Exercices calculs et automatismes

25 Calculer les termes d'une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (v_n).

26 Calculer les termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer u_1

b) Calculer u_4.

27 Calculer les termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_1 = 4$.

a) Calculer u_2.

b) Calculer u_{11}.

28 Déterminer la raison d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$.

Déterminer la valeur de q.

29 Déterminer la raison d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$.

Déterminer la valeur de r.

30 Donner des exemples de suites

a) Donner un exemple de suite ayant pour limite $+\infty$.

b) Donner un exemple de suite ayant pour limite -2.

c) Donner un exemple de suite ayant pour limite $-\infty$.

d) Donner un exemple de suite n'ayant pas de limite.

31 Limite de suites

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$ a pour limite

a $+\infty$ b $-\infty$ c 0 d 2

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{5+\sqrt{n}}$ a pour limite

a $+\infty$ b $-\infty$ c 0 d $\dfrac{1}{5}$

3. La suite (u_n) définie par $u_n = -n + \dfrac{1}{n}$ a pour limite

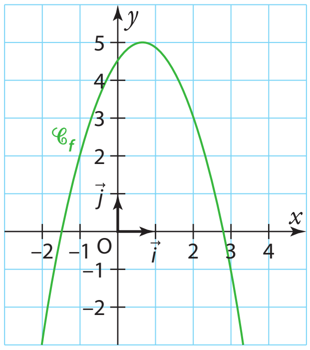
a $+\infty$ b $-\infty$ c 0 d -1

32 Limite de suites géométriques

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) La suite géométrique de raison 10 et de premier terme -1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
b) La suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
c) La suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 2 a pour limite 2.	☐	☐
c) La suite géométrique de raison 0,25 et de premier terme -1 a pour limite 0.	☐	☐

33 Lecture graphique(1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction représentée ci-contre.

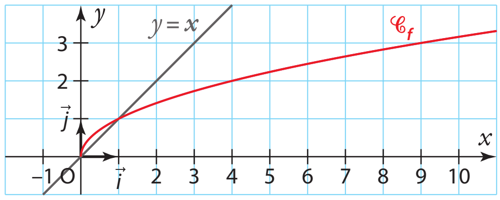


a) Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

b) Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

34 Lecture graphique (2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On a représenté ci-dessous la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. u_1 est égal à :

a 0   b 1   c 3   d 9

2. La suite (u_n) :

a semble avoir comme limite 0.

b semble avoir comme limite 1.

c semble avoir comme limite $+\infty$.

d n'a pas de limite.

35 Méthode pour déterminer l'expression d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$. Comment faire pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n ?

36 Méthode pour démontrer une propriété par récurrence

Comment faire pour démontrer une propriété par récurrence ?

Exercices d'application

Démontrer par récurrence

Méthode 1 et Méthode 2 p. 17

37 On admet que pour tous réels a et b, $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Montrer par récurrence que pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

38 Jason affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 2n$.

1. Jason a-t-il raison ?
Justifier.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $n^2 > 2n$ ».

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En supposant que $P(n)$ est vraie, montrer que $P(n+1)$ est vraie.

b) $P(0)$ est-elle vraie ?

c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie.

d) Conclure en corrigeant l'affirmation de Jason.

39 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(2x) = f(x)$.
Montrer que pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n \times x) = f(x)$.

40 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise $5^n - 1$.

41 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 6$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

42 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 10$.

43 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer par récurrence que (u_n) est strictement décroissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 9$.

44 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer une formule explicite pour u_n.

2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

45 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$.

1. Calculer les premiers termes de la suite (v_n) et conjecturer une formule explicite pour v_n.

2. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Limite d'une suite

Méthode 3 p. 19

46 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 5$.

1. Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n < -A$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

47 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, déterminer le plus petit entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

48 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 20$.
En utilisant la définition, démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

49 Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = -n^2 + 5$.

1. Conjecturer la limite de la suite (v_n).

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a) $v_n < -10$ **b)** $v_n < -100$ **c)** $v_n < -1\,000$

50 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^3 - 4$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. À l'aide la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a) $u_n > 100$ **b)** $u_n > 1\,000$ **c)** $u_n > 10\,000$

51 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2 + 0{,}7^n$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

3. On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante.
À l'aide la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

a) $u_n < 2{,}1$ **b)** $u_n < 2{,}01$ **c)** $u_n < 2{,}001$

52 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n, tel que $u_n > 1000$.

a) Recopier et compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
u = 0
while ...:
    u = ...
    n = ...
print (...)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

53 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (v_n).

2. On veut déterminer le plus petit entier naturel n, tel que $v_n < 0{,}001$.

a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
v = …
while …:
      n = …
      v = …
print (…)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

Opérations sur les limites

Méthode 4 et Méthode 5 p. 21

54 En utilisant les règles des opérations sur les limites, déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2n - 4$.

b) (v_n) définie par $v_n = -n^3 + 5$.

c) (w_n) définie par $w_n = \dfrac{5}{3+\sqrt{n}}$.

d) (a_n) définie par $a_n = n\square\sqrt{n}$.

55 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.

b) (v_n) définie par $v_n = -3 + \dfrac{5}{n+4}$.

56 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^4} - 5\right)$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3+n}{2+\dfrac{1}{n}}$.

