DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-e07-05

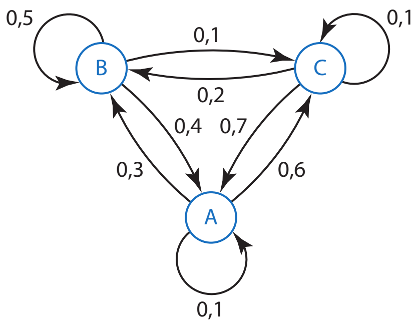
Exercices calculs et automatismes

23 Représenter à l'aide d'un graphe

Représenter la situation suivante à l'aide d'un graphe.
On considère trois événements A, B et C ; $P_A(A) = P_B(A) = \frac{1}{3}$,
$P_A(C) = P_c(C) = \frac{1}{2}$ et $P_B(C) = P_C(B) = \frac{1}{4}$.

24 Lire un graphe

On considère le graphe probabiliste suivant.



Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. $P_A(B)$ est égal à :
a 0,1 b 0,6 c 0,3 d nécessite des calculs

2. $P(A)$ est égal à :
a 0,1 b 0,6 c 0,3 d nécessite des calculs

3. $P_B(B)$ est égal à :
a 0,5 b 0,4 c 0,1 d nécessite des calculs

4. $P(A \cap C)$ est égal à :
a 0,7 b 0,6 c 0,1 d nécessite des calculs

5. $P_C(A)$ est égal à :
a 0,7 b 0,6 c 0,1 d nécessite des calculs

25 Matrice de transition (1)

On considère une chaîne de Markov admettant la matrice de transition suivante (dans l'ordre A, B, C).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. $P_B(C)$ est égal à :
a $\frac{1}{2}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{2}{7}$ d nécessite des calculs

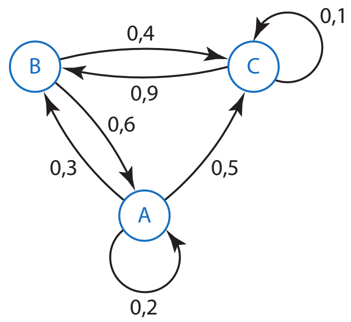
2. $P_C(C)$ est égal à :
a $\frac{1}{2}$ b $\frac{2}{5}$ c $\frac{2}{7}$ d nécessite des calculs

3. $P_B(A)$ est égal à :
a $\frac{3}{5}$ b $\frac{2}{5}$ c 0 d nécessite des calculs

4. $P(A \cap C)$ est égal à :
a $\frac{3}{5}$ b $\frac{2}{7}$ c 0 d nécessite des calculs

26 Matrice de transition (2)

Construire la matrice de transition associée au graphe suivant.



27 Matrice de transition (3)

Méthode Comment faire pour construire le graphe associé à la matrice de transition suivante ?

$$M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

28 Évolution des distributions

On considère une chaîne de Markov (X_n) de distribution initiale $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ et de matrice de transition

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,9 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) $\pi_1 = (0,1 \quad 0 \quad 0,9)$	☐	☐
b) $\pi_2 = (0,3 \quad 0,3 \quad 0,4)$	☐	☐
c) La distribution $(0 \quad 1 \quad 0)$ est invariante.	☐	☐

29 Distribution invariante

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} \frac{13}{30} & \frac{11}{30} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

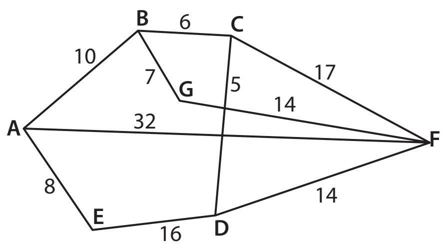
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) La distribution $(1 \quad 0 \quad 0)$ est invariante.	☐	☐
b) La chaîne de Markov admet une unique distribution invariante.	☐	☐
c) La distribution $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ est invariante.	☐	☐

Exercices d'application

Déterminer un plus court chemin

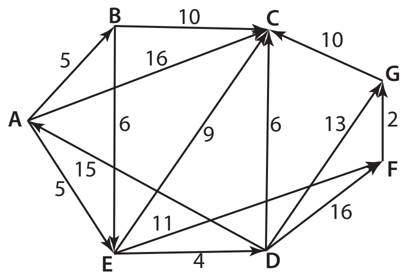
Méthode 1 p. 205

30 On considère le graphe pondéré suivant.



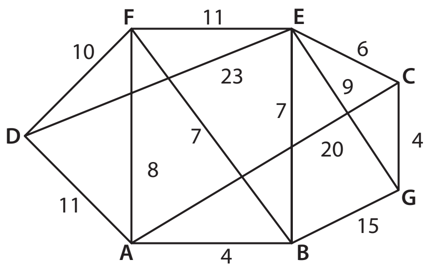
Déterminer la chaîne de poids minimal reliant A à F avec un algorithme à préciser.

31 On considère le graphe pondéré suivant.



Déterminer le chemin de poids minimal reliant A à F avec un algorithme à préciser.

32 Déterminer la chaîne de poids minimal reliant G à D.



Justifier le caractère markovien

Méthode 2 p. 207

33 On considère une chaîne de Markov (X_n) à deux états A et B. On a :

$P(X_0 = A) = \frac{1}{2}$,

$P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = A) = \frac{1}{5}$

et $P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A) = \frac{2}{3}$ pour tout entier n.

1. Déterminer $P(X_0 = B)$, $P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = B)$ et $P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B)$.

2. En déduire $P(X_1 = A)$ et $P(X_1 = B)$.

3. Calculer $P(X_2 = A)$ et $P(X_2 = B)$.

34 Déterminer dans chaque cas si la suite (X_n) est une chaîne de Markov.

On dispose de deux urnes A et B, A contenant au départ dix boules numérotées de 1 à 10.

X_n désigne le nombre de boules dans A après l'étape n.

a) À chaque étape, on tire un numéro au hasard entre 1 et 10 et on change d'urne la boule choisie.

b) À chaque étape, on tire un numéro au hasard entre 1 et 10 et on change d'urne la boule choisie si son numéro est plus grand que la précédente boule tirée.

c) À chaque étape, on tire un numéro au hasard et on change d'urne la boule si son numéro est le plus grand parmi toutes les boules de l'urne A.

d) À chaque étape, on tire un numéro au hasard et change d'urne la boule si son numéro est pair

35 On considère une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. À chaque étape on tire un numéro au hasard entre 1 et 10 et on suit une certaine règle pour enlever ou remettre la boule dans l'urne.

on note X_n le nombre de boule dans l'urne après l'étape n.

Donner un exemple de règle faisant de (X_n) une chaîne de Markov et un exemple de règle ne faisant pas de (X_n) une chaîne de Markov.

Déterminer une matrice de transition

Méthode 3 p. 209

36 Compléter les matrices suivantes afin qu'elles soient des matrices stochastiques.

a) $M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & ... \\ ... & 0{,}6 \end{pmatrix}$ **b)** $M_2 = \begin{pmatrix} ... & 1 \\ ... & 0 \end{pmatrix}$

c) $M_3 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & ... & 0{,}7 \\ ... & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & ... \end{pmatrix}$ **d)** $M_4 = \begin{pmatrix} ... & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & ... & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & ... \end{pmatrix}$

37 Vérifier que les matrices suivantes sont des matrices stochastiques.

$Q_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ $Q_2 = \begin{pmatrix} 1-a^2 & a^2 \\ a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$;

$Q_3 = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{5} & \frac{18}{35} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ $Q_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

38 On considère une chaîne de Markov (X_n) à deux états A et B. On donne les probabilités $P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = B) = 0{,}15$ et $P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A) = 0{,}33$ pour tout entier n. Déterminer la matrice de transition de (X_n), dans l'ordre A, B.

39 On considère une chaîne de Markov (X_n) à trois états A, B et C, dont la matrice de transition est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale est $\pi_0 = (0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5)$ toutes deux dans l'ordre A, B, C.
Déterminer les probabilités suivantes.

a) $P_{X_0=A}(X_1 = B)$ **b)** $P_{X_1=B}(X_2 = C)$

c) $P\big((X_0 = A) \cap (X_1 = B)\big)$ **d)** $P\big((X_0 = B) \cap (X_1 = B)\big)$

40 On considère une chaîne de Markov (X_n) à trois états A, B et C. On donne les probabilités suivantes :
$P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = B) = 0{,}1$, $P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = C) = 0{,}7$,
$P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A) = 0{,}3$, $P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = B) = 0{,}3$
et $P_{(X_n=C)}(X_{n+1} = C) = 1$ pour tout entier n.
Déterminer la matrice de transition de (X_n), dans l'ordre A, B, C.

41 La météo varie entre beau et mauvais temps. Après un jour de beau temps, il y a une chance sur deux que le temps change le jour suivant et le mauvais temps a trois fois plus de chance de durer d'un jour au jour suivant.

