1

Suites et récurrence

Achille se lance dans une course avec une tortue. Comme il court plus vite que la tortue, Achille décide de lui laisser de l'avance.

Achille rattrapera-t-il la tortue ?

↳ TP 2 p. 45

VIDÉO WEB
Un paradoxe de Zenon : Achille et la tortue
lienmini.fr/maths-s01-01

Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-s01-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 1$.
Calculer u_0 et u_5.

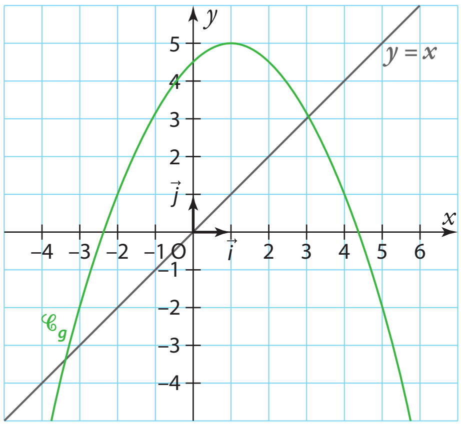
2 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

3 Représenter graphiquement une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 2$.
Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On a représenté graphiquement ci-contre une fonction g et la droite d'équation $y = x$. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.
Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n).



4 Étudier les variations d'une suite

Étudier les variations des suites suivantes.

a) (u_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 8$.

b) (v_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{3^{n-1}}$.

5 Modéliser avec une suite

Un lycée a 1 500 élèves inscrits le 1er septembre 2020.
Chaque année, 30 % des anciens élèves ne se réinscrivent pas et il y a 500 nouveaux élèves.

1. Combien y aura-t-il d'élèves inscrits au lycée le 1er septembre 2021 ?

2. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

6 Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$.

a) Déterminer la nature de la suite (u_n), puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (v_n), puis donner l'expression de v_n en fonction de n.

b) Calculer v_{10}.

Activités

30 min

1 Introduire le raisonnement par récurrence

Un service de vidéos à la demande avec abonnement dispose de 2 000 films en 2020.
Chaque année, il retire de la plateforme 10 % de ses anciens films, et rajoute 200 nouveaux films.

1. Déterminer le nombre de films sur la plateforme en 2021 et en 2022.

2. Le service de vidéos à la demande fait de la publicité pour dire que le nombre de films sur la plateforme sera toujours constant. Peut-on croire cette publicité ?

3. On note u_n le nombre de films à la disposition des clients en $2020 + n$.

a) Donner la valeur de u_0 et u_1.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

c) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.

4. On veut démontrer le résultat de la question précédente.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété « $u_n = 2\,000$ ».

a) Écrire la propriété P_0 et déterminer si elle est vraie. On dit alors que la propriété est **initialisée**.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 2\,000$.
Démontrer que la propriété P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2\,000$.
On dit alors que la propriété est **héréditaire.**

c) Si une propriété est **initialisée** pour $n = 0$ et qu'elle est **héréditaire** pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le principe de récurrence nous dit que la propriété est **vraie** pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc démontré que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\,000$.
En déduire le nombre de films à la disposition des clients en 2050.

↪ Cours 1 p. 16

20 min

2 Introduire la définition de limite d'une suite

A ▸ Étude de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

1. Calculer u_0, u_{10} et u_{100}. Conjecturer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Remarque On dit que la suite (u_n) tend $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

2. Déterminer la valeur d'un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$:

a) $u_n > 100$ **b)** $u_n > 1\,000$ **c)** $u_n > A$ avec A un réel strictement positif.

B ▸ Étude de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

1. Calculer v_1, v_{10} et v_{100}.

2. Conjecturer la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Remarque On dit que la suite (v_n) tend un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

3. Déterminer la valeur d'un entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$:

a) $v_n \in\,]0,9\,;1,1[$ **b)** $v_n \in\,]0,99\,;1,01[$ **c)** $v_n \in\,]1 - 10^k\,;1 + 10^k[$ avec $k \in \mathbb{N}$.

