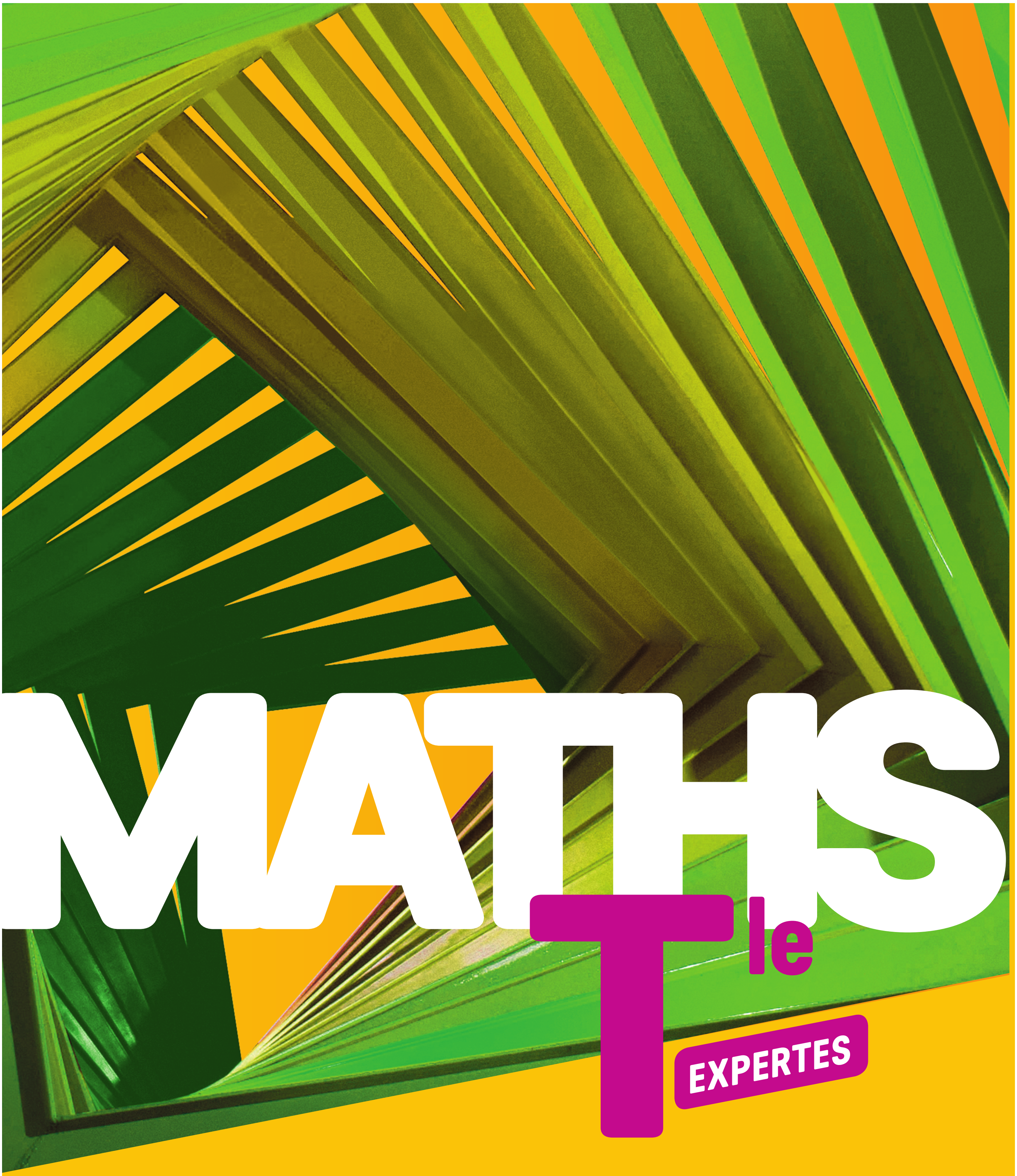

MATHS

T^{le} EXPERTES

Le numérique avec Sésamath

MAGNARD

MATHS Tle EXPERTES

Auteurs
Delphine ARNAUD
Thibault FOURNET-FAYAS
Hélène GRINGOZ
Marie HASCOËT
Laura MAGANA
Paul MILAN

Les auteurs et les éditions MAGNARD remercient vivement :
Les relectrices et relecteurs du manuel pour leurs remarques et leurs suggestions.
L'ensemble des enseignant•e•s pour leur participation aux études menées sur ce manuel.

MAGNARD

Sommaire

Partie 3 GRAPHES ET MATRICES

6 Introduction au calcul matriciel et aux graphes

7 Chaînes de Markov

Dicomaths

Corrigés

Les corrigés des exercices dont le numéro est sur fond blanc 1

Tous les pictos pour se repérer dans le manuel

Algo Pour tester un programme avec un ordinateur ou une calculatrice

Algo Pour compléter un programme ou se référer à son utilisation.

