# 7

# Chaînes de Markov

Internet est un réseau de réseaux : une multitude de machines (clients et serveurs) reliées entre elles principalement par des câbles. Lorsque l'on entre l'adresse d'un site Internet, l'information circule à travers les câbles *via* les routeurs jusqu'au serveur contenant la page demandée.
Dans le moteur de recherche *Google*, les mots clés inscrits permettent d'obtenir une grande quantité de liens vers des pages du web.

**Comment trouver les pages web qui correspondent à la requête d'un utilisateur ?**

↪ TP 1 p. 234

**VIDÉO**

Au cœur de Google : *PageRank*
lienmini.fr/maths-e07-01

# Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-e07-02

Les rendez-vous Sésamath

## 1 Effectuer un calcul matriciel

**1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A + B$ ; $A - B$ et $2A - 3B$.

**2.** Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

## 2 Résoudre un système

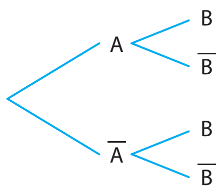
Résoudre les systèmes suivants par la méthode de son choix.

**a)** $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 4y - 8y = 36 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ 6y - 3x - 2z = 11 \\ 8z + 7y + 4x = 18 \end{cases}$

## 3 Calculer une probabilité

Soit deux événements A et B tels que $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3}$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}$ et $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \frac{5}{9}$.




**1.** Compléter l'arbre de probabilité pondéré ci-contre.

**2.** Déterminer $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $P(\mathrm{B})$.

**3.** En déduire $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$.

## 4 Appliquer la formule de la probabilité totale

Dans une population, on estime la probabilité de naissance d'une fille à 0,48. Des statistiques portant sur une maladie dénotent que 2 % des filles et 1% des garçons présentent à la naissance cette maladie. On choisit au hasard un nouveau-né dans cette population ; on note M l'événement « l'enfant choisi est malade » et F l'événement « l'enfant choisi est une fille ».

**1.** Calculer les probabilités $P(\mathrm{M} \cap \mathrm{F})$ et $P(\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{F}})$.

**2.** On rappelle qu'un système complet d'événements de l'univers est une famille d'événements deux à deux disjoints et dont la réunion donne l'univers. Justifier que les événements F et $\overline{\mathrm{F}}$ forment un système complet de l'univers.

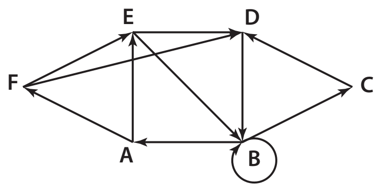
**3.** Si une famille d'événements $(\mathrm{A}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forme un système complet d'événements et B un événement, le théorème de la probabilité totale énonce l'égalité :

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_1) + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_2) + \ldots + P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A}_n).$$

Calculer la probabilité que l'enfant choisi soit malade.

## 5 Manipuler des graphes orientés

On considère le graphe $G$ ci-contre.




**1. a)** Donner l'ordre et dresser le tableau des degrés des sommets de $G$.

**b)** En déduire le nombre d'arcs de $G$.

**2. a)** Déterminer un chemin de longueur 4 reliant A à F.

**b)** Déterminer un circuit de longueur 7.

**3.** Déterminer la matrice d'adjacence associée à $G$.

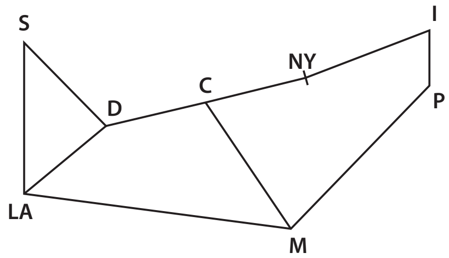
# Activités

Algo 45 min

## 1 Parcourir des chemins dans un graphe pondéré

### A ▸ Graphe pondéré

On considère le réseau Internet ci-contre.
Chaque sommet correspond à une ville, abritant au moins un serveur et un routeur.
On connaît de plus les temps de transmission par ligne :
- 1 ms pour les lignes S-D, LA-D et P-I,
- 2 ms pour S-LA ; 4 ms pour C-M et NY-C,
- 5 ms pour C-D ; 7 ms pour I-NY,
- 8 ms pour LA-M et 10 ms pour P-M.




**1.** Dans le graphe, où serait-il pertinent de placer les temps de transmission ? Les placer.

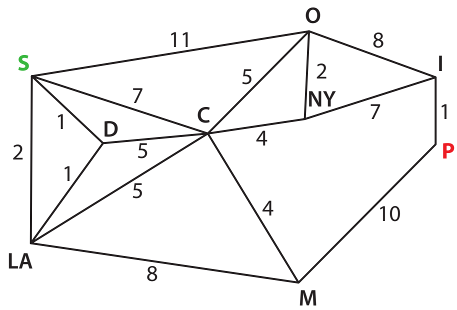
**2.** De Paris (P), un utilisateur souhaite accéder à une page contenue dans un des serveurs à Seattle (S).