57 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = (2-n^2) \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n^2+n}{4}$.

58 En factorisant dans un premier temps, déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = n^2 - 2n$.

b) (v_n) définie par $v_n = n - n^3$.

59 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = 3n - n^3 + 2$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n-5}{2n+4}$.

60 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = n + 3n^2 - n^3$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n^3+2}{2n^2-1}$.

61 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n+1}$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n+\sqrt{n}}{2n+3}$.

62 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{1}{n} \times (n^2 - 2)$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?

2. En développant, déterminer la limite de la suite (u_n).

Limite et comparaison

Méthode 6 et Méthode 7 p. 23

63 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sqrt{3n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \sqrt{n}$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

64 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = -n - \sin(n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant -n + 1$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

65 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (n+1)^2 + (-1)^n \times n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

66 Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{4}{n+1}$.

En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de la suite (u_n).

67 Soit (u_n) une suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant -3 + \dfrac{1}{n^2+1}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

68 Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $v_n = -5 + \dfrac{\cos(n)}{n^2}$.

Déterminer la limite de la suite (v_n).

69 Soit (w_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $w_n = 4 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Déterminer la limite de la suite (w_n).

70 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = 42 - \dfrac{\sin(n)}{n^5}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercices d'application

Suites géométriques

Méthode 8 p. 25

71 Pour chaque suite suivante, déterminer sa limite.

a) (u_n) est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 2$.

b) (v_n) est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = -3$.

c) (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{3}$.

72 Pour chaque suite ci-dessous, déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1 = -2$.

b) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -4 \times 3^n$.

73 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 0{,}5a_n$.

1. Déterminer la nature de la suite (a_n) en justifiant.

2. Déterminer la limite de la suite (a_n).

74 **1.** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = e^n$.

a) Déterminer la nature de la suite (u_n) en justifiant.

b) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = e^{-n}$.

a) Montrer que l'on peut écrire v_n sous la forme q^n avec q un réel à déterminer.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

75 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 0{,}5^n$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

76 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3^n - 2^n$.
En factorisant par 3^n, déterminer la limite de la suite (u_n).

77 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - 5^n$.
En factorisant par 2^n, déterminer la limite de la suite (v_n).

78 Selma travaille dans une entreprise.
En 2020, elle gagne 1 500 € nets.
Chaque année, son employeur prévoit d'augmenter son salaire de 2 %.

On note u_n le salaire de Selma en $2020 + n$.

1. Donner la valeur de u_0.

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n en justifiant.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Convergence des suites monotones

Méthode 9 p. 25

79 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente, sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

80 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

2. Montrer que la suite (v_n) est majorée par 1.

3. En déduire que la suite (v_n) est convergente sans utiliser les propriétés sur les opérations des limites.

81 **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?**
Pour montrer qu'une propriété est fausse, on donnera un contre-exemple.

	V	F
1. Une suite strictement croissante a pour limite $+\infty$.	☐	☐
2. Une suite strictement décroissante a pour limite $-\infty$.	☐	☐
3. Une suite bornée converge.	☐	☐
4. Une suite croissante majorée par 5 converge vers 5.	☐	☐

82 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{-2n+1}{n+3}$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n).

2. Montrer que (u_n) est minorée par -2.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

83 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{6n+3}{n+1}$.

1. Étudier les variations de la suite (v_n).

2. Montrer que (v_n) est majorée par 6.

3. En déduire que la suite (v_n) est convergente.

84 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 1$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n).

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

85 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}75v_n + 1$.
On admet que $2 < v_n < 4$.

1. Étudier les variations de la suite(v_n).

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente.

Démontrer par récurrence

86 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer par récurrence que $f'(x) = n \times x^{n-1}$.

87 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

88 Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{4}$. Conjecturer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la démontrer.

89 Soit (u_n) la suite définie par $u_4 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1$.

90 Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_p (avec $p \in \mathbb{N}$) et de raison q.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

91 Soit a un réel tel que $a \neq 1$.
Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - 1$ est divisible par $a - 1$.

92 Soit q un réel tel que $q \neq 1$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

93 Soit (u_n) une suite arithmétique.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

94 **1.** Dresser le tableau de signes de $2x^2 - (x+1)^2$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$.

Limite d'une suite

Méthode 10 p. 26

95 On s'intéresse à l'évolution de la population d'un village. En 2019, il y a 100 habitants dans le village. Chaque année, la population augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.
1. Déterminer le nombre d'habitants en 2020 et 2021.
2. On note v_n le nombre d'habitants en 2019 + n.
a) Donner la valeur de v_0, v_1 et v_2.
b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de v_{20}, v_{30}, v_{40} et v_{50}.
c) Conjecturer la limite de la suite (v_n).
3. Que peut-on penser de cette évolution ?