Pourquoi peut-on dire que la situation peut être modélisée par une chaîne de Markov ? Donner sa matrice de transition.

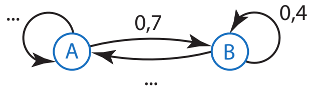
42 Dans le cadre d'une épidémie, on distingue trois types d'individus : les individus sains, malades et immunisés.
Sachant que chaque semaine :
• un individu malade a deux chances sur trois d'être guéri et ainsi être immunisé à la maladie ;
• un individu sain à une chance sur deux de tomber malade et une chance sur trois de développer une immunité à la maladie ;
• un individu immunisé ne peut pas tomber malade mais a une chance sur quatre de perdre son immunité (et donc de devenir un individu sain).
On considère (X_n) la chaîne de Markov correspondant à la proportion d'individu des trois types la n-ième semaine.
La semaine 0, il y avait 1 000 individus sains, 3 000 individus malades et 500 individus immunisés.
Donner la matrice de transition M ainsi que la distribution initiale π_0 associée à (X_n).

Manipuler un graphe probabiliste

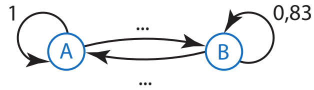
Méthode 4 p. 211

43 Compléter les graphes suivants pour obtenir des graphes probabilistes.

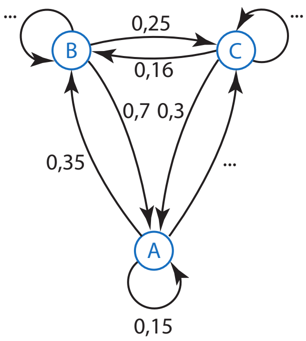
a)



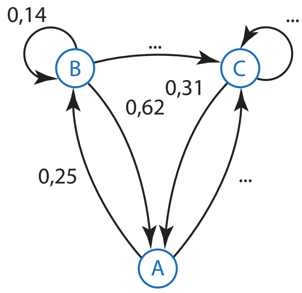
b)



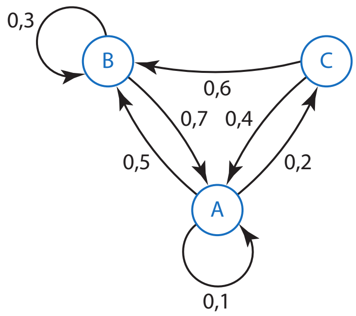
c)



d)



44 On considère une chaîne de Markov (X_n) admettant le graphe probabiliste suivant.



1. On a $P(X_0 = A) = 0{,}2$ et $P(X_0 = B) = 0{,}5$.
Déterminer les probabilités suivantes.

a) $P(X_1 = A)$ **b)** $P(X_1 = B)$

c) $P(X_1 = C)$ **d)** $P(X_2 = B)$

2. Déterminer la matrice de transition M associée à cette chaîne de Markov.

45 Sur une population donnée abonnée à un des deux opérateur Internet (A ou B), on considère que chaque année 30 % des abonnés de A le quittent pour aller en B et que 20 % des abonnés de B le quittent pour aller en A.
Tracer le graphe probabiliste associé à cette situation.

46 On considère une chaîne de Markov (X_n) a quatre états admettant la matrice de transition suivante (dans l'ordre A, B, C, D) : $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.
Tracer un graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov.

Exercices d'application

Calculer des probabilités

Méthode 5 p. 213

47 On considère une chaîne de Markov à trois états et dont la matrice de transition (dans l'ordre A, B, C) est :

$Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$ et la distribution initiale est :

$\pi_0 = (0,5 \quad 0,5 \quad 0)$.

1. Donner les valeurs de $P(X_0 = \text{A})$, $P(X_0 = \text{B})$ et $P(X_0 = \text{C})$.

2. a) Calculer π_1 et π_2.

b) En déduire $P(X_1 = \text{A})$ et $P(X_2 = \text{C})$.

3. Exprimer π_n en fonction de π_0 et Q.

4. En déduire π_{10} et π_{20}. Comment évolue la distribution ?

48 On considère une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition dans l'ordre A, B est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$ et telle que $\pi_1 = (0,5 \quad 0,5)$.

1. a) Calculer π_2 et π_3.

b) En déduire $P(X_2 = \text{B})$ et $P(X_3 = \text{A})$.

2. Exprimer π_n en fonction de π_1 et M.

3. En déduire π_{10} et π_{20}.

Comment évolue la distribution ?

4. Montrer que $\pi_0 = \pi_1 M^{-1}$. En déduire la valeur de π_0.

49 Dans un lycée les enseignants participent à un mouvement de grève. Le premier jour, 20 % des enseignants faisaient grève. On note X_n la variable aléatoire qui indique si une personne désignée au hasard parmi les enseignants fait grève ou non au jour n. On admet que la suite (X_n) est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,33 & 0,67 \end{pmatrix}$ dans l'ordre grèviste, non grèviste.

On note π_n la distribution de cette chaîne.

1. Donner π_0 puis calculer π_1, π_2 et π_3.

2. En déduire la probabilité qu'au troisième jour l'enseignant désigné fait grève.

Déterminer une distribution invariante

Méthode 6 p. 215

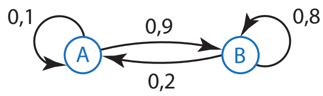
50 M est la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Déterminer la distribution invariante.

a) $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

51 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \\ 0,28 & 0,4 & 0,32 \end{pmatrix}$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

$\pi = (0,2 \quad 0,3 \quad 0,5)$ est-elle une distribution invariante pour cette chaîne ? Justifier. Même question pour $\pi = (0,1 \quad 0,5 \quad 0,4)$.

52 On considère une chaîne de Markov (X_n) admettant le graphe ci-dessous et de distribution initiale $\pi_0 = (1 \quad 0)$.



1. Déterminer la matrice de transition M associée à (X_n).

2. Calculer π_5 et π_{10}. Que peut-on conjecturer ?

3. Montrer que (X_n) admet une distribution invariante π_I et déterminer sa valeur.

53 Soit une chaîne de Markov admettant $Q = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ pour matrice de transition.

1. Montrer que $\pi = (0,2 \quad 0,8)$ est une distribution invariante pour cette chaîne.

2. Montrer que π en est l'unique distribution invariante.

54 $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov. Cette chaîne admet-elle une distribution invariante ?

55 Lors de ses repas, Kellia boit soit de l'eau plate (P), soit de l'eau gazeuse (G). Si elle a bu de l'eau plate, alors elle en boira au repas suivant avec probabilité de 0,65 ; si elle a bu de l'eau gazeuse, elle en boira au prochain repas avec probabilité de 0,3. On considère (X_n) la chaîne de Markov d'espaces d'états.

1. Justifier que la matrice de transtion de cette chaîne de Markov est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2. On suppose que hier midi, Kellia a bu de l'eau plate. On note π_m la distribution de cette chaîne en m étapes ; $m = 0$ correspond à hier midi.

Donner la distribution initiale π_0. Calculer π_1 et π_2.

3. a) Déterminer la distribution invariante de la chaîne de Markov.

b) Peut-on dire que sur le long terme, Kellia boira tout autant d'eau plate que d'eau gazeuse?

56 On considère, pour $p \in]0\,;1]$, la matrice de transition d'une chaîne de Markov suivante $Q = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$;

on note π_m la distribution de cette chaîne en m étapes.

1. Vérifier que Q est stochastique.

2. Donner le graphe de cette matrice.

3. Dans cette question, on considère $p = 0,9$.

a) Si $\pi_0 = (1 \quad 0)$, calculer $\pi_1, \pi_2, \ldots$ et π_{10}.

b) Comment semble évoluer la distribution ?

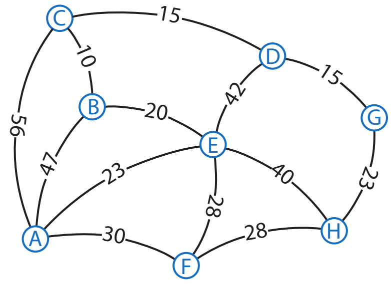
4. Reprendre la question précédente avec $p = 0,6$.

5. Déterminer, dans les cas où $p = 0,9$ et $p = 0,6$, la distribution invariante de la chaîne de Markov. Les comparer aux valeurs trouvées pour les distributions des questions précédentes.

6. Déterminer, pour $p \in]0\,;1]$, la distribution invariante de la chaîne de Markov.

Algorithme de Dijkstra-Moore

57 Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.
Le poids de chaque arête représente la distance, en km, entre les deux lieux reliés par l'arête.

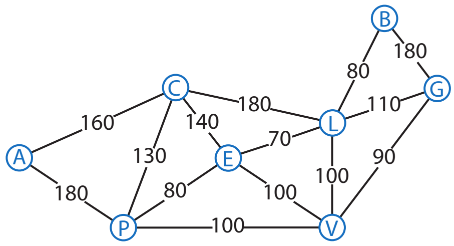


Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. Préciser la distance, en km, de ce chemin.