**a)** Faire une liste de tous les chemins possible (sans passer deux fois par la même ligne) de P à S.

**b)** Pour chacun d'entre eux, noter le temps total de transmission. Quel est le chemin optimal ?

### B ▸ Algorithme de Dijkstra-Moore : recherche du plus court chemin

On considère le graphe ci-contre et on cherche le plus court chemin entre **P** et **S**. L'algorithme de Dijkstra-Moore réduit le temps de recherche par rapport à la méthode utilisée dans la partie **A**.
Le début de l'algorithme est consigné dans le tableau ci-dessous. L'origine du chemin est **P**.
- **Ligne 1 :** pour chaque sommet adjacent à P, écrire le poids de l'arête et P entre parenthèses ; si le sommet n'est pas adjacent à P, écrire ∞.
- **Ligne 2 :** remplacer P par le sommet adjacent de poids minimal de la ligne 1 : I. Écrire le poids total du chemin depuis P et I entre parenthèses pour chaque sommet adjacent à I ; écrire ∞ si le sommet n'est pas adjacent à I.
- **Ligne 3 :** écrire le minimum de chaque colonne.




**1. a)** Pourquoi a-t-on choisi de passer par I à la ligne 2 ? À quoi correspond le nombre 9 dans la case «9(I)» ?

**b)** À la ligne 5, pourquoi a-t-on conservé «9(I)» plutôt que «10(NY)» pour la colonne du sommet O ?

**c)** Quel sommet va-t-on choisir pour la ligne 6 ? Pourquoi ?

**2.** Recopier ce tableau puis le terminer pour obtenir le chemin le plus court entre **P** et **S**.

| | Sommet | P | I | O | NY | C | D | M | LA | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Depuis **P** | | 1(P) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 10(P) | ∞ | ∞ |
| 2 | Depuis **P** en passant par **I** | | | 9(I) | 8(I) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 3 | Minimum depuis P | | | 9(I) | 8(I) | ∞ | ∞ | 10(P) | ∞ | ∞ |
| 4 | Depuis **P** en passant par **I** et **NY** | | | 10(NY) | | 12(NY) | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| 5 | Minimum depuis **P** | | | 9(I) | | 12(NY) | ∞ | 10(P) | ∞ | ∞ |
| 6 | | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

↪ Cours 1 p. 204

30 min

## 2 Modéliser l'évolution d'une épidémie

On s'intéresse à l'évolution d'une maladie dans une population. Cette population se répartit en trois états : les individus sains et non immunisés (état 1) ; les individus immunisés (état 2) et les individus malades (état 3).
On discrétise le temps pour s'intéresser aux instants : 0, 1, 2, ..., $n$, … avec $n \in \mathbb{N}$.
• La moitié des individus de l'état 1 à l'instant $n$ reste saine à l'instant $n+1$ ; alors que l'autre moitié tombe malade.
• Parmi ceux qui sont immunisés à l'instant $n$, 5 % se retrouve dans l'état 1 l'instant d'après et les autres restent immunisés. 25 % des malades restent dans cet état de l'instant $n$ à l'instant $n+1$. Les autres guérissent et deviennent immunisés.
• Avant l'épidémie, à l'instant 0, tous les individus sont supposés sains.
À chaque instant $n$, on choisit au hasard un individu dans la population et on note $X_n$ l'état dans lequel cet individu se trouve.

**1.** Les ensembles images des variables aléatoires $X_n$ dépendent-ils de $n$ ? Donner alors cet ensemble.

**2.** Préciser toutes les probabilités conditionnelles qui interviennent dans l'énoncé.

**3.** Représenter le modèle d'évolution par un graphe pondéré de sommets 1, 2 et 3.

**4.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_n$ la matrice ligne donnée par $\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Cette matrice correspond ainsi à la loi de la variable aléatoire $X_n$.

**a)** Préciser la matrice $\pi_0$.

**b)** En utilisant la formule de la probabilité totale donner $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$, chacune en fonction de $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$ et $P(X_n = 3)$.

**c)**En déduire une relation entre $\pi_{n+1}$ et $\pi_n$ que l'on écrira sous forme matricielle.

↪ Cours 2 p. 206, 3 p. 208 et 4 p. 210

30 min

## 3 Prévoir grâce aux états invariants

Des employés d'une entreprise ont le choix entre trois navigateurs Internet : *SearchPlus*, *FastFound* et *EasyNavig*.
D'après une étude réalisée sur les années antérieures il apparaît que, chaque année :
• parmi les employés ayant choisi *SearchPlus*, 10 % d'entre eux restent sur ce navigateur et 60 % changent pour *FastFound* ;
• parmi ceux ayant choisi *FastFound*, 20 % changent pour *SearchPlus* et 40 % prennent *EasyNavig* ;
• parmi ceux ayant choisi *EasyNavig*, 75 % ne changent pas et 20 % prennent *FastFound*.