Pour la programmation en langage **Python**.

TICE Utilisation de logiciels (tableur, GeoGebra, géométrie dynamique…)

Calculatrice autorisée Calculatrice non autorisée

Pour faire le lien entre les maths et les autres disciplines

Histoire des sciences · Histoire des maths · SVT · Physique · Chimie · SES · EPS

Pour faire le lien entre les maths et les filières de l'enseignement supérieur :

MPSI · Économie · Sciences · PCSI · Médical · Droit

Programme

Nombres complexes

• Nombres complexes : point de vue algébrique	Dans le manuel
Contenus	1
– Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations.	
– Conjugaison. Propriétés algébriques.	
– Inverse d'un nombre complexe non nul.	
– Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	
Capacités attendues	
– Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.	Méthode 1 Méthode 3 Méthode 4 Méthode 5
– Résoudre une équation linéaire $az = b$.	Méthode 11
– Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$.	Méthode 6
Démonstrations	
– Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière.	Cours 3
– Formule du binôme.	Cours 4

• Nombres complexes : point de vue géométrique	Dans le manuel
Contenus	2
– Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur.	
– Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique.	
– Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit, d'un inverse.	
– Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse.	
– Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique.	
– Forme trigonométrique.	
Capacités attendues	
– Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe.	Méthode 2 Méthode 3
– Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point.	Méthode 1
Démonstrations	
– Formule $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit. Module d'une puissance.	Apprendre à démontrer
Problèmes possibles	
– Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$.	
– Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité.	
– Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia.	

• Nombres complexes et trigonométrie	Dans le manuel
Contenus	2
– Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire.	
– Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe.	
– Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-e^{i\theta}})$, $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-e^{i\theta}})$.	
– Formule de Moivre : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$	
Capacités attendues	
– Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement.	Méthode 3 Méthode 6
– Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.	Méthode 9
– Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes.	Méthode 6
Démonstration	
– Démonstration d'une des formules d'addition.	Cours 5

Nombres complexes

• Équations polynomiales	Dans le manuel
On utilise librement la notion de fonction polynôme à coefficients réels, plus simplement appelée polynôme. On admet que si une fonction polynôme est nulle, tous ses coefficients sont nuls.	
Contenus	1
– Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels. – Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. – Si P est un polynôme et $P(a) = 0$, factorisation de P par $z - a$. – Un polynôme de degré n admet au plus n racines.	
Capacités attendues	
– Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels.	Méthode 8
– Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.	Méthode 10
– Factoriser un polynôme dont une racine est connue.	Méthode 9
Démonstration	Cours 5
– Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$. Factorisation de $P(z)$ par $z - a$ si $P(a) = 0$. – Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.	Apprendre à démontrer
Problèmes possibles	
– Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes. – Formules de Viète. – Résolution par radicaux de l'équation de degré 3.	

• Utilisation des nombres complexes en géométrie	Dans le manuel
Contenus	2
– Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c - a}{b - a}$	
– Racines n-ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers : $n = 2, 3, 4$.	
Capacités attendues	
– Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points.	Méthode 8 Méthode 10
– Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers.	Méthode 7
Démonstration	
– Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$.	Cours 6
Problèmes possibles	
– Lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{5}$, construction du pentagone régulier à la règle et au compas. 5π 2	
– Somme des racines n-ièmes de l'unité. – Racines n-ièmes d'un nombre complexe. – Transformation de Fourier discrète.	

Programme

Arithmétique

	Dans le manuel
Contenus	3
– Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.	
– Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$.	3
– Congruences dans $\mathbb{Z}$. Compatibilité des congruences avec les opérations.	3
– PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide.	4
– Couples d'entiers premiers entre eux.	4
– Théorème de Bézout.	4
– Théorème de Gauss.	4
– Nombres premiers. Leur ensemble est infini.	5
– Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.	5
– Petit théorème de Fermat.	5
Capacités attendues	
– Déterminer les diviseurs d'un entier, le PGCD de deux entiers.	3 Méthode 2 4 Méthode 1 Méthode 3 5 Méthode 4
– Résoudre une congruence $ax \equiv b\,[n]$. Déterminer un inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux.	3 Méthode 5
– Établir et utiliser des tests de divisibilité, étudier la primalité de certains nombres, étudier des problèmes de chiffrement.	3 Méthode 7 5 Méthode 1
– Résoudre des équations diophantiennes simples.	4 Méthode 7
Démonstrations	4
– Écriture du PGCD de a et b sous la forme $ax + by$, $(x\,,y) \in \mathbb{Z}^2$.	Cours 3 et Apprendre à démontrer
– Théorème de Gauss.	4 Cours 4
– L'ensemble des nombres premiers est infini.	5 Cours 2 et Apprendre à démontrer
Exemples d'algorithmes – Algorithme d'Euclide de calcul du PGCD de deux nombres et calcul d'un couple de Bézout. – Crible d'Ératosthène. – Décomposition en facteurs premiers. **Problèmes possibles** – Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers. – Lemme chinois et applications à des situations concrètes. – Démonstrations du petit théorème de Fermat. – Problèmes de codage (codes barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee). – Étude de tests de primalité : notion de témoin, nombres de Carmichaël. – Problèmes de chiffrement (affine, Vigenère, Hill, RSA). – Recherche de nombres premiers particuliers (Mersenne, Fermat). – Exemples simples de codes correcteurs. – Étude du système cryptographique RSA. – Détermination des triplets pythagoriciens. – Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss. – Étude de l'équation de Pell-Fermat.	