D'après Bac ES Pondichery 2018

58 Dans le graphe ci-dessous, on fait figurer les distances, exprimées en km, entre certaines grandes villes de la région Auvergne-Rhône-Alpes.

A : Aurillac
B : Bourg-En-Bresse
C : Clermont-Ferrand
E : Saint Etienne
G : Grenoble
L : Lyon
P : Le Puy-en-Velay
V : Valence



Ayant terminé sa semaine de travail à Bourg-En-Bresse, un technicien souhaite retourner chez lui à Aurillac en faisant le moins de kilomètres possibles.

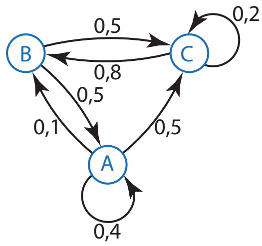
1. Déterminer le plus court chemin entre les villes de Bourg-En-Bresse et Aurillac en empruntant le réseau routier.

2. La route entre Le Puy-en-Vélay et Aurillac est fermée à la circulation. Quel chemin doit-il alors emprunter ?

Modéliser par une chaîne de Markov

Méthode 7 p. 216

59 Une grenouille saute d'un sommet d'un triangle équilatéral à un autre sommet de ce triangle. La marche aléatoire est donnée par le graphe ci-dessous.



Soit (P_n) la position de la grenouille après n sauts.

1. Justifier que (P_n) est une chaîne de Markov et préciser sa matrice de transition M

2. La grenouille part du sommet B. Quelle est la probabilité qu'elle y revienne au bout de quatre sauts ? Au bout de six sauts ?

60 Dans chaque situation, dire si l'on peut construire une chaîne de Markov. Si c'est le cas, donner l'ensemble des états, les probabilités conditionnelles et préciser s'il s'agit d'une chaîne homogène ou non.

a) Détentrice d'une carte de bibliothèque, Léa se rend dans le rayon science-fiction et alterne jour après jour bande dessinée et roman. En début de semaine, elle préfère lire un roman et choisit cette catégorie avec une probabilité de 0,8 si elle a lu un roman le jour précédent. En fin de semaine, si elle a lu une bande dessinée un jour donné, elle en reprend une le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

b) Un étudiant qui passe le BAC le lendemain hésite toutes les heures entre un chocolat chaud ou un café. S'il prend un chocolat une heure donnée, l'heure suivante, un peu endormi, il y a sept chances sur dix qu'il prenne un café. Plus la fin de journée approche, plus le besoin de café se fait sentir et les chances qu'il en prenne augmentent d'heure en heure : passé 18 h, il y a fois neuf chances sur dix de prendre un café s'il a pris un chocolat l'heure d'avant.

c) Toutes les nuits, un renard se nourrit soit d'une poule, soit d'une oie. Il aime varier et ne peut enchaîner quatre fois de suite le même type de repas.

61 Lors d'un conseil de classe, un professeur principal peu attentif à l'avis de ses collègues met les mentions à ses élèves de la manière suivante : lorsqu'il met une mention, la fois d'après, il garde la même mention avec une probabilité de 0,2 ; s'il met la mention « compliments », il mettra à l'élève suivant la mention « encouragements » avec une probabilité de 0,5 ; s'il met la mention « félicitations », il mettra ensuite la mention « encouragements » avec une probabilité de 0,6 et s'il met la mention « encouragement », il mettra la mention « compliments » avec une probabilité de 0,2.

1. Justifier que la situation peut être modélisée avec une chaîne de Markov dont on précisera l'ensemble des états.

2. Donner la matrice de transition de cette chaîne de Markov ainsi que son graphe.

Exercices d'entraînement

62 Toutes les semaines, un lycée organise un concours de mathématiques. L'une des meilleures élèves, Évane, est toutes les semaines sur le podium. Si elle est à la première place une semaine donnée, elle est à la deuxième la semaine suivante avec une probabilité de 0,4 et à la troisième avec une probabilité de 0,1. Si elle est à la deuxième, elle le reste la semaine suivante avec une probabilité de 0,5 et elle passe à la troisième avec une probabilité de 0,1. Finalement, si elle est une semaine donnée à la troisième place, elle remonte à la deuxième avec une probabilité de 0,3 et à la première avec une probabilité de 0,6.

1. Justifier que la situation peut être modélisée avec une chaîne de Markov dont on précisera l'ensemble des états.

2. Donner la matrice de transition de cette chaîne de Markov ainsi que son graphe.

63 Le panoramique des Dômes permet de monter au sommet du Puy de Dôme en 15 minutes.

En raison de glissements de terrain ou de déraillement, il n'est pas toujours en service. À partir du jour $n = 0$, on regarde jour après jour si le panoramique est en état de marche : si au jour n il est en panne, alors il le restera le jour suivant avec une probabilité de 0,3 ; si en revanche il fonctionne au jour n, alors il continuera à fonctionner au jour suivant avec une probabilité de 0,9.

Montrer que le problème peut se modéliser par une chaîne de Markov. On en donnera sa matrice de transition ainsi que son graphe.

64 Dans *La lettre volée,* Dupin explique le jeu de pair ou impair : « Ce jeu est simple, on y joue avec des billes. L'un des joueurs tient dans sa main un certain nombre de ses billes, et demande à l'autre : "pair ou non?" Si celui-ci devine juste, il gagne une bille ; s'il se trompe, il en perd une. »
E. A. Poe, *La lettre volée.*

Un joueur qui doit deviner la parité du nombre de billes est confronté à deux situations.

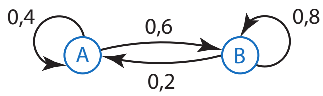
a) « Supposons que son adversaire soit un parfait nigaud. » Dans ce cas, cet adversaire change la parité de ses billes d'une fois sur l'autre avec probabilité de 0,9.

b) « Maintenant avec un adversaire un peu moins simple. » Cette fois, il change la parité d'une fois sur l'autre avec probabilité de 0,1.

1. Justifier le caractère markovien de chacune de ces deux situations. Expliciter la chaîne de Markov et préciser l'ensemble des états.

2. Donner les matrices de transition dans chacune des situations. En déduire les deux graphes associés.

65 Une particule se trouve soit dans un état A soit dans un état B. À chaque microseconde elle peut soit rester dans le même état soit en changer avec des probabilités données par le graphe ci-dessous. **Algo**



L'état de la particule au bout de n microsecondes est consigné dans une suite (X_n). Au départ la particule est dans l'état B.

1. Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition M ainsi que sa distribution initiale π_0.

2. Quelle est la probabilité que la particule se retrouve dans l'état A au bout de 1 microseconde ? Au bout de 2 microsecondes ?

3. Soit les suites (a_n) et (b_n) représentant respectivement la probabilité que la particule se retrouve dans l'état A et dans l'état B au bout de n microsecondes.

a) Exprimer π_{n+1} en fonction de M et π_n.

b) En déduire l'expression de a_{n+1}, puis de b_{n+1}, en fonction de a_n et b_n.

4. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
Lire n
a←0
b←1
Pour k allant de 1 à n :
  a←0,4 a+0,2b
  b←1-a
Fin Pour
Afficher a et b
```

a) À quoi correspondent les valeurs affichées en fin d'algorithme ?

b) En utilisant cet algorithme, déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

«Au bout de 6 microsecondes, la particule a moins d'une chance sur 4 d'être à l'état A ».

66 Dans une ville il peut venter, neiger ou grêler. Le vent et la grêle ne restent jamais deux jours de suite. S'il vente un jour donné, le lendemain il neige ou il grêle de manière équiprobable. S'il neige, il y a une chance sur trois qu'il vente le jour d'après et une chance sur deux qu'il continue à neiger le lendemain. Après un jour de grêle, il y a deux fois plus de chance d'avoir de la neige que du vent.

1. Justifier que l'on peut modéliser la météo dans cette ville par une chaîne de Markov.

2. Donner la matrice de transition et le graphe de cette chaîne de Markov.

3. Quel est le temps le plus probable après un jour de grêle ?

4. Quelle est la probabilité qu'après deux jours de neige le vent tombe ?

67 Une personne achète un samedi deux disques ; l'un de Mozart, l'autre de Mendelssohn. Tous les soirs, elle alterne les écoutes de la manière suivante : si elle avait mis le disque de Mozart, elle le réécoute le soir suivant avec une probabilité de 0,6 ; si c'était le disque de Mendelssohn, le disque a deux chances sur cinq d'être réécouté le soir suivant.

Quel disque sera probablement écouté le vendredi suivant l'achat selon celui écouté le samedi de l'achat ?

Étudier le comportement d'une chaîne de Markov

Méthode 8 p. 217

68 Pour son orientation future, Flavie hésite entre mathématiques et philosophie. Elle change d'avis tous les jours avec une probabilité de 0,2. Le 1er mai, elle a décidé de faire des mathématiques. Elle doit s'inscrire le premier juillet. Quelle est la probabilité qu'elle s'inscrive sur son choix du 1er mai ?

69 Deux amies, Noémie et Mayna, travaillent ensemble leurs mathématiques tous les jours. Si un jour donné, Noémie aide Mayna, alors cette dernière aura progressé et aura une chance sur trois d'aider à son tour son amie le jour suivant. Si Mayna aide Noémie, alors le jour suivant elle n'aura plus qu'une chance sur cinq de l'aider le jour d'après. Noémie aide Mayna le lundi. Quelle est la probabilité que, le vendredi, ce soit Mayna qui aide Noémie ?

70 Une société de nettoyage s'occupe tous les jours du nettoyage de trois grandes salles qui sont utilisées de manière aléatoire : chaque soir, une salle a une probabilité $p = 0{,}25$ d'avoir été utilisée et d'avoir besoin d'être nettoyée. La société ne peut nettoyer qu'une seule salle par nuit. Montrer que l'on peut ainsi définir une chaîne de Markov dont on donnera la matrice de transition, le graphe ainsi que les éventuelles distributions invariantes.

71 Sur l'île de Ré, Alceste, un loueur de bicyclettes à la journée propose des vélos classiques ainsi que des vélos électriques. Alceste a remarqué que lorsqu'un client avait loué un vélo classique, le jour suivant la probabilité qu'il ne change pas était de 0,8 et que lorsqu'un client louait un vélo électrique, il décide de changer le jour suivant avec probabilité 0,6.
On s'intéresse à un certain nombre constant de clients qui louent un vélo tous les jours lors de leurs vacances. Le premier jour, seuls 5 % de ses clients choisissent un vélo électrique.
1. Montrer que la situation peut se modéliser par une chaîne de Markov dont on donnera le graphe et la matrice de transition.
2. Déterminer les éventuelles distributions invariantes de la chaîne de Markov et interpréter le résultat dans le contexte.

72 Un professeur demande à des élèves d'écrire une suite aléatoire de 0 et de 1.
1. Un premier élève, qui comprend le sens du mot aléatoire, sort une pièce et effectue une suite de tirages en écrivant 0 lorsqu'il tombe sur face et 1 s'il tombe sur pile. Il écrit cent chiffres. Quel est l'effectif le plus probable pour le nombre 0 ?
2. Un deuxième élève, qui croit comprendre le sens du mot aléatoire se dit qu'il est mieux de changer assez souvent le chiffre d'une fois sur l'autre. Ainsi il choisit de le changer avec une probabilité de 0,8.
Comment le professeur pourra-t-il reconnaître a quel élève appartient chacune des suites de cent chiffres ?

73 Un garagiste contrôle tous les mois l'état d'une pièce de moteur. Elle peut se trouver dans les états suivants : fonctionnelle (F), usée (U) ou défaillante (D).
On considère que la situation peut se modéliser avec une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée

par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans l'ordre F, U, D.

1. D'un mois au mois suivant, quelles sont les différentes probabilités de changement d'états?
2. Dresser le graphe correspondant à cette chaîne.
3. On suppose qu'au début des contrôles, la pièce vient d'être changée pour une pièce neuve. Quelle est la probabilité pour qu'au bout de 4 mois, la pièce soit défaillante?

74 Dans une certaine ville, trois quotidiens sont proposés en abonnement. Chaque année 15 % des abonnés au journal A et 20 % des abonnés au journal C changent pour le journal B. 5 % des abonnés au journal A et 15 % des abonnés au journal B changent pour le journal C. 20 % des abonnés au journal B et 30 % des abonnés au journal C changent pour le journal A. Le nombre total d'abonnements reste constant. Au premier janvier 2018, les trois quotidiens avaient le même nombre d'abonnements.
On prend un abonné au hasard, soit X_n le quotidien auquel il est abonné l'année $2018 + n$.
1. a) Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov pour $n \in \mathbb{N}$ et tracer le graphe probabiliste associé.
b) Donner la matrice de transition M ainsi que la distribution initiale π_0 associées à cette chaîne.
2. Calculer π_1 et π_2. Quelle est la probabilité que l'individu soit abonné à A en 2020 ?
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer π_n en fonction de π_0 et M. En déduire π_{10} et π_{20}. La suite (π_n) semble-t-elle convergente ?
4. Justifier que (X_n) admet une unique distribution invariante π_I et la déterminer.
5. On admet que (π_n) converge, détermine la limite de cette suite et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Travailler l'oral

75 Faire des recherches et un exposé oral sur le problème du voyageur de commerce.

76 Faire des recherches et un exposé oral sur la marche aléatoire discrète à une et deux dimensions.

Exercices bilan

77 Savoir perdre

Un simulateur est programmé pour proposer des situations de jeu difficiles.
Il offre, lors de la première utilisation, 15 % de chance de réussite. Puis, à chaque jeu suivant :
• si la personne a gagné, elle a une chance sur quatre de gagner le jeu suivant ;
• si la personne a perdu, elle a deux chances sur cinq de gagner le jeu suivant.
On note X_n la variable aléatoire correspondant à la réussite du joueur au n-ième jeu. On considère les suites (a_n) et (b_n) désignant respectivement la probabilité de gagner au n-ième jeu et celle de perdre.

1. Justifier que la suite de variables aléatoires (X_n) est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états.
2. On note $\pi_n = (a_n \quad b_n)$.
a) Préciser π_0.
b) Établir une relation de récurrence entre les suites (a_n) et (b_n).
c) En déduire la matrice Q telle que $\pi_{n+1} = \pi_n Q$, pour tout entier naturel n.
3. a) Exprimer π_n en fonction de Q, n et π_0.
b) En déduire la probabilité qu'un joueur gagne le cinquième jeu.
4. a) Déterminer, si elle existe, la distribution invariante de cette chaîne de Markov.
b) Comment programmer les chances de réussite initiales afin qu'un joueur ait les mêmes chances quel que soit le nombre de parties qu'il fait dans ce simulateur ?
c) Comment évoluent les chances de gagner si l'on pratique un grand nombre de fois le simulateur ?

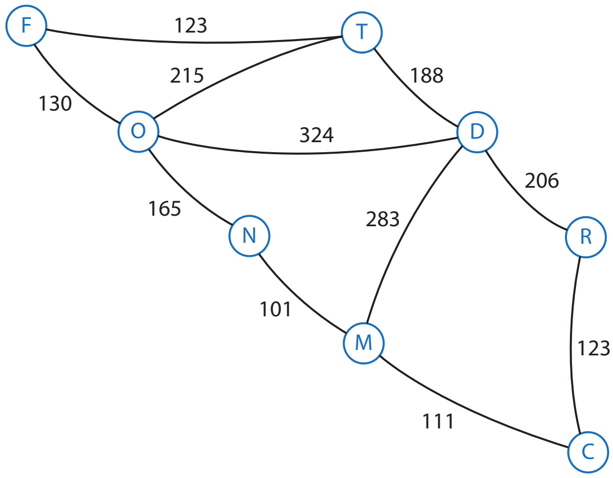
78 Demande en mariage

Un couple se rend au stade Marcel Michelin pour assister à un match de rugby. Avant d'entrer, la personne A demande en mariage la personne B mais ils sont séparés dans la foule par m individus $(I_1 ; I_2 ; \dots ; I_m)$ avant que B ne donne sa réponse. B transmet alors sa réponse à l'individu I_1 sous la forme d'un « oui » ou « non » qui la transmet à I_2 et ainsi de suite jusqu'à ce que I_m délivre la réponse à A. Malheureusement, ces m individus manquent d'honnêteté : I_{n+1} délivre le contraire de ce qu'a dit I_n avec probabilité de $\dfrac{2}{5}$.

1. Justifier que l'on peut modéliser la situation avec une chaîne de Markov pour laquelle on donnera le graphe et sa matrice de transition dans l'ordre « oui », « non ».
2. On note π_n la distribution de cette chaîne de Markov.
a) Préciser en fonction de la réponse de B la valeur de la distribution initiale π_0.
b) Si $m = 3$, quelle est la probabilité que A obtienne la réponse de B ?
c) Même question si $m = 9$.
4. a) Déterminer l'état stable de cette distribution.
b) En déduire les probabilités que A obtienne la réponse de B si m devient très grand.

79 Le bon fromage

Un auvergnat exilé réside dans la ville de Fontainebleau. Quatre fois par mois, il décide de rentrer chez lui à Clermont-Ferrand. Il est établi que le trajet avec sa voiture coûte, en carburant, 0,10 euro au kilomètre.
Impatient de rentrer chez lui et désireux de dépenser le moins d'argent possible, il consulte une carte routière pour optimiser ses trajets.
Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes : Fontainebleau, Troyes, Orléans, Dijon, Nevers, Montluçon, Roanne, Clermont-Ferrand. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

A ▶ Étude du trajet

1. Déterminer le plus court trajet entre Fontainebleau et Clermont-Ferrand. On indiquera les villes parcourues et l'ordre du parcours.
2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois, à l'euro près.
3. Reprendre les questions précédentes en prenant en compte que lors d'un aller retour sur les quatre, il doit passer obligatoirement par Dijon.

B ▶ Étude d'une chaîne de Markov

À chaque retour de Clermont-Ferrand, l'auvergnat ramène un fromage : soit du saint-nectaire (S), soit du cantal (C), soit de la fourme d'Ambert (F). Il choisit de la manière suivante.
• S'il a choisi S lors d'un précédent retour, il a deux chances sur cinq pour changer au retour suivant pour l'un des deux autres de manière équiprobable.
• S'il a choisi C ou F, il change pour un autre de manière équiprobable.
1. Montrer que la situation peut être modélisée par une chaîne de Markov à trois états que l'on précisera.
2. Déterminer la matrice de transition ainsi que le graphe de cette chaîne de Markov.
3. Lors du premier retour, il a ramené un saint nectaire. Quelle est la probabilité qu'au quatrième retour, il ramène un autre fromage ?

Préparer le BAC L'essentiel

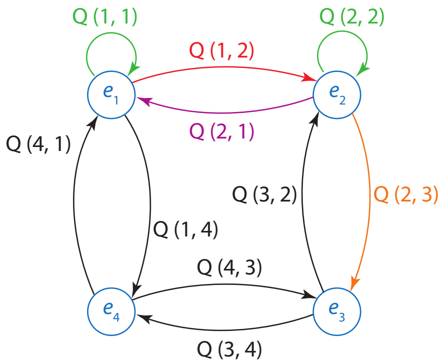
On s'intéresse à un système pouvant prendre plusieurs états $e_1, e_2, \ldots, e_N$ selon l'instant donné. On note X_n l'état du système à l'instant n.

Chaîne de Markov

La suite (X_n) est une chaîne de Markov si la probabilité de l'état du système à l'instant futur ne dépend que de son état à l'instant présent.

Ensemble des probabilités de changements d'état

Graphe probabiliste



Matrice Q

$$\begin{pmatrix} Q(1,1) & Q(1,2) & Q(1,3) & Q(1,4) \\ Q(2,1) & Q(2,2) & Q(2,3) & Q(2,4) \\ Q(3,1) & Q(3,2) & 0 & Q(3,4) \\ Q(4,1) & Q(4,2) & Q(4,3) & 0 \end{pmatrix}$$

Q (1, 1) : probabilité de rester à l'état e_1.

Q (1, 2) : probabilité de passer de l'état e_1 à l'état e_2.