### A ▸ État initial particulier

En 2019, 10 % des employés utilisent*SearchPlus* et 30 % des employés utilisent*FastFound*.

**1.** Justifier que la présente situation peut être modélisée par une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition $Q$ dans l'ordre des états.

**2.** Tracer le graphe probabiliste associé, puis donner l'état initial $\pi_0$.

**3.** Quelle sera la répartition des navigateurs en 2020 ? En 2021 ? Que constate-t-on ?

**4.** Le constat est-il le même si l'état initial est $r = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$ ? Cet état est appelé état invariant pour la distribution.

### B ▸ Observation sur le long terme

En 2019, dans une entreprise similaire avec les mêmes observations, 40 % des employés utilisent *SearchPlus* et 50 % des employés utilisent *FastFound*.

**1.** Observer la répartition sur les années 2020, 2025, 2030 et 2040. Que remarque-t-on ?

**2.** Effectuer les mêmes observations avec la distribution initiale $(a \quad b \quad c)$, où $a + b + c = 1$.
A-t-on le même constat ? Quelle conjecture peut-on faire sur l'évolution des états à long terme ?

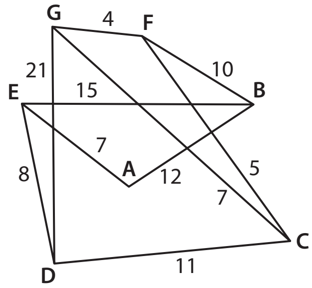
↪ Cours 6 p. 214

# Cours

## 1 Graphe pondéré

**Définitions** Parcours dans un graphe pondéré

- On dit qu'un graphe est **pondéré** si chacun(e) de ses arêtes (ou arcs) est affecté(e) d'un nombre positif.
- Dans un graphe pondéré, le poids d'une chaîne (resp. d'un chemin) est la **somme des poids des arêtes** (resp. **arcs**) qui composent la chaîne (resp. le chemin).




**Exemple**

Dans le graphe ci-contre, la chaîne G-F-C-D-E est une chaîne reliant G à E de poids 4 + 5 + 11 + 8, soit 28.

**Propriété** Algorithme de Dijkstra-Moore

On cherche le plus court chemin entre une origine D et un autre sommet du graphe. Chaque sommet est **marqué** par le poids du plus court chemin conduisant de l'origine à ce sommet.

**1. Initialisation.** On fixe la marque de D à 0.
Marquer chacun des sommets adjacents à D par le poids de l'arête joignant ce sommet à D.
Marquer les autres sommets par ∞.

**2. Marquage.** Regarder tous les sommets de marque non fixée et repérer celui qui a la plus petite marque pour la fixer : on note X ce sommet.

**3. Exploration.** Pour chaque sommet Y de marque non fixée adjacent à X, calculer la somme de la marque de X avec le poids de l'arête reliant X à Y.

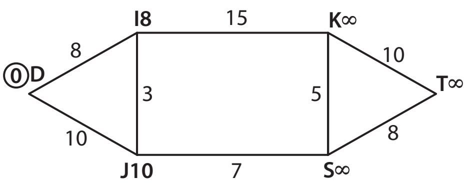
**4. Décision.** Si cette somme est inférieure à la marque Y, remplacer la marque de Y par cette somme en indiquant entre parenthèses la provenance de cette nouvelle marque optimale.

**5. Itération.** Recommencer à partir de **2.** jusqu'à avoir parcouru tous les sommets et exploré tout le graphe.

**6. Fin de l'algorithme.** Toutes les marques étant optimales, la marque fixée du sommet Y est le poids d'une plus courte chaîne reliant D à Y.

**Remarque** On peut placer les itérations successives au fur et à mesure dans un tableau. On peut aussi dessiner sur le graphe les marques au fur et à mesure de l'avancée dans l'algorithme.

**Exemple**




Sur le graphe ci-contre, on cherche le chemin de poids minimal reliant D à T.

**Sur la première ligne :** 1 D le point traité est marqué à 0 ;
2 I est lié à D par un chemin de poids 8 d'où «8(D)» dans la colonne I ; 3 K et D ne sont pas adjacent, d'où « ∞ » dans la colonne K.