96 On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plateforme de streaming de musique en France.
En 2020, 30 000 personnes sont abonnées à la plateforme.
Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.
1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.
2. On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en 2020 + n.
a) Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.
b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de u_{20}, u_{30}, u_{40} et u_{50}.
c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

97 En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) est définie par $u_n = n^3 + n^2 - 4$
b) (v_n) est définie par $v_n = n^3 - n^2 - 4$
c) (w_n) est définie par $w_n = \frac{n^3}{n^2 - 4}$
d) (a_n) est définie par $a_n = n^3 + \frac{\cos(n)}{n^2 - 4}$

98 Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.**

	V	F
1. Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.	☐	☐
2. Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.	☐	☐

99 **Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.**

	V	F
1. Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier $n \geqslant 1$, $-1 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Alors (u_n) converge.	☐	☐
2. Soit (v_n) une suite telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $n^2 - 1 \leqslant n^2 \times v_n \leqslant n^2 + n$. Alors (v_n) converge.	☐	☐

100 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sqrt{n+1}$.
a) Montrer que $v_n > \sqrt{n}$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercices d'entraînement

101 On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans tous les cas donner une démonstration de la réponse choisie. En cas de réponse fausse démontrer avec un contre-exemple.

	V	F
a) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	☐	☐
b) Si (v_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	☐	☐
c) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	☐	☐
d) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	☐	☐

D'après Bac S

102 Dans cet exercice, nous allons utiliser la série de Leibniz pour approximer π.
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

On note S_n la somme des n premiers termes de (u_n). On admet que (S_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$, mais la convergence est très lente.

Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il calcule et affiche S_{100}, puis qu'il affiche $4 \times S_{100}$.

```
S = 0
u = 0
for i in range (...) :
    u = ...
    S = ...
print (...)
print (...)
```

Représentation graphique et limite

103 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Tracer la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ dans un repère orthonormé.

2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.

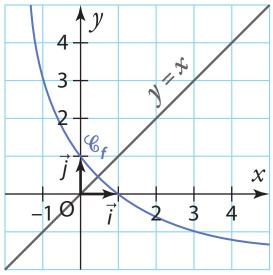
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

104 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$.

1. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite.

2. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

105 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction dont la représentation graphique est ci-contre en bleu.



1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Que peut-on dire sur les variations de la suite (u_n) et sur la limite de la suite (u_n) ?

Étude de suites

106 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

107 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Écrire u_n sous la forme $a \times q^n$ avec a et q deux réels.

5. En déduire la limite de la suite (u_n).

108 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que $\ell = f(\ell)$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

109 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

D'après Bac S

110 Soit f la fonction définie sur $[0\,;4]$ par $f(x)=\dfrac{2+3x}{4+x}$.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
On admet que la suite est bien définie.
1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;4]$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 3$.
4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b) On admet que $\ell=f(\ell)$.
En déduire la valeur de ℓ.

D'après Bac S 2019

111 On considère deux suites : Algo
• la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_{n+1}=2u_n-n+3$.
• la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=2^n$.

A ▶ Étude de la suite (u_n)
1. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=3\times 2^n+n-2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. On veut déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.
a) Recopier et compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde au problème.

```
u = …
n = 0
while …:
        n = …
        u = …
print (…)
```

b) Donner la valeur du rang correspondant.

B ▶ Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
1. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que pour tout entier $n\geqslant 4$, on a $0<\dfrac{n}{2^n}\leqslant\dfrac{1}{n}$.
Déterminer la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

D'après Bac S 2017

112 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+4$. Algo
1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Recopier et compléter le programme en **Python** suivant, afin qu'il calcule u_{20}.

```
u = …
for i in range (…) :
        u = …
print (…)
```

3. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de u_{20}.

113 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+8}$. TICE

A ▶ Conjecture
On veut calculer les premières valeurs de la suite à l'aide d'un tableur.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	
4	2	

1. Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 pour obtenir par recopie vers le bas les termes de la suite (u_n) ?
2. À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite de la suite (u_n).
3. Écrire un programme en **Python** permettant de calculer u_{30}

B ▶ Étude générale
1. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?
Justifier.

C ▶ Expression du terme général
Soit (v_n) la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=1+\dfrac{7}{u_n}$.
1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on précisera le premier terme.
2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{7}{8^{n+1}-1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $u_n<10^{-18}$, et déterminer la valeur de n_0.

D'après Bac S 2018

Suite géométrique et somme

114 Déterminer la limite des suites suivantes :
a) (u_n) est la suite définie par $u_n=5^n-0{,}2^n$.
b) (v_n) est la suite définie par $v_n=6^n-7^n$.
c) (w_n) est la suite définie par $w_n=9^n-8^n$.

115 Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $u_0=5$.
1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer l'expression de la somme des n premiers termes de la suite (u_n) en fonction de n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

116 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $u_1=4$.
Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
1. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite S_n quand n tend vers $+\infty$.

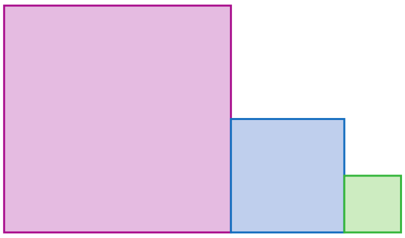
Exercices d'entraînement

117 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 9$.
1. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n.
a) $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
b) $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$
2. Déterminer la limite de S_1 quand n tend vers $+\infty$.

118 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -10$.
1. Calculer une valeur approchée de la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n).
2. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
a) Donner l'expression de S_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

119 Soit S_n la somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n$
1. Exprimer S_n en fonction de n.
2. Déterminer limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ en justifiant.