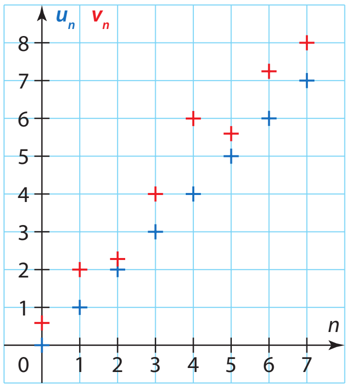
↪ Cours 2 p. 18

20 min

3 Découvrir des propriétés sur les limites

A ▸ Théorème de comparaison

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n$.
Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$.
On a représenté graphiquement ci-contre la suite (u_n) en bleu et la suite (v_n) en rouge.



1. Donner la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Conjecturer la limite de la suite (v_n).

B ▸ Théorème des gendarmes

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On veut étudier le comportement de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (w_n).

2. En donnant un encadrement de $(-1)^n$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. Représenter sur un même graphique les suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et (w_n).

4. Donner la limite des suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

5. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

↪ Cours 4 p. 22

25 min

4 Étudier des suites monotones

1. Julie affirme qu'une suite strictement croissante tend vers $+\infty$.
Maxime lui répond qu'elle a tort et qu'il peut lui donner un contre-exemple.
Qui a raison ?
Justifier.

2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 4 - \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 4$.

c) Calculer u_1, u_{10} et u_{100}, puis conjecturer, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = n^2$.

a) Montrer que la suite (v_n) est strictement croissante.

b) Soit $A > 0$. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n > A$.

Remarque La suite (v_n) n'est donc pas majorée.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -1 + 0{,}5^n$

a) Montrer que la suite (w_n) est strictement décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > -1$.

c) Calculer w_0, w_{10} et w_{100} puis conjecturer, si elle existe, la limite de la suite (w_n).

↪ Cours 5 p. 24

1 Raisonnement par récurrence

Théorème **Principe du raisonnement par récurrence**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :
① $P(0)$ est vraie.
② Pour tout entier naturel n fixé, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
Alors pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

Théorème **Principe du raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang**

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété définie pour $n \geqslant n_0$. On suppose que :
① $P(n_0)$ est vraie.
② Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$ fixé, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
Alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie.

Remarque Pour démontrer par récurrence qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on procède en trois étapes.

Étape ① **Initialisation** On vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$.

Étape ② **Hérédité** Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant n_0$.
On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion** On conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $3^n = 5 + 2n$ »

- La propriété $P(0)$ est « $3^0 = 5 + 2 \times 0$ »
  Ici $3^0 = 1$ et $5 + 2 \times 0 = 5$. Donc $P(0)$ est fausse.
- La propriété $P(n+1)$ est « $3^{n+1} = 5 + 2(n+1)$ »

Propriété **Inégalité de Bernoulli**

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-03

Soit a un réel strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ».

Étape ① **Initialisation**

Pour $n = 0$, $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Donc $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape ② **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$

$(1+a)^{n+1} = (1+a) \times (1+a)^n$. Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+a) \times (1+na)$ car $1 + a \geqslant 0$.

$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + na + a + na^2$ soit $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$

Or $na^2 \geqslant 0$. Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion**

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s01-04 | Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Démontrer une propriété par récurrence

Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ». 1 2

Étape ① **Initialisation** Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1$

Donc $S_1 = \dfrac{1 \times (1+1)}{2}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Étape ② **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \dfrac{n \times (n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{n \times (n+1) + (n+1) \times 2}{2} = \dfrac{(n+1) \times (n+2)}{2}$ 3

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion** On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Conseils & Méthodes

1 Il faut tout d'abord identifier la propriété à démontrer par récurrence.

2 Une démonstration par récurrence se fait en trois étapes : initialisation, hérédité, puis conclusion.

3 On utilise l'hypothèse de récurrence.

À vous de jouer !