**Sur la deuxième ligne :** 4 on traite le sommet de coefficient minimal sur la ligne précédente soit I.
5 On a fixé la marque de J.
6 22 est un poids plus petit que 23

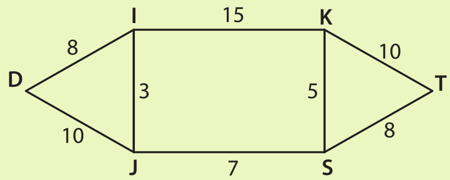
| | D | I | J | K | S | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Depuis D(0) | 0 1 | 8(D) 2 | 10(D) | ∞ 3 | ∞ | ∞ |
| Depuis I(8) 4 | | | 5 | 23(I) | ∞ | ∞ |
| Depuis J(10) | | | | | 17(J) | ∞ |
| Depuis S(17) | | | | 22(S) | | 25(S) |
| Depuis K(22) | 0 | 8(D) | 10(D) | 22(S) 6 | 17(J) | 25(S) |

# Exercices résolus

## Méthode 1 Déterminer un plus court chemin

**Énoncé**

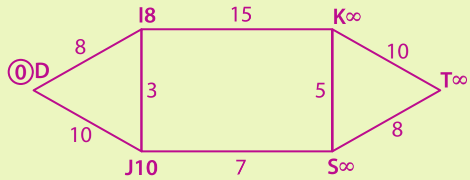
**On considère le graphe ci-contre.**
**Déterminer le chemin de poids minimal reliant D à T.**




**Solution**

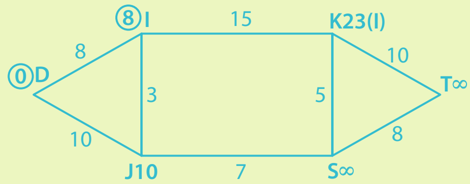
On applique l'algorithme de Dijkstra-Moore.

**1. Initialisation.** Fixer la marque en entourant le poids (c'est-à-dire la marque fixée à 0) pour le sommet de départ.
Marquer chacun des sommets adjacents à D par le poids de l'arête joignant ce sommet à D : écrire la marque de I à 8, de J à 10.
Marquer les autres sommets par ∞ : K, S et T.




**2. Marquage.** Regarder tous les sommets de marque non fixée (non entourée), et repérer celui qui a la plus petite marque pour la fixer : ici c'est I, donc pour fixer la marque, on entoure la marque de I.

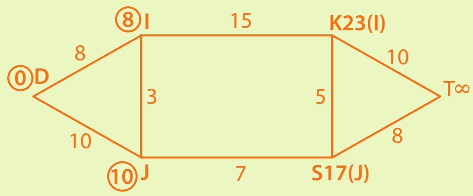
**3. Exploration.** Pour chaque sommet de marque non fixée, adjacent à I, calculer la somme de la marque de I avec le poids de l'arête le reliant à I.
J : 8 + 3 = 11, moins bon que 10 déjà marqué : donc on ne fait rien sur J.
K : 8 + 15 = 23, on écrit 23(I).



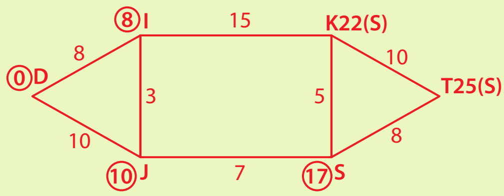

**4. Décision.** Si cette somme est inférieure à la marque jusque-là inscrite, remplacer la marque du sommet par cette somme en indiquant entre parenthèse la provenance de cette nouvelle marque optimale.

**5. Itérations.** On recommence à partir de **2.** jusqu'à avoir parcouru tous les sommets et exploré tout le graphe.

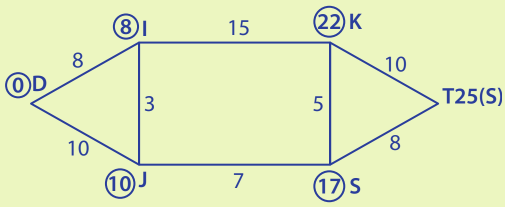
**2. Marquage.** On fixe la marque de J à 10.
**3. Exploration.** Sommets adjacents à J de marque non fixée :
**4. Décision.** S : 10 + 7 = 17, on écrit 17(J).




**2. Marquage.** On fixe la marque de S à 17.
**3. Exploration.** Sommets adjacents à S de marque non fixée:
**4. Décision.** K : 17 + 5 = 22, mieux que 23, on écrit 22(S).
T : 17 + 8 = 25, on écrit 25(S).



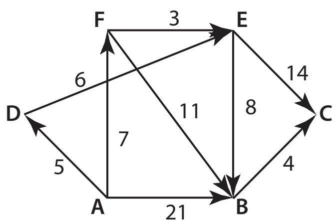

**2. Marquage.** On fixe la marque de K à 22.
**3. Exploration.** Sommets adjacents à K de marque non fixée : T.
**4. Décision** T : 22 + 10 = 32, moins bon que 25 : on ne fait rien.




**6. Fin de l'algorithme.** Ainsi, le plus court chemin entre les sommets D et T a pour poids 25 obtenue par la trajectoire DJST, en lisant les schémas dans le sens inverse avec les sommets notés entre parenthèses.

### À vous de jouer !

Pour les exercices 1 et 2, on considère le graphe ci-contre.