Graphes et matrices

	Dans le manuel
Contenus	
– Graphe, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet.	6
– Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe.	6
– Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée.	6
– Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes.	6
– Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3.	6
– Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$.	6
– Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états.	6
– Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé.	7
– Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i, j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$.	7
– Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états.	7
Capacités attendues	
– Modéliser une situation par un graphe.	6 Méthode 7
– Modéliser une situation par une matrice.	6 Méthode 8
– Associer un graphe orienté pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états.	7 Méthode 4
– Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée.	6 Méthode 4
– Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire, calculer le nombre de chemins de longueur donnée entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante).	6 Méthode 6 Méthode 8 Méthode 10 7 Méthode 3 Méthode 5 Méthode 8 Méthode 9
Démonstrations	
– Expression du nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance n-ième de la matrice d'adjacence.	6 Cours 6 et Apprendre à démontrer
– Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état i à l'état j en n transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après n transitions.	7 Cours 5 et Apprendre à démontrer
Problèmes possibles	
– Étude de graphes eulériens.	
– Interpolation polynomiale.	
– Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique.	
– Modèle de diffusion d'Ehrenfest.	
– Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes.	
– Algorithme PageRank.	

PARTIE 1

Nombres complexes

Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557)

Jérôme Cardan (1501-1576)

Raphaël Bombelli (1526-1572)

Leonhard Euler (1707-1783)

À la Renaissance, une querelle oppose Tartaglia et Cardan concernant la résolution générale des équations du 3[e] degré, publiée par Cardan dans son *Ars Magna* (1545).

↪ Dicomaths p. 237 et 241

En 1572, Bombelli dans son *Algebra* donne une méthode pour résoudre les équations algébriques de degrés 3 et 4 en introduisant la notation $\sqrt{-3}$.

↪ Dicomaths p. 237

En 1748, Euler énonce la formule de Moivre, les formules d'Euler et l'identité d'Euler. Il introduit le symbole i.

↪ Dicomaths p. 238

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes…

- J'ai étudié certains ensembles de nombres et leurs propriétés : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- J'ai résolu des équations du 2nd degré dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

En Terminale…

Je vais découvrir de nouveaux nombres (ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$), étudier leurs propriétés algébriques et leurs applications géométriques.

Carl Friedrich Gauss (1707-1783)

En 1799, Gauss soutient sa thèse de doctorat : « Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe ». Par la suite, il s'intéressera aux polygônes réguliers.

↪ Dicomaths p. 239

Jean-Robert Argand (1768-1822)

En 1806, Argand publie son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* et introduit la forme algébrique.

↪ Dicomaths p. 237

Félix Klein (1849-1925)

En 1872, Klein énonce une manière d'étudier la géométrie à travers des similitudes directes du plan complexe.

↪ Dicomaths p. 239

Benoît Mandelbrot (1924-2010)

Au XX^{e} siècle, les nombres complexes sont très présents en physique (phénomènes ondulatoires), en économie (phénomènes cycliques, fractales de Mandelbrot) ou encore en art .

↪ Dicomaths p. 239

Domaines professionnels

- Un·e **ingénieur·e** en physique utilise les nombres complexes pour représenter un phénomène ondulatoire : mécanique (oscillations), électrique (impédances, filtres passe-haut etc.) ou optique. De manière générale ces calculs servent pour la modulation et la démodulation dans les télécommunications.
- Un·e **acousticien·ne** étudie les phénomènes acoustiques d'une salle en utilisant des calculs avec des nombres complexes.
- Un·e **ingénieur·e** dans le domaine de l'audioprothèse fait de même en optimisant les prothèses auditives.
- Un·e **économiste** peut modéliser un cycle de croissance ou un cycle de prix grâce aux nombres complexes.