à démontrer p. 62

Théorème Théorème d'encadrement (ou des « gendarmes »)

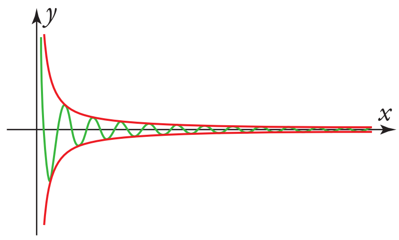
Soit *f*, *g*, et *h* trois fonctions définies sur un intervalle *I* telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$. Si, pour un réel *l*, on a $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \ell$.

Remarque Contrairement au théorème de comparaison, ici les limites sont finies et non infinies.

Exemple On considère *f* la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Pour $x > 0$, on a $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$. Ainsi $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



6 Limites et fonction composée

Théorème Composition de limites

Chacune des lettres *a*, *b* et *c* désigne soit un réel<, soit $+\infty$, soit $-\infty$ et deux fonctions *f* et *g*.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = c$.

Exemple On détermine la limite de la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} e^X = 1$ d'où, par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Méthode 5 Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison

Énoncé

Déterminer les limites suivantes. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(2+\sin(x))$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\cos(x)}{x^2}$

Solution

a) Pour tout $x > 0$:

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $1 \leqslant 2 + \sin(x) \leqslant 3$.

De plus, $e^x > 0$, donc $e^x \leqslant e^x(2 + \sin(x)) \leqslant 3e^x$. **1**

En particulier, pour tout $x > 0$: $e^x \leqslant e^x(2 + \sin(x))$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(2 + \sin(x)) = +\infty$.

b) Pour tout $x < 0$:

$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $2 \leqslant 3 + \cos(x) + 1 \leqslant 4$

et donc $\dfrac{2}{x^2} \geqslant \dfrac{3+\cos(x)}{x^2} \geqslant \dfrac{4}{x^2}$. **2**

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\cos(x)}{x^2} = 0$.

Conseils & Méthodes

1 Commencer par encadrer la fonction car on ne sait pas à l'avance quelles inégalités vont servir. Lorsque l'on sait, on conserve seulement les inégalités utiles.

2 À la suite on déduit lequel des deux théorèmes on va utiliser.

À vous de jouer !

12 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} + 2\sin(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x}\cos(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+3\cos(x)}{(x+1)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$

13 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos(x) - \sqrt{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2\sin(x)+5}{2e^{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3+\cos(x)}{\sqrt{x}}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin^2(x)}{x+3}$

↪ Exercices 47 à 51 p. 65

Méthode 6 Utiliser les compositions de fonctions

Énoncé

Déterminer les limites suivantes. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x}$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^{\frac{1}{x}}$

Solution

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc, par composition de limites,

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = 0$ **1**

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

Conseils & Méthodes

1 On remarque au brouillon que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$.

Donc on cherche la limite de l'exponentielle de quelque chose qui tend vers $-\infty$, ce qui donne 0.

À vous de jouer !

14 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2-x}$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} e^{\sqrt{x+1}}$

15 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1+e^{x}}$ **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} e^{\frac{1}{x-1}}$

↪ Exercices 52 à 56 p. 66

Exercices résolus

Méthode 7 Lever une forme indéterminée par une factorisation

Énoncé

On considère les fonctions $f : x \mapsto 3x^3 - 2x^2 + x + 5$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$

1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Solution

1. a) $f(x) = 3x^3\left(\dfrac{3x^3}{3x^3} - \dfrac{2x^2}{3x^3} + \dfrac{x}{3x^3} + \dfrac{5}{3x^3}\right) = 3x^3\left(1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{5}{3x^3}\right)$ **3**

Alors comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{3x^3} = 0$ par somme de limites

on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{5}{3x^3} = 1$, de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

Donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) De même $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{5}{3x^3} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$ **1** **2**

Donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. a) $g(x) = \dfrac{x^2\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)}{x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}$ **1** **2** $= \dfrac{x\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)}{1 - \dfrac{1}{x}}$ **3** alors comme $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ par quotient de limites on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 1$, de plus $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ donc par produit de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

b) De même **1** **2**, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{2}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 1$, de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par produit de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Conseils & Méthodes

1 On remarque une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ou « $\infty - \infty$ »

2 Il faut factoriser le terme de plus haut degré. Dans le cas d'une fraction on factorise au numérateur et dénominateur.

3 Il faut simplifier le plus possible l'écriture obtenue.

À vous de jouer !