120 On considère un carré de côté 3 cm.
À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.



On note $\mathscr{A}_n$ l'aire du n-ième carré.
1. Donner la valeur de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
2. Exprimer $\mathscr{A}_{n+1}$ en fonction de $\mathscr{A}_n$ et en déduire la nature de la suite $(\mathscr{A}_n)$.
3. Déterminer l'expression de $\mathscr{A}_n$ en fonction de n.
4. Déterminer l'expression de l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés, en fonction de n.
5. En déduire l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés si on continue indéfiniment cette construction.

Étudier des phénomènes d'évolution

Méthode 11 p. 27

121 Une ville contient 15 000 habitants en 2019. Le maire prévoit que chaque année, 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitants s'installeront.
1. Déterminer le nombre d'habitants en 2020.
2. Modéliser le nombre d'habitants en 2019 + n à l'aide d'une suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5000 \times 0{,}9^n + 10\,000$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

122 On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle. En 2019, il y a 100 tigres. Puis chaque année, 10 % de la population de tigres meurt et il y a 5 nouveaux tigres qui sont ajoutés à la réserve. On note u_n le nombre de tigres en 2019 + n.
1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.
2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 5$.
3. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $50 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 50$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) Interpréter dans le contexte les variations et la limite de la suite (u_n).

123 Algo — Au 1er janvier 2018, Hajer dispose d'un capital de 16 000 €.
Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances.

A ▸ On note u_n le montant du capital de Hajer disponible le 1er janvier 2018 + n. On a $u_0 = 16\,000$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.
4. On souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel le capital de Hajer devient inférieur ou égal à 2 000 €.
a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.
b) Quelle est la valeur numérique contenue par la variable n à la fin de l'exécution de ce programme ?

```
u = 0
n = 0
while ...:
    n = ...
    u = ...
```

B ▸ Hajer décide finalement d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.
On note v_n la valeur du capital le 1er janvier 2018 + n. On a $v_0 = 16\,000$.
1. Justifier que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 300$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 14\,000 \times 0{,}85^n + 2000$.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

D'après Bac ES 2018

124 Un site Internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %. **Algo**

A ▶ On note u_n le nombre de films proposés n mois après l'ouverture du site. On a $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 (on arrondira à l'unité).

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

B ▶ On souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
u = 500
n = 0
while  …:
       n = …
       u = …
print (…)
```

2. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme, puis interpréter cette valeur.

C ▶ En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15\,000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 2\,500$.

2. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - 25\,000$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

b) Déterminer l'expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

3. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Si oui, à combien d'abonnés ? Justifier.

D'après Bac ES 2016

125 Dans un pays, deux fournisseurs d'électricité ont le monopole du marché : *Electic* et *Energo*. **Algo**
On s'intéresse à la répartition des parts de marché de ces deux fournisseurs. En 2020, *Electic* a 55% des parts du marché. Chaque année, on prévoit que *Electic* perde 5% de ses clients, mais qu'il récupère 15% des clients de *Energo*.
On note a_n le pourcentage de parts de marché de *Electic* et b_n celui de *Energo* en $2020 + n$. On a $a_0 = 0{,}55$.

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}15b_n$.

3. En déduire que $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}15$.

4. On veut déterminer le pourcentage des parts de marché de *Electic* en 2030.

a) Compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
a = …
for i in range (…):
      a = …
print (…)
```

b) Déterminer le pourcentage à l'aide de la calculatrice.

4. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 0{,}75$.

b) En déduire que la suite (a_n) est convergente, et déterminer sa limite.

c) Interpréter les variations et la limite de la suite (a_n) avec le contexte.

126 Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier. Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.
Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier. On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.
On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier en $2010 + n$ et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010 + n$.

1. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}06b_n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}84a_n + 0{,}06$.

3. Soit (c_n) la suite définie par $c_n = a_n - 0{,}375$.

a) Montrer que la suite (c_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de c_n en fonction de n.

c) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

d) En déduire la limite de la suite (a_n).

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

D'après BAC 2016

Travailler le Grand Oral

127 Présenter le travail suivant.

1. Trouver un exemple de situation pouvant être modélisé par une suite.

2. Étudier la suite en utilisant un tableur, la calculatrice, les propriétés du cours… On pourra, par exemple, étudier les variations, la limite,…

3. Interpréter les résultats dans le contexte (valeur de certains termes, limite, …)

128 Soit (u_n) une suite.
Présenter à l'oral différentes méthodes pour déterminer la limite de la suite (u_n).
On expliquera le principe de chaque méthode.

129 Présenter la démonstration de l'inégalité de Bernoulli en l'expliquant.

Exercices bilan

130 Démontrer par récurrence

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

131 Déterminer la limite d'une suite

Déterminer la limite des suites suivantes.

a) (u_n) est la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2 + 3n - 8}{2n^3 + 5n^2 - 1}$.

b) (v_n) est la suite définie par $v_n = \sqrt{n} + (-1)^n$.

c) (w_n) est définie par $w_n = 25 + \dfrac{\cos(n)}{n}$.

d) (a_n) est définie par $a_n = n^2 \times 2^n$.

e) (b_n) est définie par $b_n = 3^n - 4^n$.

132 Étudier la convergence d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times (1 - u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

133 Étude de l'évolution d'une population de singes

SVT

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.

En 2020, elle estime qu'il y a 1 000 singes sur l'île.

A ▸ Premier modèle

La biologiste suppose que la population de singes augmente de 4 % chaque année.