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

↪ Exercices 37 à 40 p. 30

Méthode 2 Utiliser la récurrence avec les suites

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 6$.
Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $u_{n+1} < u_n$ » 1 2

Étape ① **Initialisation** Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = 2 \times 2 - 6 = -2$. Donc $u_1 < u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape ② **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+2} < u_{n+1}$

$u_{n+1} < u_n$ 3 Donc $2u_{n+1} < 2u_n$. D'où $2u_{n+1} - 6 < 2u_n - 6$. Donc $u_{n+2} < u_{n+1}$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion** On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Conseils & Méthodes

1 Une suite strictement décroissante est une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$.

2 Une démonstration par récurrence se fait en trois étapes : initialisation, hérédité, puis conclusion.

3 On utilise l'hypothèse de récurrence.

À vous de jouer !

3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 7$. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement croissante.

4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 7}$. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

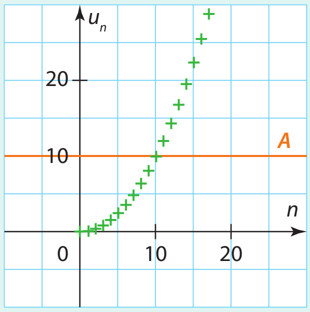
↪ Exercices 41 à 45 p. 30

2 Limite d'une suite

Définition — Suite divergeant vers l'infini

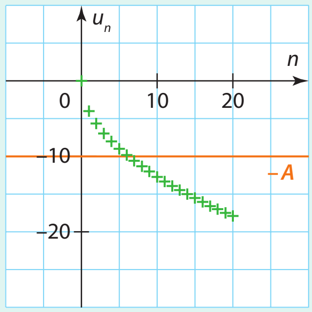
• On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



• On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]-\infty\,;-A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **diverge** et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$

Pour tout réel $A > 0$, $u_n > A \Leftrightarrow n^2 > A$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $A > 0$

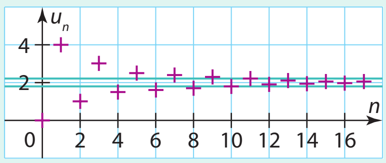
Donc l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0, avec $n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Définition — Suite convergeant vers un nombre réel

On dit que la suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) **converge** et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



Remarque Tout intervalle ouvert contenant ℓ contient un intervalle ouvert centré en ℓ, c'est-à-dire de la forme $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$, avec ε un réel strictement positif.

On peut donc réécrire la définition : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon\,;\ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Théorème — Unicité de la limite

Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Remarque Une suite qui ne converge pas, diverge. Elle peut soit diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit n'avoir pas de limite.

Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite et prend alternativement les valeurs -1 et 1.

Méthode 3 Déterminer une limite et un seuil en utilisant la définition

Algo

Énoncé

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n + 2$.

a) Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3 - \dfrac{1}{n}$.

a) Pour tous réels positifs a et b, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $3 - a < v_n < 3 + b$.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n + 1$.

a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (w_n).

b) Écrire un programme en **Python**, permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $w_n > 1\,000$.

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de cet entier.

Solution

1. a) Pour tout réel $A > 0$, $u_n > A \Leftrightarrow 3n + 2 > A \Leftrightarrow n > \dfrac{A-2}{3}$

Posons $n_0 = E\left(\dfrac{A-2}{3}\right) + 1$ **1** Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a $u_n > A$.

b) D'après la question précédente, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) Pour tous réels positifs a et b, $3 - a < v_n < 3 + b$

$\Leftrightarrow 3 - a < 3 - \dfrac{1}{n} < 3 + b \Leftrightarrow -a < -\dfrac{1}{n} < b \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{n} > -b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < n$ **2**

car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\dfrac{1}{n} > 0$

Posons $n_0 = E\left(\dfrac{1}{a}\right) + 1$ **1** Pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, on a $3 - a < v_n < 3 + b$

b) D'après la question précédente, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$.

3. a) À l'aide du mode `Suite` de la calculatrice, on peut calculer les premiers termes.

On a $w_{10} = 4\,095$ et $w_{20} = 4\,194\,303$.