**1** Déterminer dans le graphe ci-contre le chemin de poids minimal reliant A à C.

**2** Déterminer dans le graphe ci-contre le chemin de poids minimal reliant D à C.

↪ Exercices 30 à 32 p. 220

# Cours

## 2 Chaînes de Markov

**Définition** Variable aléatoire

**On considère un espace sur lequel on choisit une probabilité $P$.**

**Une variable aléatoire discrète $X$ sur cet espace est une fonction de l'univers des possibles $\Omega$ dans l'ensemble image $E = X(\Omega)$, où E est dénombrable.**

**Remarque** Si l'on s'intéresse à l'état d'un système en fonction du temps, étudié en certains instants, on introduit une suite de variables aléatoires $(X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, où $X_n$ désigne l'état du système à l'instant $n$.

**Exemple**

On considère une urne contenant deux boules noires et deux boules blanches. On effectue des tirages successifs de la manière suivante : on tire une boule au premier tirage, puis au deuxième tirage on prélève une boule et on remet ensuite la boule prélevée au premier tirage ; au $n$-ième tirage, on prélève une boule et on remet ensuite la boule prélevée au $(n-1)$-ième tirage.

Si on note état 1 pour blanche, état 2 pour noire et $X_n$ l'état de la boule prélevée au $n$-ième tirage, alors la suite $(X_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$, est une suite de variables aléatoires à valeurs dans le même ensemble image $E = \{1 ; 2\}$.

**Définition** Chaînes de Markov

**On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)$ définies sur un même espace fini muni d'une probabilité et à valeurs dans un espace E fini. On dit que la suite $(X_n)$ définit une chaîne de Markov si :**

**pour tout entier naturel $n$ et toutes valeurs $e_0, e_1, e_2, ..., e_{n+1} \in E$, la probabilité de l'événement $(X_{n+1} = e_{n+1})$ sachant les événements $(X_n = e_n)$, $(X_{n-1} = e_{n-1})$, …, $(X_0 = e_0)$ ne peut dépendre que de l'événement $(X_n = e_n)$ et de la valeur de $e_{n+1}$, c'est-à-dire des valeurs de $n$, $e_n$ et $e_{n+1}$ :**

$$P_{(X_n = e_n)\cap ...\cap(X_0 = e_0)}\left(X_{n+1} = e_{n+1}\right) = P_{(X_n = e_n)}\left(X_{n+1} = e_{n+1}\right).$$

**Remarque** Autrement dit si $X_n$ correspond à la position d'un système à l'instant $n$, alors la position suivante ne dépend que de la position à l'instant $n$, pas de ses positions passées. L'état futur ne dépend que de l'état présent, pas des états passés.

**Exemples**

1. Dans l'exemple précédent, si une boule noire a été prélevée au $n$-ième tirage, la probabilité de tirer une boule noire au $(n+1)$-ième tirage est de $\frac{1}{3}$ ; on connait ce que contient l'urne au $(n+1)$-ième tirage de par le tirage précédent uniquement. Si $X_n$ désigne l'état de la boule au n-ième tirage, alors la suite $(X_n)$ définit ainsi une chaîne de Markov.
2. Une suite de variables aléatoires indépendantes est une chaîne de Markov.

**Remarque** Un grand nombre de phénomènes sur un système ne peuvent pas être modélisés par des expériences aléatoires indépendantes. Les chaînes de Markov permettent d'étendre des résultats à des expériences qui dépendent les unes des autres dans une moindre mesure. Leur introduction est due au mathématicien russe Andreï Markov, à la fin du XIX$^e$ siècle.

**Définition** Espace d'états

**On appelle espace d'états d'une chaîne de Markov $(X_n)$, l'espace image E des variables aléatoires $X_n$.**

**Exemple**

Sur un plateau un certain nombre $N$ de boules noires et blanches roulent. Dès que deux d'entres elles se touchent, elles changent de couleur. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose qu'entre chaque instant $n$ et $n+1$, exactement deux boules se touchent. Le nombre de boules noires à l'instant $n$, $X_n$, est une variable aléatoire et la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{0 ; 1 ; ... ; N\}$.

## Méthode 2 Justifier le caractère markovien d'une suite de variables aléatoires

**Énoncé**

**1.** **Un poisson nage dans un aquarium. Celui-ci est constitué de deux bocaux numérotés 1 et 2. On discrétise le temps afin de déterminer la position $X_n$ du poisson à l'instant $n$, pour $n \in \mathbb{N}$.**
**On suppose que, s'il se trouve dans le bocal 1, il y reste l'instant suivant avec une probabilité de 0,4. S'il se trouve dans le bocal 2, il y reste l'instant suivant avec probabilité de 0,7.**
**Justifier que la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états. Donner les probabilités conditionnelles qui interviennent.**