16 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^5 + x^2)$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^2 + 5x$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 1}{x^2 + 3}$

17 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - x^5 + \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - 3x^2}{x - 4x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x^3 + x - 1$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{2 - x}$

18 On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

1. Vérifier qu'en $-\infty$ la limite n'est pas une forme indéterminée.

2. Vérifier qu'en $+\infty$ la limite est une forme indéterminée.

3. Factoriser et simplifier $f(x)$ et déterminer la limite $+\infty$.

19 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$.

1. Justifier qu'en l'infini la limite est une forme indéterminée.

2. Factoriser et simplifier $f(x)$ et déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

↪ Exercices 57 à 61 p. 61

Exercices résolus

Méthode 8 Lever une forme indéterminée en multipliant par le conjugué

Énoncé

On souhaite déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$.

1. Montrer que $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ pour tout réel $x>-2$.

2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$.

Solution

1. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\dfrac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ **1** $=\dfrac{\sqrt{x+3}^2-\sqrt{x+2}^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ **2**

$=\dfrac{(x+3)-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}=+\infty$

De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ donc par composition de limites,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$.

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=+\infty$.

et par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=0$

Or, d'après la question **1.**, $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)=0$.

Conseils & Méthodes

1 Pour faire apparaître le dénominateur voulu, multiplier et diviser l'expression par ce dénominateur.

2 En multipliant $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$ par $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}\right)$ faire apparaître une identité remarquable simplifiant les deux racines carrées. On appelle cette opération une multiplication par le conjugué.

À vous de jouer !

20 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-6}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-3-x}-\sqrt{4-x}\right)$

21 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{10-x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+x+6}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{3+x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x^2}\right)$

22 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1]$ par $f(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}$.

1. Justifier que la forme est indéterminée en moins l'infini.

2. Multiplier par l'expression conjuguée pour simplifier l'écriture de $f(x)$.

3. En déduire la limite cherchée.

23 On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}$, $g(x)=\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5+x}$ et $h(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{-2+x}$.

1. Déterminer lesquelles de ces fonctions ont une limite indéterminée en $+\infty$.

2. À l'aide des expressions conjuguées, simplifier les écritures de ces trois fonctions.

3. En déduire les deux limites en $+\infty$ pour chacune de ces fonctions.

↪ Exercice 62 p. 66

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s02-04

ØLJEN Les maths en finesse

La propriété à démontrer

Démontrer que pour les fonctions x^n et e^x on a, pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

On utilisera un changement de variable et le théorème de comparaison sur les limites.

Comprendre avant de rédiger

Il faut savoir traduire une limite à l'infini et remarquer que la limite cherchée est une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Rédiger

Étape 1
On connait une inégalité de comparaison entre les fonctions x et e^x

Étape 2
On cherche à faire un changement de variable en posant pour un entier naturel n et un réel $x > 0$:

Étape 3
On va utiliser la croissance de la fonction $t \mapsto t^{n+1}$ pour transformer l'inégalité sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

Étape 4
On utilise le théorème de comparaison des limites pour conclure.

La démonstration rédigée

Pour tout réel X on sait que $X < e^X$.

On pose $X = \frac{x}{n+1}$ l'inégalité précédente devient

$\frac{x}{n+1} < e^{\frac{x}{n+1}}$

La fonction $t \mapsto t^{n+1}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On peut donc écrire que :

$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} < \left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1}$

C'est-à-dire que : $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} < e^x$

ou encore : $\frac{x}{(n+1)^{n+1}} < \frac{e^x}{x^n}$

On connait la limite de x à l'infini ce qui donne que :

$\lim_{x \to \infty} x = +\infty$ et

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$ comme $\frac{x}{(n+1)^{n+1}} < \frac{e^x}{x^n}$

on en déduit par comparaison que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante en utilisant la même démarche.

Soit deux fonctions f et g telles que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et, pour tout , $g(x) \geqslant f(x)$.

Démontrer que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$