On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$. **3**

b) On obtient le programme ci-contre. **4**

c) On a $w_7 = 511$ et $w_8 = 1\,023$. Donc $n_0 = 8$.

```python
n = 0
w = 3
while w <= 1000:
    n = n+1
    w = 2*w+1
print (n)
```

Conseils & Méthodes

1 $E(x)$ est la partie entière de x. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

2 Dans une inégalité, si on multiplie tous les membres par un nombre négatif, on inverse l'ordre.

3 Il faut regarder le tableau de valeurs de la suite (w_n) sur la calculatrice.

4 On veut connaître le plus petit entier n tel que $w_n > 1\,000$. Il faut donc faire tourner le programme tant que $w_n \leqslant 1\,000$.

À vous de jouer !

5 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 4$.

1. Pour tout réel $A > 0$, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2. Écrire un programme en **Python** donnant le plus petit entier naturel n tel que $u_n < -10\,000$.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer cet entier.

7 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 5 + \dfrac{1}{n}$.

1. Pour tous réels positifs a et b, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $5 - a < v_n < 5 + b$

2. En déduire la limite de la suite (v_n)

8 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = 2v_n + 7$.

1. Conjecturer la limite de la suite (v_n).

2. Écrire un programme en **Python** donnant le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10\,000$.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer cet entier.

↪ Exercices 46 à 53 p. 30

3 Propriétés des limites

Propriété Limite des suites de référence

Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$(u_n + v_n)$ a pour limite	$(u_n \times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\ell \times \ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$ **indéterminée** si $\ell = 0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$ **indéterminée** si $\ell = 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée**	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	**indéterminée**	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell \neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell > 0$ $+\infty$ si $\ell < 0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $-\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell' > 0$ ou $\ell' = 0^+$ $+\infty$ si $\ell' < 0$ ou $\ell' = 0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**indéterminée**
0	0	**indéterminée**

Remarques

Dans les deux tableaux précédents :

① **indéterminée** signifie que c'est une forme indéterminée, et qu'il n'y a pas de propriété pour déterminer la limite.

② $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.

Exemples

① Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

② Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n\square\sqrt{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

③ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-s01-04 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 4 Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ **b)** (v_n) **définie par** $v_n = -5\sqrt{n} - n^3$ **c)** (w_n) **définie par** $w_n = \dfrac{2}{3n+5}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme) 1

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$ (par produit) 2

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (par somme) 1

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+5 = +\infty$ (par produit et somme) 1 2

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par quotient) 3

Conseils & Méthodes

Pour déterminer la limite d'une suite en utilisant les propriétés sur les opérations, on essaye de décomposer la suite comme :

1 somme de suites de référence.

2 produit de suites de référence.

3 quotient de suites de référence.

À vous de jouer !

9 Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) $u_n = n^2 + n - 5$ **b)** $v_n = n^2\sqrt{n} + 2$ **c)** $w_n = -\dfrac{1}{2n-5}$

10 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} - 10$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1}{n}$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n}}$

➥ Exercices 54 à 57 p. 31

Méthode 5 Lever une forme indéterminée

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 - n$. **b)** (v_n) **définie par** $v_n = \dfrac{4n^2}{n+1}$.

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc on obtient une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ». Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times (n-1)$ 1

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par produit)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ (par produit)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc on obtient une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^2 \times 4}{n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$ 2 donc $v_n = \dfrac{n \times 4}{1+\dfrac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \times 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par quotient)

Conseils & Méthodes

1 Pour lever une indéterminée, on peut factoriser ou développer.

2 Pour lever une indéterminée dans un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

À vous de jouer !