On note u_n le nombre de singes en milliers sur l'île en $2020 + n$.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n), puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Que peut-on penser de ce modèle ?

B ▸ Second modèle

La biologiste suppose que la population de singes est finalement modélisée par une suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{40}v_n^2 + 1{,}1\,v_n$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{1}{40}x^2 + 1{,}1x$.

Justifier que f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 4$.

b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c) En déduire la convergence de la suite (v_n).

d) Soit ℓ la limite de la suite (v_n). On admet que $\ell = f(\ell)$. Déterminer la valeur de ℓ.

3. On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 3 000 individus. Recopier et compléter le programme ci-contre en **Python** pour qu'il réponde au problème.

```
n = 0
v = 1
while …:
      v = …
      n = …
print (…)
```

D'après Bac S 2017

134 Évolution du nombre d'arbres dans une forêt

Algo

On s'intéresse au nombre d'arbres dans une forêt.

En 2020, il y a 2 500 arbres dans la forêt. Mais on prévoit que chaque année, 10% des arbres soient coupés et 100 arbres soient replantés.

On note u_n le nombre d'arbres en $2020 + n$.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.

3. a) Recopier et compléter ce programme en **Python** pour qu'il déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

```
u = 2500
for i in range (…):
      u = …
print (u)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1\,000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1\,000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

On précisera sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

Récurrence

Pour démontrer une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$:

- **Étape 1 Initialisation** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- **Étape 2 Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant n_0$.

On suppose $P(n)$ vraie et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

- **Étape 3 Conclusion** On conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.

Limites

- (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- (u_n) a pour limite $-\infty$ si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]-\infty\,;-A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- (u_n) a pour limite un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Formes indéterminées

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$

Suites géométriques

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite

Théorème de comparaison

- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ avec ℓ un réel,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Suites de références

- (n), $\left(\sqrt{n}\right)$, (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$.
- $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, tendent vers 0.

Inégalités et limites

Si $u_n \leqslant v_n$ et (u_n) et (v_n) convergent,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Convergence des suites monotones

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante minorée converge.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Démontrer une propriété par récurrence	1, 2	1, 2, 3, 4, 37, 38, 41, 42
▶ Comprendre et utiliser la définition de limite d'une suite	3	5, 6, 7, 8, 46, 47, 49, 50
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée	4, 5	9, 10, 11, 12, 54, 55, 58, 59
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes	6, 7	13, 14, 15, 16, 63, 64, 66, 67
▶ Déterminer la limite d'une suite géométrique	8	17, 18, 71, 72
▶ Étudier la convergence d'une suite monotone	9	19,20,79,80
▶ Étudier la convergence d'une suite	10	21,22,95,96
▶ Étudier des phénomènes d'évolution	11	23,24,121,122

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-s01-09

QCM Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
135 Pour tout entier naturel n, on considère la propriété $P(n)$: « $n^3 > 3n$ ».	$P(0)$ est vraie	$P(1)$ est vraie	$P(2)$ est vraie	$P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$
136 La suite (u_n) définie par $u_n = n + 5n^2$:	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
137 La suite (v_n) définie par $v_n = n - 5n^2$:	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
138 La suite (w_n) définie par $w_n = n - 5\sin(n)$:	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
139 La suite (a_n) définie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2n+1} < a_n < \frac{3n+1}{n^2+2}$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
140 La suite géométrique (b_n) de premier terme $b_0 = -3$ et de raison $\frac{1}{4}$	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
141 La suite (c_n) définie par $c_n = 5^n - 7^n$:	a pour limite $+\infty$	a pour limite 0	a pour limite $-\infty$	n'a pas de limite
142 La suite(u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$ est :	croissante	décroissante	majorée par 3	minorée par 3

143 Récurrence

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $3^n - 1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$

Méthode 1 et Méthode 2 p. 17

144 Limite d'une suite

Déterminer les limites des suites suivantes.

a) (u_n) définie par $u_n = (2n + n^2) \times \sqrt{n}$.

b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n^2 + 5}{2n^2 - 4}$.

c) (w_n) définie par $w_n = n^2 + (-1)^n$.

d) (a_n) définie par $a_n = 3 + \dfrac{\cos(3n + 1)}{n^3}$.

e) (b_n), qui est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $b_0 = 10$.

f) (c_n) définie par $c_n = -4 \times 2^n$

Méthode 4 et Méthode 5 p. 21 Méthode 6 et Méthode 7 p. 23 Méthode 8 p. 25

145 Compte en banque

Algo

Aissatou dépose 5 000 € sur un compte en banque le 1er janvier 2019.
Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, le dernier jour de chaque mois, elle dépose 2 000 € supplémentaires sur le compte.
On note u_n la somme sur le compte le 1er jour du mois, n mois après janvier 2019.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2\,000$

3. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1er janvier 2020.

a) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde à la question.

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la somme sur le compte le 1er janvier 2020.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8\,000$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Déterminer l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

6. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

Méthode 11 p. 27

146 Évolution d'une population de tortues

Algo

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île.

A ▸ Au début de l'année 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0{,}3 \\ u_{n+1} = 0{,}9u_n(1 - u_n) \end{cases}$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n.

1. Déterminer le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;1]$ et $1 - u_n \in [0\,;1]$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9u_n$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre afin qu'il détermine la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues.