**2.** **Pour s'entraîner, un sportif effectue des allers-retours vers trois points possibles de son origine. Cela lui donne trois parcours numérotés de 1 à 3 dans l'ordre de longueur.**
**Il court de la manière suivante : s'il effectue le parcours le plus long, il choisira la fois d'après l'un des deux autres de manière équiprobable On note $X_n$ le parcours choisi au $n$-ième aller-retour.**
**a) Justifier que la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov dont on précisera l'espace d'états.**
**b) On prend en compte la fatigue : plus $n$ devient grand, plus la probabilité de choisir un chemin court est grande. Le modèle de chaîne de Markov reste-t-il pertinent ?**
**c) À présent, si le sportif a pris trois fois de suite le parcours le plus long, il choisit de manière équiprobable l'un des deux autres et s'il a choisi le chemin numéro 2 trois fois de suite, alors il choisit avec certitude le chemin le plus court la fois d'ensuite. Peut-on encore parler de chaîne de Markov ?**

**Solution**

**1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble image de $X_n$ est $\{1 ; 2\}$.
Les probabilités que, dans le futur, le poisson se trouve dans un bocal ne dépendent que de sa position à l'instant présent, et ce de la manière suivante : **1**
pour un entier $n$, $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=0{,}4$ ; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=0{,}6$ ;
$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=0{,}7$ et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=0{,}3$. $(X_n)$ est bien une chaîne de Markov.

**2. a)** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, les valeurs possibles de la variable aléatoire sont les valeurs de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$.
Les probabilités de choisir un parcours au $(n+1)$-ième aller-retour ne dépendent que du choix du $n$-ième parcours.
$(X_n)$ est donc une chaîne de Markov d'espace d'états $\{1 ; 2 ; 3\}$.

**b)** Les probabilités dépendent maintenant de l'indice $n$, mais elles restent indépendantes des choix de chemins précédents, on peut toujours parler de chaîne de Markov. **2**

**c)** Les probabilités de choisir un parcours au $(n+1)$-ième aller-retour dépendent du choix des trois parcours précédents et non pas uniquement du choix du $n$-ième : ce n'est plus une chaîne de Markov.

**Conseils & Méthodes**

**1** Le caractère markovien d'une suite de variables dépend des hypothèses sur les probabilités.

**2** Les probabilités dans une chaîne de Markov peuvent dépendre de l'entier $n$.

**À vous de jouer !**

**3** Tous les jours, Noé envoie un message à l'un de ses trois amis, jamais deux fois de suites au même mais de manière équiprobable aux deux autres. Justifier que l'on peut parler d'une chaîne de Markov.

**4** Un élève doit répondre à une série de questions. À chaque fois, il peut tricher. S'il triche une fois, il recommence la fois d'après avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ ; s'il ne triche pas, il continue avec une probabilité de 0,5.
Peut-on adopter le modèle de Markov ?

**5** Une montre est détraquée. À chaque seconde, l'aiguille passe d'un chiffre à un chiffre voisin de manière équiprobable. On note $X_n$ la position de l'aiguille après $n$ secondes. Peut-on parler de chaîne de Markov ?

**6** Un élève révise une leçon tous les jours, de manière aléatoire mais sans jamais reprendre deux jours de suite la même. Peut-on adopter un modèle de Markov ?
Donner des conditions sur la situation pour perdre le caractère markovien de cette situation.

↪ Exercices 33 à 35 p. 220

Cours

# 3 Matrice de transition d'une chaîne de Markov

**Définition** Chaînes homogènes

On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ d'espace d'états $E = \{e_i \,;\, 1 \leqslant i \leqslant N\}$.

On dit que $(X_n)$ est **homogène** si, pour tout entier naturel $n$ et tous $1 \leqslant i, j \leqslant N$, la probabilité de l'événement $(X_{n+1} = e_j)$ sachant l'événement $(X_n = e_i)$ est **indépendante de $n$**.

**Définition** Matrice de transition

Si le nombre $P_{(X_n = e_i)}(X_{n+1} = e_j)$ ne dépend pas de $n$, on le note $Q(i, j)$ et on l'appelle probabilité de transition de la chaîne homogène $(X_n)$.

La matrice $Q = Q(i, j)$ d'ordre $N$ est appelée **matrice de transition** de la chaîne de Markov.

**Remarque** La probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ est donc égale au coefficient $(i, j)$ de la matrice de transition.

**Exemples**

① Une puce se déplace sur les sommets d'un triangle sans rester statique. À chaque saut elle se retrouve sur un autre sommet de manière équiprobable. Si $X_n$ désigne la position de la puce après $n$ sauts, alors la suite $(X_n)$ est une chaîne de Markov dont les trois états sont les sommets du triangle et de matrice de transition $Q$ ci-contre.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

② Soit une chaîne de Markov modélisant l'évolution d'une particule possédant deux états dont la matrice de transition est $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$.

Alors la probabilité que la particule change d'état entre deux instants successifs donnés est 0,25.