11 Pour chaque suite suivante, montrer que l'on a une forme indéterminée et lever la forme indéterminée à l'aide d'une factorisation.

a) $u_n = -n^3 + 2n^2$ **b)** $v_n = n^2 - 3n + 1$

12 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{5n-2}$ **b)** $v_n = \dfrac{2n}{1-n^2}$

➥ Exercices 58 à 62 p. 31

Cours

4 Limite et comparaison

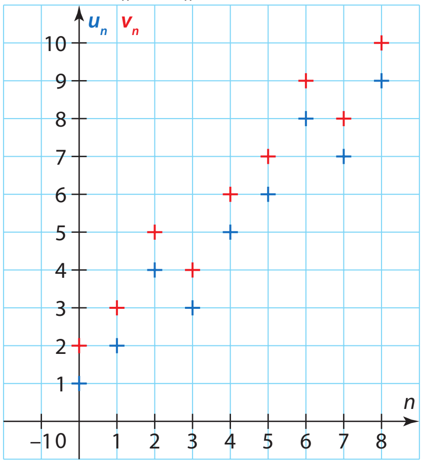
Théorème Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.

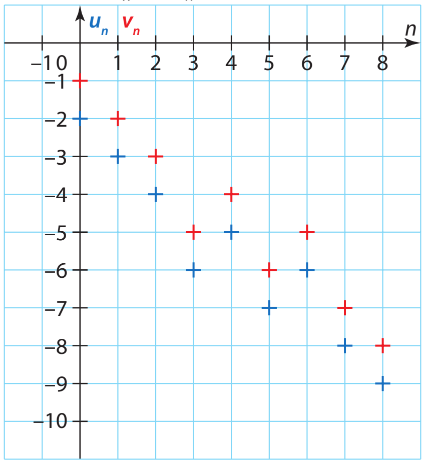
- **Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$**
- **Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$**

Exemples Sur les schémas suivants, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge avec $u_n \leqslant v_n$.

① Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.



② Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$.



Démonstration

Démontrons la première propriété. Soit $A > 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.

Or il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.

Donc pour tout entier n tel que $n \geqslant p$ et $n \geqslant n_0$, $v_n \geqslant u_n > A$

Posons $q = \max(p, n_0)$. Pour tout entier $n \geqslant q$, $v_n > A$.

Donc par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-05

Théorème Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.

On suppose que :

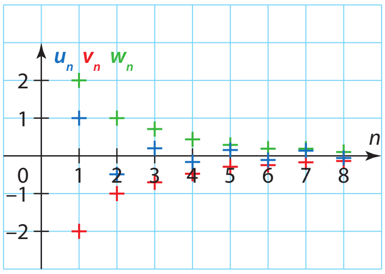
- **il existe un entier naturel n_0,**

tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

- **$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$**

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Exemple Sur le schéma suivant, on a représenté (u_n) en bleu, (v_n) en rouge et (w_n) en vert.



Propriété Inégalités et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.

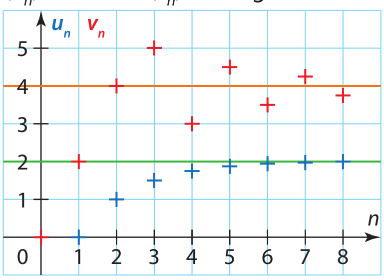
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0,

tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,

$$u_n \leqslant v_n.$$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exemple Sur le schéma suivant, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge.



Méthode 6 Utiliser le théorème de comparaison

Énoncé

1. **Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2 \times \sin(n)$.**

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. **Soit v_n la suite définie par $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$.**

Déterminer la limite de la suite (v_n).

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ **1** Donc $-2 \leqslant 2 \times \sin(n) \leqslant 2$.

Donc $n - 2 \leqslant n + 2 \times \sin(n) \leqslant n + 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$. **2**

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **3**

Donc $-n^2 - n - 1 \leqslant -n^2 - n + (-1)^n \leqslant -n^2 - n + 1$.

Donc $v_n \leqslant -n^2 - n + 1$ **4**

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 - n + 1 = -\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $(\sin(n))$ n'a pas de limite.

3 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (v_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

4 Après avoir encadré v_n, on détermine la limite des deux suites de l'encadrement pour choisir quelle inégalité sera utilisée.

À vous de jouer !

13 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 5 \times (-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2 - 5$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

14 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\sqrt{n} - \cos(2n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant -\sqrt{n} + 1$.

2. En déduire la limite de la suite (v_n).

↪ Exercices 63 à 65 p. 31

Méthode 7 Utiliser le théorème des gendarmes

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **1**

Donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ **2**

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Conseils & Méthodes

1 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
On essaye donc d'abord d'encadrer la suite (u_n).