```
u = 0.3
n = 0
while …:
    …
    …
print (…)
```

B ▸ Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0{,}032 \\ v_{n+1} = 1{,}06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n > 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie $\ell = 1{,}06\ell(1 - \ell)$.

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Méthode 3 p. 19 Méthode 11 p. 27

D'après Bac 2017

Exercices vers le supérieur

147 Somme par récurrence

Démo

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 1$, on a $1+2+...+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$

D'après Concours ADVANCE

148 Abonnement sportif

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante.

• Chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés.
• Chaque année, 40 % des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
La suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année 2010 + n. On définit la suite (v_n) par $v_n = a_n - 1000$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a $a_1 = 1\,300$
b $a_{n+1} = 0{,}6 \times a_n + 400$.
c La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}4$.
d $a_n = 500 \times 0{,}6^{n-1} + 1\,000$.

D'après Concours FESIC

149 Vrai-Faux (1)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Si une suite est croissante et admet une limite finie alors elle est nécessairement bornée.	☐	☐

D'après Concours FESIC

150 Somme télescopique

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$u_n = \dfrac{1}{n\times(n+1)}$

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$
3. À l'aide de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
4. Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

151 Vrai-Faux (2)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.	**V**	**F**
1. Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.	☐	☐
2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.	☐	☐

D'après Sciences Po

152 Suites adjacentes

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si et seulement si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes, et montrer qu'elles ont la même limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$par $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

Coup de pouce On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ et $0! = 1$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
b) En déduire qu'elles sont convergentes.
c) On admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}$.
En prenant $n = 10$, déterminer un encadrement de e.

153 Suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

A ▶ Dans cette partie, on suppose que $a = 4{,}5$ et $b = -2$.
1. Calculer la valeur de u_2.
2. Résoudre l'équation $x^2 = ax + b$.
On notera $x_1$et $x_2$les deux solutions de l'équation.
3. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \lambda \times x_1{}^n + \mu \times x_2{}^n$.
a) Déterminer les valeurs de λ et μ.
b) Déterminer la limite de la suite (u_n)

B ▶ Dans cette partie, on suppose que $a = 10$ et $b = -25$.
1. Calculer la valeur de u_2.
2. Résoudre l'équation $x^2 = ax + b$.
On notera x_0 l'unique solution de l'équation.
3. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = \lambda \times x_0{}^n + \mu \times n \times x_0{}^n$.
a) Déterminer les valeurs de λ et de μ.
b) Déterminer la limite de la suite (u_n)

154 Clefs oubliées

Anton oublie souvent ses clefs.

On note, pour tout $n \geqslant 1$, C_n l'événement : « Anton oublie ses clefs le jour n ». On note c_n la probabilité de C_n. Si le jour n, Anton oublie ses clefs, alors la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est de 0,5. Si le jour n, Anton n'oublie pas ses clefs, alors la probabilité qu'il les oublie le jour suivant est de 0,3.
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $8c_n = 8v_n + 3$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
1. $c_1 = 0{,}1$ si et seulement si $c_2 = 0{,}32$.	☐	☐
2. Pour tout $n \geqslant 1$, $c_{n+1} = 0{,}3c_n + 0{,}2$.	☐	☐
3. (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2.	☐	☐
4. La limite de la suite (c_n) est 0,375.	☐	☐

D'après ACCES

155 Limites de deux suites

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $(u_n)\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$ et $(v_n)\begin{cases} v_0 = 15 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 5v_n}{6} \end{cases}$

(u_n) converge vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a $\ell_1 = \ell_2$ **b** $\ell_1 < \ell_2$ **c** $\ell_1 > \ell_2$

d On ne dispose pas assez d'informations pour comparer ℓ_1 et ℓ_2.

D'après Concours AVENIR

156 Vrai-Faux (3)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

	V	F
1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par $u_n = 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2 + \sum_{k=1}^{n} 2^k$ et $v_n = u_n - 1$. Une seule des deux suites est géométrique.	☐	☐
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	☐	☐
3. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$. Pour tout entier naturel n, $u_n = n + 1$.	☐	☐

D'après Sciences Po

157 Vrai- Faux (4)

Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
1. (u_n) est une suite géométrique.	☐	☐
2. (u_n) est croissante.	☐	☐
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.	☐	☐
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.	☐	☐
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.	☐	☐

D'après Concours ADVANCE

158 Convergence de la méthode de Héron

Algo

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de f.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Soit ℓ la limite de la suite (u_n).
En admettant que $\ell = f(\ell)$, déterminer la valeur de ℓ.

5. Compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il calcule u_{100}.