Q (2, 1) : probabilité de passer de l'état e_2 à l'état e_1.

Q (2, 3) : probabilité de passer de l'état e_2 à l'état e_3.

Q (e_i, e_j) : probabilité de passer de l'état e_i à l'état e_j.

Évolution du système

La suite des distributions (π_n) donne les probabilités pour le système de se trouver dans chacun des états étudiés.

- $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = e_1) & P(X_n = e_2) & \ldots & P(X_n = e_N) \end{pmatrix}$
- $\pi_{k+1} = \pi_k Q$, pour $k \in \mathbb{N}$
- $\pi_m = \pi_0 Q^m$

Probabilités initiales de l'état du système à l'instant 0.

Les coefficients de Q^m correspondent aux probabilités de passer d'un état à un autre en m étapes

Distribution invariante

- Stabilisation des probabilités : suite de distributions convergente vers $\pi = \pi Q$.
- Aucun 0 sur les coefficients non diagonaux de Q la matrice $\longrightarrow$ existence d'une distribution invariante.
- **Si la chaîne a deux états et admet une unique distribution invariante π, alors, la suite des distributions (π_n) converge vers π.**

Préparer le BAC Je me teste

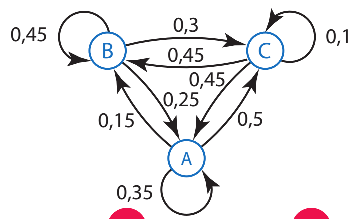
Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Appliquer l'algorithme de Dijskstra-Moore	Méthode 1	1, 2, 30, 32, 57
▶ Justifier le caractère markovien	Méthode 2	3, 4, 33, 34
▶ Déterminer une matrice de transition	Méthode 3	7, 8, 36, 42
▶ Manipuler un graphe probabiliste	Méthode 4	10, 11, 43, 44
▶ Déterminer une probabilité	Méthode 5	13, 14, 47, 48
▶ Déterminer une distribution invariante	Méthode 6	17, 18, 50, 51
▶ Étudier une chaîne de Markov	Méthode 7 Méthode 8	19, 20, 59, 60, 21, 22, 68, 69

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-e07-06

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonnes réponse(s).

Pour les exercices 80 à 83 on considère le graphe probabiliste ci-contre.
On considère une chaîne de Markov (X_n) associé à ce graphe.
On suppose que $P(X_0 = A) = 0,3$ et $P(X_0 = B) = 0,4$.



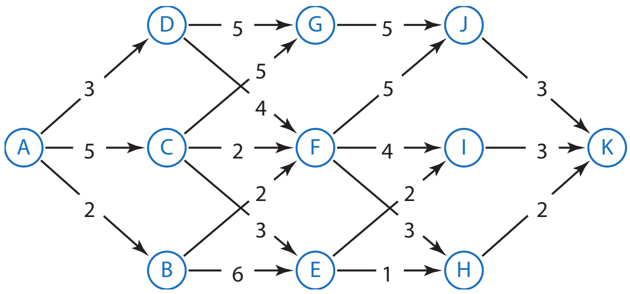
	A	B	C	D
80 L'arc reliant $\overrightarrow{AB}$ a pour poids :	0,15	0,25	0,35	0,45
81 $P\big((X_0 = A) \cap (X_1 = B)\big)$ est égale à :	0,12	0,045	0,15	0,45
82 La matrice de transition associé à cette chaîne (dans l'ordre alphabétique) est :	$\begin{pmatrix} 0,35 & 0,15 & 0,5 \\ 0,25 & 0,45 & 0,3 \\ 0,45 & 0,45 & 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,35 & 0,25 & 0,45 \\ 0,15 & 0,45 & 0,45 \\ 0,5 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,15 & 0,25 \\ 0,3 & 0,45 \\ 0,45 & 0,5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,35 & 0,65 \\ 0,45 & 0,45 \end{pmatrix}$
83 La distribution initiale π_0 associée à cette matrice est égale à :	$(0,3 \quad 0,3 \quad 0,4)$	$(0,3 \quad 0,4 \quad 0,3)$	$(0,4 \quad 0,3 \quad 0,3)$	$(0,3 \quad 0,4)$

Pour les exercices 84 et 85 on considère une chaîne de Markov (X_n) à deux états (A et B) dont la matrice de transition est (dans l'ordre alphabétique) $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $\pi_0 = (1 \quad 0)$.

	A	B	C	D
84 $P(X_1 = A)$ est égale à	0,3	0,7	0,6	0,4
85 Une distribution invariante pour cette chaîne est :	$\pi_I = \begin{pmatrix} \frac{6}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}$	$\pi_I = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$	$\pi_I = (6 \quad 7)$	$\pi_I = (7 \quad 6)$

86 Optimiser un réseau d'irrigation

Le graphe orienté ci-dessous représente un réseau d'irrigation.



Le sommet A correspond au départ d'eau, le sommet K au bassin d'infiltration et les autres sommets représentent les stations de régulation.
Les arcs représentent les canaux d'irrigation ainsi que le sens du ruissellement.
La pondération donne, en km, les distances entre les différentes stations du réseau.
Déterminer un chemin de longueur minimale entre le départ d'eau A et le bassin d'infiltration en K et donner sa longueur.

D'après Bac ES Asie 2016

Méthode 1 p. 205

87 Évolution d'un marché

Dans un pays, deux opérateurs se partagent le marché de télécommunications mobiles. Une étude révèle que chaque année :

• parmi les clients de l'opérateur EfficaceRéseau, 70 % se réabonnent à ce même opérateur, les autres souscrivent un contrat avec l'opérateur GénialPhone ;
• parmi les clients de l'opérateur GénialPhone, 45 % souscrivent un contrat avec l'opérateur EfficaceRéseau, les autres se réabonne à GénialPhone.

Au 1er janvier 2020, on suppose que 10 % des clients possèdent un contrat chez EfficaceRéseau.
À partir de 2020, on choisit au hasard un client de l'un des deux opérateurs.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit (X_n) la suite représentant l'opérateur E ou G auquel le client est abonné à l'année $2020 + n$.

1. a) Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov dont on tracera le graphe associé.
b) Justifier que la distribution initiale (dans l'ordre E, G) est $\pi_0 = (0{,}1 \quad 0{,}9)$.
c) Donner la matrice de transition M associée à (X_n).
2. Vérifier qu'au 1er janvier 2022 environ 57 % des clients ont un contrat avec EfficaceRéseau.
Soit $\pi_n = (e_n \quad g_n)$ la distribution associée à X_n.
3. a) Quelle est la relation entre e_n et g_n ?
b) Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n et g_n.
c) En déduire que $e_{n+1} = 0{,}25\, e_n + 0{,}45$.

D'après Bac ES Liban 2018

Méthode 2 p. 207 Méthode 3 p. 209 Méthode 5 p. 213

88 Changement d'états d'une particule

Sciences

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable (S) et l'état excité (E). À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

A ▶ Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005 et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable. Soit, pour tout entier n, X_n l'état de l'atome après n nanosecondes.

1. a) Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov dont on tracera le graphe associé.
b) Justifier que la distribution initiale (dans l'ordre S, E) est $\pi_0 = (1 \quad 0)$.
c) Donner la matrice de transition A associée à (X_n).
2. Exprimer π_n en fonction de π_0 et A.
On souhaite déterminer la valeur de π_n.

On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.

3. a) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Déterminer la matrice D telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire que :

$$A^n = \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 120 + 0{,}395^n & 1 - 0{,}395^n \\ 120(1 - 0{,}395^n) & 1 + 120 \times 0{,}395^n \end{pmatrix}.$$

Puis en déduire la valeur de π_n.
6. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi_n$. Que peut-on en conclure concernant l'atome ?

B ▶ Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2) dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.
On reprend la chaîne de Markov (X_n) décrivant les états de l'atome.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition associée à (X_n) (dans l'ordre S, E).
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %. On admet que (X_n) admet une unique distribution invariante (ou stationnaire) $\pi_i = (0{,}98 \quad 0{,}02)$. Déterminer la valeur de a.

D'après Bac S Polynésie 2018

Méthode 8 p. 217

Exercices vers le supérieur

89 Tirages consécutif de pile ou face

TICE

On lance 40 fois une pièce bien équilibrée. On se demande quelle est la probabilité d'obtenir au moins 5 lancers consécutifs identiques.
On notera cette probabilité recherchée p.

A ▶ Estimation et simulation

1. a) À votre avis, a-t-on plutôt $p < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leqslant p < \frac{2}{3}$ ou $p \geqslant \frac{2}{3}$?

b) À l'aide de votre calculatrice, d'un logiciel de programmation ou d'un tableur, simuler le lancer de 40 pièces. Est-ce que cela abouti à une série d'au moins 5 lancers identiques ?

c) Refaire une dizaine de fois cette simulation. Peut-on maintenir la conjecture faite en **a)** ?

B ▶ Modélisation et calcul

Soit (X_n) la suite représentant le nombre de lancers identiques consécutifs en cours au bout de n lancers.
Par exemple : au bout de 7 lancers, on peut obtenir P-P-F-P-P-F-F, auquel cas la série en cours est de 2 faces donc dans ce cas $X_7 = 2$.
De plus si $X_n = 5$, alors $X_k = 5$ pour tout $k \geqslant n$.

1. a) Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov à cinq états (1, 2, 3, 4 et 5) et expliquer pourquoi on a posé cette dernière condition ($X_n = 5\ldots$) dans le cadre de l'exercice.

b) Donner le graphe probabiliste associé à cette chaîne et en déduire la matrice de transition M.

c) Justifier que l'état initial de cette chaîne est $\pi_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

2. a) Exprimer π_n en fonction de M et π_1.

b) En déduire π_{40} puis une valeur approchée de p à 10^{-4} près. Quelle conjecture était correcte ?

3. Adapter la méthode précédente pour connaître la probabilité d'avoir :

a) au moins 5 lancers identiques sur 50 lancers.

b) au moins 6 lancers identiques sur 100 lancers.

90 Contrat d'assurance

Une compagnie d'assurance de voiture propose trois niveaux dans les bonifications de contrats :
- le niveau 0 sans bonification,
- le niveau 1 avec une réduction de 20 %,
- le niveau 2 avec une réduction de 35 %.

Pour un assuré, la probabilité de ne pas avoir de sinistre durant une année est de 0,8.
L'assuré diminue d'un niveau s'il déclare un sinistre lors de l'année ; il monte d'un niveau si ce n'est pas le cas.

1. Démontrer que l'on peut modéliser la situation par une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.

2. Supposons à présent que lorsqu'au moins un sinistre est déclaré, on baisse d'un niveau si l'année précédente aucune déclaration de sinistre n'était faite et de deux niveaux si au moins une avait été faite.
Justifier qu'en gardant le même espace d'états, on ne retrouve plus une chaîne de Markov.
Comment modifier l'espace des états afin de construire une chaîne de Markov ?

91 Marche aléatoire en dimension 1

Algo

On considère un automate sur un parcours en cases ne pouvant aller que dans deux directions : à chaque étape il peut soit avancer soit reculer d'une case de façon équiprobable.

A ▶ Non bloqué aux extrémités

Pour cette partie l'automate ne peut se déplacer que sur cinq cases :

-2	-1	0	1	2

La case 0 correspondant à sa position initiale.
Lorsque l'automate arrive à la case 2, à l'étape suivante il peut soit aller en case 1 soit rester en casse 2 de façon équiprobable.
Le même principe s'applique pour la case – 2.
Soit A_n la position de l'automate à l'instant n.

1. a) Justifier que (A_n) est une chaîne de Markov à cinq états (– 2, – 1, 0, 1 et 2) et tracer le graphe probabiliste associé.

b) Donner la matrice de transition M (dans l'ordre croissant des états) ainsi que l'état initial π_0 associés à cette chaîne.

2. Quelle est la probabilité que l'automate soit en case 2 à la 5ᵉ étape ? et en case 0 ?

3. En calculant π_{10}, π_{20} puis π_{30} émettre une conjecture sur les positions possibles de l'automate au bout d'un très grand nombre d'étapes.

4. Montrer qu'il existe une unique distribution invariante π_I pour cette chaîne et la déterminer.

B ▶ Bloqué aux extrémités

On considère le même parcours qu'en **A** mais cette fois-ci, une fois arrivé aux cases – 2 ou 2 l'automate reste sur ces cases indéfiniment.
Soit B_n la position de l'automate à l'instant n.
Reprendre les questions **1** et **3.** de la partie **A** avec cette situation.

C ▶ Simulation d'une marche aléatoire

Cette fois ci l'automate se déplace sur un parcours sans extrémités :

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...

Compléter le programme **Python** ci-dessous afin qu'il renvoie la liste des différentes positions de l'automate après n étapes.