2 On détermine ensuite la limite des deux suites de l'encadrement.

À vous de jouer !

15 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -5 + \dfrac{\sin(n)}{n}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

16 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 42 - \dfrac{5 \times (-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

↪ Exercices 66 à 70 p. 31

5 Suites géométriques et suites monotones

Propriété Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel.

- **Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$**
- **Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$**
- **Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$**
- **Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.**

Exemple $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Démonstration

Si $q > 1$	Si $0 < q < 1$	Si $-1 < q < 0$
Posons $q = 1 + h$ avec $h > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli, $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + nh = +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+h)^n = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.	Posons $p = \frac{1}{q}$ $\frac{1}{q} > 1$, donc $p > 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n = +\infty$. Or $q = \frac{1}{p}$, soit $q^n = \frac{1}{p^n}$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.	Posons $s = -q$. On a $0 < s < 1$ Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} s^n = 0$. Or $q = -s$. Donc $q^n = (-s)^n = (-1)^n s^n$. Donc $-s^n \leqslant q^n \leqslant s^n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} -s^n = \lim\limits_{n \to +\infty} s^n = 0$ Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-06

Définition Suite majorée, minorée, bornée

Soit (u_n) une suite définie à partir du rang k.

- **On dit que (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \leqslant M$.**
- **On dit que (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geqslant k$, $u_n \geqslant m$.**
- **On dit que (u_n) est bornée si (u_n) est majorée et minorée.**

Propriétés Convergence d'une suite monotone

① Toute suite croissante majorée converge.
② Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
③ Toute suite décroissante minorée converge.
④ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration

Démontrons la propriété ②. Soit $A > 0$.

Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier naturel p tel que $u_p > A$.

Or (u_n) est croissante, donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

Donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n > A$.

Donc par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-07

Remarque Les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.
Par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + (-1)^n$ diverge vers $+\infty$ mais elle n'est pas croissante.

Exercices résolus

Méthode 8 Déterminer la limite d'une suite géométrique

Énoncé

1. **Déterminer la limite de la suite géométrique (u_n) de raison 2 et de premier terme $u_0 = -4$.**

2. **Déterminer la limite de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.**

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$. **1** Donc $u_n = -4 \times 2^n$

$2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $-4 < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times 2^n = -\infty$. **2** Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. $-1 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. **2** Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Conseils & Méthodes

1 Si (u_n) est une suite géométrique de raison q. Alors pour tous entiers n et p, on a :
$u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$

2 On applique la propriété sur les opérations des limites.

À vous de jouer !

17 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \frac{3}{4^n}$.   **b)** $u_n = \frac{10 \times 7^n}{-2}$.

18 Déterminer la limite de la suite géométrique (u_n) dans chaque cas suivant.

a) (u_n) de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3$.

b) (u_n) de raison 0,2 et de premier terme $u_0 = 7$.

↪ **Exercices 71 à 78** p. 32

Méthode 9 Utiliser le théorème de convergence des suites monotones

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{n-1}{n+4}$.

1. **Montrer que (u_n) est majorée par 1.**   **2.** **Montrer que (u_n) est croissante.**   **3.** **En déduire que (u_n) converge.**

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 = \frac{n-1}{n+4} - 1 = \frac{n-1-(n+4)}{n+4} = \frac{-5}{n+4}$ **1**

Donc $u_n - 1 < 0$ Donc $u_n < 1$. Donc (u_n) est majorée par 1.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+5} - \frac{n-1}{n+4} = \frac{n(n+4)-(n-1)(n+5)}{(n+4)(n+5)}$$ **2**

$$= \frac{n^2+4n-(n^2+5n-n-5)}{(n+4)(n+5)} = \frac{5}{(n+4)(n+5)}.$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc (u_n) est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 1. Donc (u_n) converge. **3**

Conseils & Méthodes

1 (u_n) majorée par 1 signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$.
On montre que $u_n - 1 \leqslant 0$.