**Définition** Matrice stochastique

On appelle **matrice stochastique** d'ordre $n$ toute matrice carrée de taille $n$ dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

**Propriété** Caractérisation d'une matrice de transition

La matrice de transition d'une chaîne de Markov est une **matrice stochastique.**

**Démonstration**

On fixe $i \in \{1\,;\,\ldots\,;N\}$. $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i, j) = \sum_{j=1}^{N} P_{(X_n = e_i)}(X_{n+1} = e_j) = \sum_{j=1}^{N} \frac{P\big((X_n = e_i) \cap (X_{n+1} = e_j)\big)}{P(X_n = e_i)}$

De plus, la famille $\big((X_{n+1} = e_j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant N}$ forme une partition de l'univers, ainsi, d'après la formule de la probabilité totale, on a $P(X_n = e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} P\big((X_n = e_i) \cap (X_{n+1} = e_j)\big)$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} Q(i, j) = \frac{1}{P(X_n = e_i)} \sum_{j=1}^{N} P\big((X_n = e_i) \cap (X_{n+1} = e_j)\big) = 1$.

**Définition** Distribution initiale

On appelle **distribution initiale** de la chaîne de Markov la loi de la variable aléatoire $X_0$.

Notée $\pi_0$, on la représente par une matrice ligne : $\pi_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = e_1) & P(X_0 = e_2) & \ldots & P(X_0 = e_N) \end{pmatrix}$.

## Méthode 3 Déterminer une matrice de transition d'une chaîne de Markov

**Énoncé**

**Dans un lycée, la salle de reprographie contient deux photocopieuses pouvant tomber en panne de manière indépendante l'une de l'autre dans la journée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule photocopieuse en une nuit. On note $X_n$ le nombre de photocopieuses encore en panne au matin du $n$-ième jour.**

**1. Justifier que la suite $(X_n)$ forme une chaîne de Markov homogène.**

**2. Déterminer sa matrice de transition.**

**Solution**

1. Le nombre de photocopieuses en panne le lendemain matin $(n + 1)$ ne dépend que de ce nombre le matin même $(n)$ ainsi que des pannes éventuelles dans la journée $(n)$.
De plus, les probabilités conditionnelles ne dépendent pas du nombre de jours passés. $(X_n)$ est donc une chaîne de Markov homogène $(n + 1)$ 1
L'espace d'états de cette chaîne est $E = \{0 ; 1\}$ ; 2 en effet, si dans une journée les deux photocopieuses tombent en panne, l'une sera réparée le lendemain matin.

2. Calculons les probabilités conditionnelles au matin $n + 1$.

• **Sachant qu'aucune photocopieuse n'est en panne le matin $n$.**

– Probabilité qu'aucune photocopieuse ne soit en panne le matin $n + 1$ : soit une seule photocopieuse est tombée en panne dans la journée $n$ et a été réparée dans la nuit, soit aucune photocopieuse n'est tombée en panne dans la journée $n$ :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$.

– Probabilité qu'une seule photocopieuse soit en panne le matin $n + 1$ : les deux photocopieuses sont tombées en panne la journée $n$, une seule est réparée :

$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

• **Sachant qu'une photocopieuse est en panne le matin $n$.**

– Probabilité qu'aucune photocopieuse ne soit en panne le matin $n + 1$ : l'autre n'est pas tombée en panne la journée $n$ :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{2}{3}$.

– Probabilité qu'une seule photocopieuse soit en panne le matin $n + 1$ : l'autre est tombée en panne la journée $n$ :

$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}$.

Finalement, la matrice de transition de $(X_n)$ est $Q=\begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

**Conseils & Méthodes**

1 Une chaîne $(X_n)$ est homogène lorsque les probabilités conditionnelles ne dépendent pas de $n$.

2 Lorsque la chaîne admet deux états (resp. 3 états), la matrice de transition est de taille $2 \times 2$ (resp. $3 \times 3$).

**À vous de jouer !**

**7** Reprendre l'énoncé de Méthode 3 en supposant cette fois qu'une machine n'est réparée que le lendemain matin.

**8** On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ d'espace d'états $\{1 ; 2\}$ et dont la matrice de transition est donnée par $Q=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$. Donner les probabilités $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)$ et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$.

**9** On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ d'espace d'états $\{1 ; 2 ; 3\}$ et dont la matrice de transition est donnée par $Q=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,5\\ 0,4 & 0,2 & 0,4\\ 0,1 & 0,7 & 0,2\end{pmatrix}$. Donner les probabilités $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)$, $P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)$ et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$.