```
import random
def automate(n):
   for i in range(...):
      p=positions[-1]
      if random.random()<...
      p=
      else:
      p=
   positions.append(p)
   return positions
```

PYTHON
Programme
lienmini.fr/maths-e07-07

Exécuter le pour différentes valeurs de n.
Finit-on toujours par revenir à la case 0 ?

92 Séances d'accompagnement personnalisé

Algo

Au cours de l'année, les séances d'accompagnement personnalisé (AP) de mathématiques proposent aux élèves de se mettre dans trois groupes : Confirmé (C), Moyen (M) et en Besoin (B). Chaque semaine, un élève peut changer de groupe.

Les études statistiques sur les premières semaines de l'année ont permis de dégager les tendances suivantes :
- un élève du groupe B y reste la semaine suivante avec probabilité de 0,6 ; il rentre dans le groupe M avec une probabilité de 0,25 ;
- un élève du groupe M y reste la semaine suivante avec une probabilité de 0,6 ; sinon, il passe dans l'un des autres groupes avec une probabilité identique ;
- un élève du groupe B a une chance sur 7 de rester dans son groupe sinon, il a trois fois plus de chance de rejoindre le groupe M que le groupe C.

On suppose que lors du premier jour, le professeur considère toute sa classe en besoin.

1. Justifier que l'on peut modéliser la situation par une chaîne de Markov. On en donnera un graphe ainsi que sa matrice de transition M.

2. Si l'on note π_n la matrice distribution de cette chaîne de Markov pour $n \in \mathbb{N}$, donner π_0 et exprimer pour tout entier naturel n, π_n en fonction de M et de π_0.

3. On considère la matrice $\pi = (300 \quad 405 \quad 182)$.

a) Calculer le produit πM. Que constate-t-on ?

b) En déduire un état stable.

4. On propose le programme **Python** suivant.