2 Pour étudier les variations, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:
- si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors la suite est croissante.
- si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors la suite est décroissante.

3 Toute suite croissante majorée converge.

À vous de jouer !

19 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \frac{2n-2}{n+4}$.

1. Montrer que (u_n) est majorée par 2.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

20 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = n^2 + 4$.

1. Montrer que (v_n) est minorée par 4.

2. Étudier les variations de la suite (v_n).

3. Peut-on appliquer le théorème de convergence des suites monotones ?

↪ **Exercices 79 à 85** p. 32

Exercices résolus

Méthode 10 Étudier la convergence d'une suite

Cours 1 p. 16, 2 p. 18, 3 p. 20, 4 p. 22

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.

1. **Étudier les variations de la suite (u_n).**

2. **Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$**

3. **En déduire la limite de la suite (u_n).**

4. **Calculer les premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.**

5. **Démontrer la conjecture de la question 4.**

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 1$ **1**

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $u_n \geqslant n$ ».

Étape ① **Initialisation** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 \geqslant 0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape ② **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant n$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n + 1$.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ donc $u_{n+1} \geqslant n + 2n + 1$ **2** donc $u_{n+1} \geqslant n + 1$ car $2n \geqslant 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion** On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. **3**

4. $u_0 = 0$, $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = 1$, $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = 4$ et $u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = 9$. On conjecture que $u_n = n^2$.

5. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $u_n = n^2$ ».

Étape ① **Initialisation** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 = 0^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape ② **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = n^2$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} = (n+1)^2$.

$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ donc $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1$ **2** Donc $u_{n+1} = (n+1)^2$ **4**

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ **Conclusion** On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier les variations d'une suite, on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$, alors la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou $u_{n+1} \leqslant u_n$, alors la suite est décroissante.

2 On utilise l'hypothèse de récurrence.

3 Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

4 On utilise l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

À vous de jouer !

21 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

1. Etudier les variations de la suite (u_n).

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 1$

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. Calculer les premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.

5. Démontrer la conjecture de la question précédente.

22 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Calculer les premiers termes de la suite (u_n), puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Démontrer la conjecture de la question précédente.

Exercices 95 à 113 p. 33

Exercices résolus

Méthode 11 Étudier des phénomènes d'évolution

Cours 1 p. 16, 2 p. 18, 3 p. 20, 4 p. 22, 5 p. 24

Énoncé

Le 1er janvier 2020, il y a 200 poissons dans un aquarium. Chaque année, 15 % des poissons meurent, et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année. On note u_n le nombre de poissons dans l'aquarium le 1er janvier 2020 + n.

1. **Déterminer le nombre de poissons dans l'aquarium en 2021.**

2. **Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 45$**

3. **On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 300$ (on peut démontrer cette relation par récurrence).**
Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

4. **Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 300$.**

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

c) A l'aide de la question b), déterminer la limite de la suite (u_n). Le résultat est-il cohérent avec la question 3 ?

5. **Interpréter dans le contexte les variations et la limite de la suite (u_n).**

Solution

1. $200 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) + 45 = 215$. **1** En 2021, il y aura 215 poissons dans l'aquarium.

2. Chaque année 15 % des poissons meurent et on ajoute 45 nouveaux poissons en fin d'année. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 - \frac{15}{100}\right)u_n + 45 = 0{,}85 \times u_n + 45$ **1**

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 300. Donc la suite (u_n) est convergente.
Soit ℓ sa limite. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0{,}85 \times \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + 45$. Donc $\ell = 0{,}85 \times \ell + 45$.
D'où $0{,}15\ell = 45$. Donc $\ell = \frac{45}{0{,}15} = 300$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 300 = 0{,}85u_n + 45 - 300 = 0{,}85u_n - 255$
$= 0{,}85 \times (u_n - 300) = 0{,}85v_n$ **2**
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 300 = 200 - 300 = -100$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$. Donc $v_n = -100 \times 0{,}85^n$. Or $v_n = u_n - 300$.
Donc $u_n = v_n + 300$. Donc $u_n = -100 \times 0{,}85^n + 300$.

c) $-1 < 0{,}85 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$ **3** Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -100 \times 0{,}85^n + 300 = 300$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 300$. C'est cohérent avec la question 3.