```
u = ...
for i in range (...):
    u = ...
print (...)
```

159 Récurrence forte

Le principe de récurrence forte est le suivant.

> Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :
> - $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
> - Pour un entier naturel $n \geqslant 1$ fixé, $P(n-1)$ et $P(n)$ vraies impliquent $P(n+1)$ vraie.
>
> Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$.

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer la conjecture.

160 Rationalité d'un nombre

Montrer que 0,1212121212… est un nombre rationnel.

161 Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite convergente.
En raisonnant par l'absurde, démontrer l'unicité de la limite.

Coup de pouce Soient ℓ et ℓ' les deux limites avec $\ell < \ell'$. Notons $d = \ell' - \ell$. On pourra considérer les intervalles $\left[\ell - \dfrac{d}{3} ; \ell + \dfrac{d}{3}\right]$ et $\left[\ell' - \dfrac{d}{3} ; \ell' + \dfrac{d}{3}\right]$.

Algo TICE 45 min Représenter Chercher

1 Application de la méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode permettant de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$.
Pour cela :
- on choisit une valeur approchée de la solution x_0.
- puis on définit une suite (x_n) où x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_n.

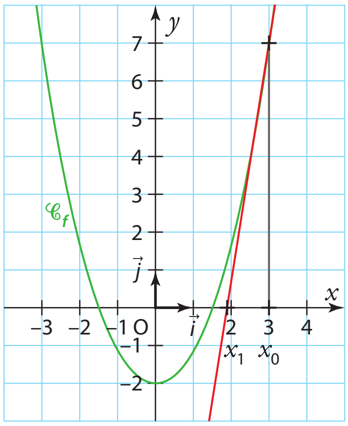
A ▸ Étude d'un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.
On choisit $x_0 = 3$.

1. Ouvrir **GeoGebra** et représenter graphiquement la fonction f.

2. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0.

Coup de pouce On utilisera le menu **Tangentes** de **GeoGebra**.



3. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de l'axe des abscisses.
Représenter graphiquement le nombre x_1.

4. Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse x_1.

5. x_2 est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de l'axe des abscisses.
Représenter graphiquement le nombre x_2.

B ▸ Calcul des premiers termes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

1. Quelle sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$?

2. Rappeler la formule de l'équation de la tangente au point d'abscisse x_n.

3. Justifier que $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$

Remarque On reconnait la relation de récurrence de l'exercice 158 sur la convergence de la méthode de Héron.

4. En déduire la valeur de x_1 et x_2.

5. Compléter le programme en **Python** suivant afin qu'il calcule x_{10}.