```
import numpy as np
u=np.array(...)
M=np.array(...)
for k in range(1,8):
    u=u.dot(M)
print (u[1])
```

a) Compléter les valeurs manquantes.

b) Quelle valeur renvoie le programme après exécution ? Interpréter cette valeur dans le contexte.

b) Modifier ce programme pour qu'il affiche la fréquence d'élèves en besoin au bout de trois mois d'AP. L'AP est-il efficace ?

93 Jeu de société

Dans un jeu de plateau, un pion peut se trouver sur trois cases distinctes numérotées 1, 2 et 3.

Si le pion se trouve sur la case i, il peut jeter i fois le dé.

Si la somme est congrue à 1 modulo 6, le pion va en case 3, si elle est congrue à 2 modulo 6 ou 4 modulo 6 le pion va en case 2 et sinon le pion va en case 1.

On note X_n la position du pion après n tours.

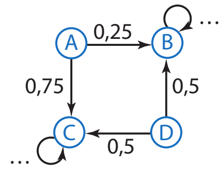
1. Justifier le caractère markovien de la suite (X_n). Pourquoi est-elle homogène ?

2. Déterminer sa matrice de transition ainsi que son graphe.

3. Le joueur gagne s'il reste deux fois de suite sur la même case. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au bout de deux tours ? Trois tours ? On pourra distinguer les états initiaux au début de jeu.

94 Seulement le graphe

Donner toutes les informations concernant la chaîne de Markov donnée par le graphe suivant.



95 Marche sur un triangle

Un lapin se déplace sur un triangle ABC à chaque instant en sautant d'un sommet à un sommet voisin avec une probabilité proportionnelle aux longueurs des cotés du triangle.

On note X_n sa position à l'instant n.

1. Démontrer que l'on peut alors construire une chaîne de Markov.

2. Déterminer la matrice de transition ainsi que le graphe de cette chaîne de Markov :

a) si l'on suppose que le triangle est équilatéral ;

b) si l'on suppose que le triangle est isocèle de sommet A avec $AB = 2BC$;

c) si l'on suppose que le triangle est rectangle en A, avec $AB = \dfrac{3}{4}AC$.

96 Dans une salle de jeu

Une société de maintenance prend en charge les réparations d'une salle de jeu qui ouvre tous les soirs de la semaine. Dans cette salle, deux simulateurs virtuels sont très utilisés et peuvent tomber en panne au cours de la soirée avec une probabilité de 0,2. Un réparateur de la société vient tous les matins mais il ne peut réparer qu'une machine en une matinée.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de simulateurs en panne au début de la n-ième soirée.

1. a) Montrer que la suite (X_n) est une suite de variables aléatoires définissant une chaîne de Markov. On en donnera sa matrice de transition ainsi que son graphe.

b) Déterminer la distribution invariante de cette chaîne.

2. Suite à une compression de personnels, la société ne peut plus envoyer un réparateur qu'un jour sur deux. Reprendre la question précédente avec cette nouvelle hypothèse.

3. Les réparateurs compétents ayant trouvé un meilleur contrat dans une autre société, il ne reste plus qu'un réparateur qui a besoin de deux matinées afin de réparer un simulateur.

Justifier pourquoi, en gardant le même espace d'états que dans les questions précédentes, on ne peut plus parler de chaîne de Markov.

Montrer que l'on peut modéliser la situation de manière différente afin de retrouver une chaîne de Markov avec un espace de 5 états. Déterminer alors la probabilité que les deux simulateurs fonctionnent au bout de trois soirées si elles fonctionnent la première soirée.

Exercices vers le supérieur

97 Mouton d'hier, mouton d'aujourd'hui

Chez les moutons, un caractère spécifique est donné par deux gènes : le gène M dominant et le gène m récessif. Deux éleveurs de moutons adoptent des stratégies d'accouplement différentes.

Stratégie 1 : un mouton de la n-ième génération est accouplé avec un mouton présentant Mm ;

Stratégie 2 : un mouton de la n-ième génération est accouplé avec un mouton présentant MM.

1. Modéliser chacune des situations par une chaîne de Markov.

2. Que dire de l'évolution du caractère chez les moutons des différents élevages ?

98 Chaîne à quatre états — Sciences

A ▸ Étude de probabilités

On considère une chaîne de Markov (X_n) à quatre états, E = {1 ; 2 ; 3 ; 4}, dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Comment interpréter les deux dernières lignes de la matrice Q ?

2. Tracer le graphe associé à cette chaîne de Markov.

3. Déterminer la probabilité des événements suivants :

$\big((X_0 = 1) \cap (X_1 = 3)\big)$

$\big((X_0 = 1) \cap (X_2 = 4)\big)$

$\big((X_0 = 2) \cap (X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)\big)$

$\big((X_0 = 1) \cap (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3)\big)$

$\big((X_0 = 1) \cap (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 4)\big)$

$\big((X_0 = 1) \cap (X_1 = 2) \cap (X_2 = 3) \cap (X_3 = 3)\big)$.

4. Montrer qu'une distribution π de cette chaîne est invariante si, et seulement si, il existe x et y avec $x + y = 1$, tels que $\pi = (0 \quad 0 \quad x \quad y)$.

B ▸ Modélisation

Un biologiste s'intéresse à l'impact et au traitement d'une maladie sur une culture botanique. Une plante peut se retrouver, jours après jours, dans les états suivants : saine ; impactée ; stérile ; morte.

Lorsqu'une plante est morte ou stérile, il n'y a plus rien à faire.

Lorsque la plante est saine, elle a trois chances sur quatre d'être impactée ; sinon elle devient stérile directement.

Une fois impactée, une plante a trois chances sur cinq d'être saine de nouveau après le traitement, sinon elle meurt.

1. Quelle est la probabilité pour une plante saine de mourir au bout de deux jours ?

2. Si l'on suppose qu'après un grand nombre de jour les états des plantes se stabilisent, vers quels états se stabilisent-elles ?

99 Chaînes à deux états — MPSI PCSI — Démo

On considère une chaîne de Markov à deux états.

1. Justifier qu'il existe deux réels p et q dans [0 ; 1] tels que la matrice de transition de cette chaîne soit de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer toutes les distributions invariantes de cette chaîne de Markov.

3. a) Par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$Q^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}.$$

b) Que peut-on dire de la matrice Q^n lorsque n tend vers $+\infty$?

100 Rebâtir sur les cendres — Sciences

En 2020, des incendies ont ravagé une grande partie de l'Australie. Il est établi que presqu'un tiers des koalas ont été exterminé. La faune et la flore vont se rétablir mais de plus en plus d'incendies sont prévus dans les années à venir.

A ▸ L'intervention de l'homme et la persistance de certaines graines permettent à la forêt d'évoluer après ces catastrophes : on s'intéresse à une portion de forêt qui peut être, année après année, soit à dominante eucalyptus (E), soit à dominante banale (B) soit décimée par les flammes (D). On suppose que l'évolution de la forêt suit une chaîne de Markov (X_n) dont la matrice de transition, dans l'ordre E, B, D, est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

1. Quelle est la probabilité qu'en 2025, la forêt soit à dominante euclayptus ?

2. a) Soit n un entier naturel. Formuler l'événement $(X_n = \text{E}) \cap (X_{n+1} = \text{E}) \cap (X_{n+2} = \text{E})$.

b) On ne peut réintroduire des koalas dans le milieu que si la forêt a été trois années de suite à dominante eucalyptus. Quelle est la probabilité que cela se produise à un moment donné ?

B ▸ D'une année sur l'autre, on suppose que la fréquence des grands incendies évolue selon la chaîne de Markov (Y_n) dont la matrice de transition est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ dans l'ordre des états 0, 1, où l'événement $(Y_n = 0)$ signifie qu'un incendie a eu lieu après n années. Quelle est la probabilité qu'en 2025, la forêt subisse un incendie ?

101 Dresser une araignée

Sciences

On tente de dresser une araignée afin qu'elle puisse obéir à un ordre simple : couché. On effectue une série d'essais consécutifs et après chacun d'eux, si l'araignée a obéit à l'ordre, elle reçoit une récompense. Cette araignée peut être dans différents états d'esprit.

État 1 : elle ne sait pas si elle reçoit une récompense et n'obéit donc pas à l'ordre.

État 2 : elle se rappelle qu'elle reçoit une récompense et obéit donc à l'ordre, mais elle pourra oublier par la suite.

État 3 : elle obéit directement à l'ordre.

On suppose qu'après chaque essai, elle change d'état d'esprit selon la matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note (X_n) la chaîne de Markov construite à partir de l'état d'esprit de l'araignée, avec X_n son état d'esprit au n-ième essai. On suppose que $P(X_0 = 1) = 1$.

1. Donner le graphe de cette chaîne de Markov.

2. Déterminer la distribution :

$\pi_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) & P(X_1 = 2) & P(X_1 = 3) \end{pmatrix}$.

3. Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

4. Exprimer $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

5. Démontrer par récurrence sur n que les matrices $v_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ sont définies par la relation :

$v_n = v_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n$.

6. On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} P^{-1}$. On ne cherchera pas à déterminer P. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$P(X_n = 1) = a\left(\frac{5}{6}\right)^n + b\left(-\frac{1}{4}\right)^n$, pour tout entier naturel n.

7. Avec quelle probabilité l'araignée va-t-elle alors obéir à l'ordre lorsque le nombre d'essais devient très grand ?

102 Chaînes et congruences

MPSI

On considère une suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $P(Y_n = 2) = \frac{1}{3}$ et $P(Y_n = -1) = \frac{2}{3}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, on note $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geqslant 1}$ forme une chaîne de Markov.

2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(X_n = 0) = 0$ si n n'est pas un multiple de 3.

103 Trajectoires

Maëva doit voir ses amis dans les villes de Vannes, Brest et Rennes. Elle peut passer plusieurs jours au même endroit et ses trajets sont modélisés par une chaîne de Markov (X_n) où X_n désigne la ville où elle se trouve au jour n.

Cette chaîne admet pour espace d'états E = {V ; B ; R} et sa matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}45 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

On appelle trajectoire la suite de lettres de son itinéraire ; par exemple la trajectoire BBRV signifie que Maëva a passé les deux premiers jours à Brest, puis qu'elle s'est rendue à Rennes puis le quatrième jour à Vannes.

1. Exprimer la trajectoire VRR en termes d'événement.

2. Justifier pourquoi $P_{(X_0=V)\cap(X_1=R)}(X_2 = B) = P_{(X_1=R)}(X_2 = B)$.

3. En déduire la probabilité de la trajectoire VRB.

4. Des deux trajectoires suivantes, BRB, RBV, laquelle est la plus probable ?

5. Calculer Q^2 et Q^3. Quelle est la probabilité que Maëva revienne dans une ville un jour après l'avoir quittée ? Deux jours après l'avoir quittée ?

104 Matrices stochastiques

MPSI — Démo

Pour un entier naturel $n > 1$, on note S_n l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre n.

A ▶ On note X la matrice colonne d'ordre n constituée uniquement de 1. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $AX = X$ si, et seulement si, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

2. En déduire que S_n est stable par produit matriciel, c'est-à-dire que si A et B sont deux matrices de S_n, alors $AB \in S_n$.

B ▶ On dit qu'une suite de matrices (A_n) converge vers une matrice L si toutes les suites de termes généraux les coefficients de A_n convergent respectivement vers les coefficients de L.

1. On s'intéresse dans cette question au cas $n = 2$.

a) Justifier qu'une matrice $A \in S_2$ s'écrit toujours de la forme $A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$ pour $p, q \in [0 ; 1]$.

b) Si $(p ; q) = (0 ; 0)$ ou $(1 ; 1)$, calculer A^n pour $n \in$ N.

2. On suppose cette fois que le couple $(p ; q)$ est différent de $(0 ; 0)$ et de $(1 ; 1)$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que l'on ait l'égalité polynômiale en X suivante :

$X^n = (X - 1)(X - (p + q - 1))P(X) + aX + b$, où $P(X)$ est une expression polynômiale en X que l'on ne demande pas de déterminer.

b) En évaluant l'expression polynomiale pour $X = A$, déduire A^n en fonction de p, de q et de n.

c) Montrer alors que la suite (A^n) converge et vérifier que sa limite est une matrice stochastique.

3. Revenons au cas général et considérons $A \in S_n$. Démontrer que si la suite (A^n) converge vers une matrice B, alors $B \in S_n$ et $B^2 = B$.

Travaux pratiques

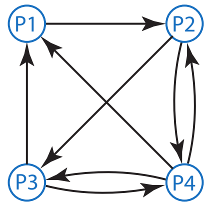
TICE 55 min Chercher Raisonner

1 Algorithme *PageRank*

Internet est composé d'une multitude de pages HTML liées entre elles par des liens hypertexte.
Lors d'une recherche sur Internet, le moteur de recherche doit pouvoir classer la multitude des pages Internet correspondant à la recherche.
C'est à cet effet qu'à été créé l'algorithme *PageRank*.

A ▸ Un premier exemple

On considère un «micro-web» composé de quatre pages Internet, les liens hypertexte de ces pages sont présentés dans le graphe ci-dessous.



Chaque arc représente un lien hypertexte, par exemple la page 3 contient un lien vers la page 1 mais la page 2 ne contient pas de lien vers la page 1.

1. Déterminer le nombre de lien de chaque page.
Si une page contient n liens, alors chaque lien de cette page aura pour poids $\frac{1}{n}$.

2. Recopier le graphe et pondérer chaque arc en utilisant la règle ci-dessus.

Pour classer les quatre pages, on leur attribue un score : s_1 pour P1, s_2 pour P2, ...
PageRank attribue les scores en suivant cette règle :
Soit $P_1, P_2, ..., P_n$ l'ensemble des pages ayant un lien vers une page P_k, soit $c_1, c_2, ..., c_n$ les poids respectifs de ces liens, alors le score de P_k est $s_k = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \ldots + c_n s_n$.

3. Montrer que les scores s_1, s_2, s_3 et s_4 de nos pages vérifient le système $\begin{cases} 6s_1 - 3s_3 - 2s_4 = 0 \\ -3s_1 + 3s_2 - s_4 = 0 \\ -3s_2 + 6s_3 - 2s_4 = 0 \\ -s_2 - s_3 + 2s_4 = 0 \end{cases}$

On peut remarquer que ce système admet plusieurs solutions, c'est pourquoi nous allons ajouter une contrainte : $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$.

4. Résoudre ce système et donner les valeurs de s_1, s_2, s_3 et s_4. Quelle page a le plus haut score ?

B ▸ Deuxième exemple

Appliquer l'algorithme *PageRank* vu précédemment sur ce «micro-web» pour déterminer la page avec le plus haut score.
Le système à résoudre ayant 13 équations, on pourra utiliser un solveur en ligne pour le résoudre (Exemple de solveur en ligne : matrixcalc.org/fr.)

Histoire des sciences — TICE — 55 min — Raisonner Modéliser

2 Urnes d'Ehrenfest

En 1907, les époux Ehrenfest introduisent un modèle pour illustrer le comportement de certains phénomènes mécaniques comme le mouvement d'un grand nombre de particules dans des espaces confinés.

Le modèle étudié est le suivant : on dispose de deux urnes (A et B), l'urne A contenant N boules numérotées de 1 à N à l'instant $n = 0$.
À chaque instant, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change la boule portant le numéro choisi d'urne.
On s'intéresse au nombre de boules contenu dans l'urne A à l'instant n, que l'on consigne dans une variable aléatoire (X_n).

A ▸ Simulation du modèle

PYTHON
Programme
lienmini.fr/maths-e07-08

Le programme ci-contre est écrit en langage **Python**.
La fonction **`Ehrenfest`** simule le contenu de l'urne A et renvoie une liste X_n correspondant aux différentes valeurs prises par X_k pour les étapes 0 à n

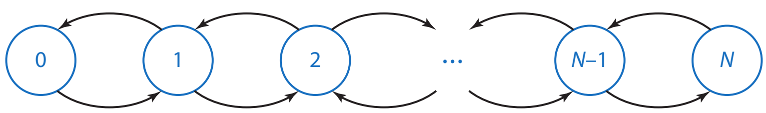
1. Compléter les pointillés :
① : A est une liste contenant les numéros des boules contenues dans l'urne.
Comment calculer **`Xn`** à partir de A ?
② : b est le nombre choisi au hasard.
Quelle fonction **Python** permet d'ajouter ou enlever un élément d'une liste ?