5. La suite (u_n) est croissante et a pour limite 300. Le nombre de poissons dans l'aquarium augmentera et tendra vers 300.

Conseils & Méthodes

1 15 % des poissons meurent. Cela correspond à une diminution de 15 %. On rappelle que :
- augmenter un nombre de t %, c'est le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$
- diminuer un nombre de t %, c'est le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$

2 Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$ avec q un réel fixé.
Pour cela, il faut utiliser les relations de l'énoncé.

3 Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

À vous de jouer !

23 Un nouveau magazine arrive sur le marché en 2020. La première année (en 2020), 500 personnes s'abonnent. Puis, on prévoit que chaque année, 80 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.
On note u_n le nombre d'abonnés en 2020 + n.
1. Donner la valeur de u_0 et u_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\,000$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

24 Nathalie place 1 000 euros sur un compte épargne le 1er janvier 2020. Chaque année, la banque lui prélève 10 € en juin mais en décembre, elle lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte. On note u_n la somme sur le compte en janvier 2020 + n. On a $u_0 = 1000$.
1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}02u_n - 10{,}2$
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 510$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercices 121 à 126 p. 36

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-s01-07

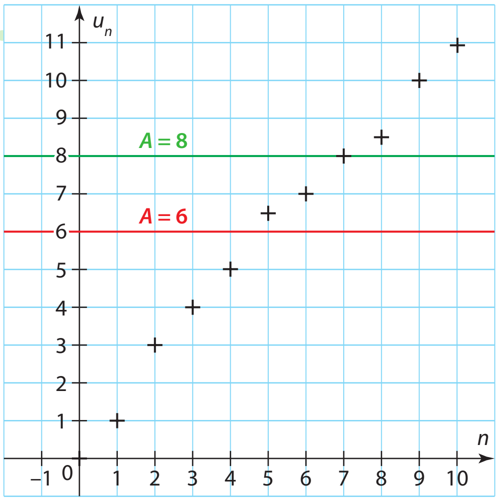
La propriété à démontrer

Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

On utilisera les définitions de suite croissante, de suite majorée et de suite divergeant vers l'infini.

Comprendre avant de rédiger

- Une suite a pour limite $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Pour montrer qu'une suite a pour limite $+\infty$, il faut donc montrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un rang p tel que pour tout entier $n \geqslant p$, on a $u_n > A$.
- Représentons graphiquement une suite croissante et non majorée.
- Graphiquement, on conjecture que la limite de la suite est $+\infty$.
Par exemple :
  - si A = 6, on peut choisir $p = 5$,
  - si A = 8, on peut choisir $p = 8$.



Rédiger

Étape 1
A est un réel strictement positif quelconque.

→ **La démonstration rédigée**
Soit $A > 0$.

Étape 2
On utilise les hypothèses de la propriété : la suite (u_n) n'est pas majorée.

Attention ! Ne pas confondre majorée et minorée.

D'après la définition, une suite est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

Il faut écrire la négation de la définition.

→ La suite (u_n) n'est pas majorée.
Donc pour tout réel M, il existe un entier naturel p, tel que $u_p > M$.
Donc il existe un entier naturel p tel que $u_p > A$.

Étape 3
On utilise la deuxième hypothèse de la propriété : la suite (u_n) est croissante. D'après la définition, une suite est croissante si pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.

→ Or (u_n) est croissante.
Donc pour tout entier $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_p$.

Étape 4
On conclut en utilisant les deux résultats trouvés.

Si $a < b < c$, alors $a < c$.

→ Donc pour tout entier $n \geqslant p$,
$u_n \geqslant u_p > A$
D'où $u_n > A$

Étape 5
$u_n > A$ signifie que u_n appartient à l'intervalle $]A\,;+\infty[$

→ Donc par définition, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante en utilisant la même démarche.

Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.