```
x = …
for i in range (…) :
      x = …
print (…)
```

6. Donner une valeur approchée de x_{10}.

C ▸ Étude d'un deuxième exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 1$.

1. Résoudre $f(x) = 0$.

2. On choisit $x_0 = 2$.
Sur **GeoGebra**, représenter graphiquement les nombres x_0, x_1, x_2.

3. Rappeler la formule de l'équation de la tangente au point d'abscisse x_n.

4. En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

5. En déduire la valeur de x_1 et x_2.

6. Écrire un programme en **Python** permettant de calculer une valeur approchée de x_{10}.

TICE 45 min Chercher Modéliser Calculer Raisonner

2 Paradoxe de Zénon

Voici l'énoncé du paradoxe de Zénon :

> Un jour, Achille a disputé une course avec une tortue.
> Comme Achille était réputé pour être un coureur très rapide,
> il avait accordé à la tortue une longueur d'avance.
> Bien qu'Achille court plus vite que la tortue, Zénon affirme qu'Achille ne pourra jamais rattraper la tortue.

On suppose qu'Achille a laissé une avance de 900 mètres à la tortue et qu'Achille court à une vitesse dix fois supérieure à celle de la tortue.
On note A_n la position de Achille à l'étape n et T_n celle de la tortue.

Étape 0 : Achille est au départ de la course et la tortue est à 900 mètres .

Étape 1 : Achille arrive à la position à 900 mètres et la tortue est arrivée à une position T_1.

Étape 2 : Achille arrive à la position T_1 et la tortue est arrivée à une position T_2.
Et ainsi de suite.

VIDÉO
Un paradoxe de Zenon :
Achille et la tortue
lienmini.fr/maths-s01-01

A ▸ Étude à l'aide d'un tableur

1. Ouvrir un tableur et recopier le tableau suivant.

	A	B	C	D
1	n	A_n	T_n	$T_n - A_n$
2	0			
3	1			
4	2			

1. Remplir la colonne A avec des valeurs de n allant de 0 à 20.
2. Quelle est la valeur à mettre dans la cellule B2 ? dans la cellule C2 ?
3. Quelle est la formule à rentrer dans la cellule D2 ?
4. Lorsque Achille parcourt k mètres, combien de mètres parcourt la tortue ?
5. En déduire les formules à rentrer dans les cellules B3 et C3.
6. Par recopie vers le bas, compléter les colonnes B, C et D.
7. Conjecturer la limite des suites (A_n), (T_n) et $(T_n - A_n)$.

B ▸ Étude théorique

Pour tout entier naturel n, on note u_n la distance parcourue par la tortue entre l'étape n et l'étape $n + 1$.
v_n la distance parcourue par Achille entre l'étape n et l'étape $n + 1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = u_{n-1}$ et $u_n = \dfrac{v_n}{10}$
2. En déduire que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis celle de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de T_n, puis celle de A_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de $T_n - A_n$ et son signe.
6. Démontrer les conjectures sur les limites faites dans la partie A.
7. Achille dépassera-t-il la tortue ?

C ▸ Deuxième modélisation

On suppose toujours qu'Achille a laissé une avance de 900 mètres à la tortue, qu'Achille court à une vitesse de 10 $m \cdot s^{-1}$ et que la tortue court à une vitesse de 1 $m \cdot s^{-1}$.
On note maintenant A_n la position d'Achille et T_n celle de la tortue par rapport à la ligne de départ, n secondes après le début de la course.
Achille dépassera-t-il la tortue ?

Travaux pratiques

Algo TICE 55 min Représenter Raisonner Chercher Modéliser

3 Modèle de Malthus

C'est en 1798, dans la première édition de son *Essai sur le principe de population*, que le Révérend Thomas Robert Malthus (1766-1834) a formulé son « principe de population » : « Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique. Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique. »

A ▸ Cas général

On considère une population dont la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est constante égale à r exprimé sous forme décimale (r est appelé taux de croissance).
On note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.
De plus, on note a_n le nombre d'individus que l'on peut nourrir avec les subsistances disponibles l'année n.

1. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n
2. Exprimer P_n en fonction de n et P_0.
3. On suppose que (a_n) est une suite arithmétique de raison s.
Déterminer l'expression de a_n en fonction de a_0 et s.
4. Selon les valeurs de r, déterminer les variations de P_n et sa limite.
5. Selon les valeurs de s, déterminer les variations de a_n et sa limite.

B ▸ Étude de cas

On s'intéresse à la population d'un pays.
On suppose qu'en 1 800, il y avait 5 millions d'habitants, et que la population augmente chaque année de 1 %.
En 1800, les subsistances peuvent nourrir 10 millions d'habitants, et chaque année, grâce au progrès de la technologie, elles peuvent nourrir 100 000 personnes de plus.
La question que l'on se pose est la suivante : est-ce qu'il y aura toujours assez de subsistances pour toute la population ?
On note P_n la population en millions d'habitants en 1 800 + n et a_n le nombre d'individus, en millions, pouvant être nourris par les subsistances en 1 800 + n.

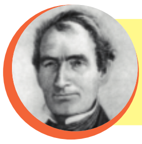
1. Ouvrir un tableur et recopier le tableau suivant.

	A	B	C
1	Année	P_n	a_n
2	1800		
3	1801		
4	1802		

2. a) Compléter la colonne A pour qu'elle contienne toutes les années de 1800 à 2000.
b) Quelle valeur faut-il rentrer dans la cellule B2 ? Et la cellule C2 ?
c) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes de la suite (P_n) dans la colonne B ?
d) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule C3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes de la suite (a_n) dans la colonne C ?
e) Compléter les colonnes *B* et *C*.
3. À l'aide de la fonction « nuage de points » représenter graphiquement P_n et a_n en fonction de l'année $(1800 + n)$.
4. À l'aide du tableur, déterminer au bout de combien d'années la population aura doublé.
5. À l'aide du tableur, déterminer en quelle année la situation devient problématique.
6. Écrire un programme en **Python** permettant de déterminer l'année où la situation devient problématique.
7. Que peut-on penser de ce modèle ?

TICE 40 min Représenter Raisonner Chercher Modéliser

4 Modèle de Verhulst



Pierre François Verhulst (1804-1849) vers 1840, reprend les travaux de Malthus en introduisant dans les équations l'interaction des populations avec leur environnement.

A ▶ Comprendre l'équation logistique

On considère une population P et on note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.
Dans ce modèle, la différence entre taux de natalité et le taux de mortalité est une fonction affine de la population $P_n \mapsto r - b\,P_n$ avec r et b deux réels positifs.

1. On note K la constante $\frac{r}{b}$. Montrer que $r - bP_n = r\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to 0}(r - bP_n)$. La constante r est appelé taux de croissance intrinsèque.

3. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to K}(r - bP_n)$. La constante K est appelée capacité biotique, ou capacité d'accueil.

4. Établir que $P_{n+1} - P_n = rP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$. La suite (P_n) est appelée suite logistique.

B ▶ Exemple de suites

1. a) Préparer un tableur comme ci-contre où les cases bleues sont renseignées par l'utilisateur et les cases roses calculent les termes de la suite.

	A	B	C	D
1	$K =$		n	P_n
2	$r =$		0	
3	$P_0 =$		1	
4			2	

b) Quelle formule entrer dans la cellule D2 pour afficher la valeur renseignée par l'utilisateur en B3 ?
c) Quelle formule entrer dans la cellule D3 pour obtenir par recopie vers le bas tous les termes de la suite (P_n) dans la colonne D ?
d) Compléter la colonne D.

2. À l'aide du tableur, calculer les termes de ces trois suites, puis décrire leur comportement.
a) $K = 15$, $r = 0{,}6$ et $P_0 = 20$. **b)** $K = 15$, $r = 1{,}9$ et $P_0 = 14$. **c)** $K = 15$, $r = 2{,}4$ et $P_0 = 12$.

C ▶ Évolution de la population d'éléphants

À la fin du XIXe siècle, la population des éléphants est en voie d'extinction et un parc naturel entre l'Afrique du Sud et le Mozambique est créé : le parc Kruger. Le tableau ci-dessous indique les effectifs observés.

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Effectifs observés	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310

1. On décide de modéliser le nombre d'éléphants en 1905 + n par une suite (P_n) en utilisant le modèle de Verhulst.
On choisit $K = 7500$, $r = 0{,}15$, et $P_0 = 10$.
a) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, recopier et compléter le tableau ci-contre.

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Effectifs théoriques											

b) À l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie, représenter sur un même graphique les effectifs observés et les effectifs théoriques en fonction de l'année.
c) Que peut-on penser de ce modèle ?