```
import random
import matplotlib.pyplot as plt
def Ehrenfest(N,n):
   A=[i for i in range(1,N+1)]
   Xn…①
   for k in range(n):
      b=random.randint(1,N)
      if b in A:
         …②
      else:
         …②
      Xn.append(…)①
   return Xn
```

2. La fonction **`courbeEhrenfest`** trace la courbe représentant X_n en fonction de n.
a) Exécutez le programme et entrer **`courbeEhrenfest(500,1000)`** pour observer l'évolution de (X_n).
b) Étudier l'évolution de l'urne pour différentes valeurs de N.
Comment semble se comporter (X_n) lorsque n tend vers l'infini ?

B ▸ Étude du modèle

1. Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov, on admettra qu'elle est homogène.
2. Donner la distribution initiale π_0 associée.
Le modèle d'Ehrenfest peut être représenté partiellement par le graphe suivant.



2. Expliquer pourquoi, dans ce graphe, seuls les sommets consécutifs sont adjacents.
3. Soit i et $j \in \{1\,,2\,,\ldots,N\}$, on souhaite calculer $Q(i,j) = P_{(X_n = i)}(X_{n+1}) = (j)$.

a) Déterminer, en justifiant, les valeurs de $Q(0,1)$ et $Q(N-1, N)$.
b) Que vaut $Q(i\,,j)$ si i et j ne sont pas consécutifs ?
c) Calculer $Q(i\,,i+1)$ et $Q(i\,,i-1)$ en fonction de i et N.
4. En déduire le poids de chaque arc ainsi que le matrice de transition M associée à (X_n).
5. On prend le cas particulier $N = 4$. À l'aide du calculatrice ou d'un logiciel de calcul matriciel, étudier le comportement de π_n lorsque n tend vers l'infini.
Comment se comporte π_n pour n pair ? Pour n impair ?