↪ Exercices 36 à 42 p. 220

Cours

# 4 Graphe associé à une chaîne de Markov

**Définition** Graphe probabiliste

**Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré tel que, pour chaque sommet, la somme des poids des arcs issus de ce sommet vaut 1.**

**Définition** Graphe associé à une chaîne de Markov

**On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ d'espace d'états $E = \{e_i\,;\, 1 \leqslant i \leqslant N\}$.**
**Si $Q$ est la matrice de transition de $(X_n)$, on peut associer à cette chaîne de Markov un graphe probabiliste : les sommets de ce graphe sont les états $e_i$ et, pour $1 \leqslant i, j \leqslant N$, l'arc $\overrightarrow{e_ie_j}$ est affecté du poids $Q(i, j)$.**

**Remarque** On peut définir une chaîne de Markov par son graphe et en déduire ensuite la matrice de transition.

**Exemples**

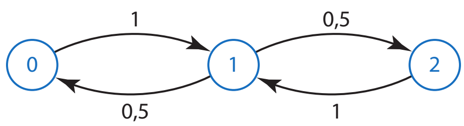
① On dispose de deux urnes A et B. L'urne A contient au départ deux boules : une noire et une blanche.
À chaque étape, on choisit au hasard une boule et on déplace la boule choisie dans l'autre urne.
On désigne par $X_n$ la variable aléatoire représentant le nombre de boule dans l'urne A à l'instant $n$.
$(X_n)$ est bien une chaîne de Markov car le nombre de boules dans l'urne A à l'instant $n + 1$ ne dépend que du nombre de boules dans l'urne A à l'instant $n$. L'espace d'états de cette chaîne est $E = \{0\,;\,1\,;\,2\}$.

- Si à l'instant $n$, l'urne A ne contient pas de boule, elle en contiendra une à l'instant $n + 1$.
- Si à l'instant $n$, l'urne A contient une boule, elle en contiendra soit aucune (avec une probabilité 0,5) soit deux (avec une probabilité 0,5) à l'instant $n + 1$.
- Si à l'instant $n$, l'urne A contient deux boules, elle en contiendra une à l'instant $n + 1$.

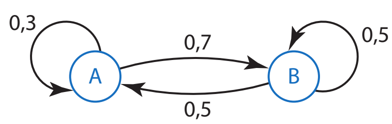
Ces probabilités ne dépendant pas de l'instant $n$, $(X_n)$ est une chaîne de Markov homogène.
La distribution initiale de cette chaîne est $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car l'urne A contient les deux boules au départ.
Les hypothèses se traduisent en termes de probabilités conditionnelles de la manière suivante :
$P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = 0$ pour tout $i \in \{0\,;\,1\,;\,2\}$ ; $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1$ ; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$ ; $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = 1$.

On en déduit que $(X_n)$ a pour matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La description des transitions précédente peut se résumer par le graphe ci-dessous :




② On considère le graphe probabiliste ci-contre.




On note $X_n$ la variable aléatoire correspondant au sommet du graphe à l'instant $n$.
Les sommets A et B sont les états de la chaîne de Markov $(X_n)$.
On considère la matrice de transition de $(X_n)$, dans l'ordre A, B.
Chaque arc correspond donc aux probabilités conditionnelles suivantes :
$Q(1, 1) = P_{(X_n=\mathrm{A})}(X_{n+1} = \mathrm{A}) = 0,3$ ; $Q(1, 2) = P_{(X_n=\mathrm{A})}(X_{n+1} = \mathrm{B}) = 0,7$ ; $Q(2, 1) = P_{(X_n=\mathrm{B})}(X_{n+1} = \mathrm{A}) = 0,5$

et $Q(2, 2) = P_{(X_n=\mathrm{B})}(X_{n+1} = \mathrm{B}) = 0,5$. Finalement, on obtient $Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

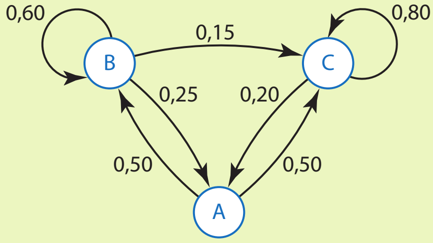
## Méthode 4 Manipuler un graphe et une matrice de transition

### Énoncé

**1. Donner, pour chacun des cas suivants, le graphe associé à la matrice de transition $Q$.**

**a) $Q$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov à deux états : $e_1 = A$ et $e_2 = B$. $Q = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}20 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.**

**b) $Q$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov à trois états : $e_1 = 0$, $e_2 = 1$ et $e_3 = 2$. $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.**

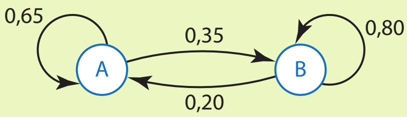



**2. Le graphe ci-dessus représente une chaîne de Markov. Préciser son espace d'états et donner sa matrice de transition.**

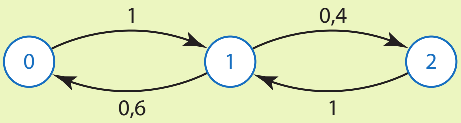
### Solution

**1.** Les sommets des graphes sont les états **1** et on construit les arêtes $\overrightarrow{e_i e_j}$ de poids $Q(i, j)$. **2**

**a)**




**b)**




**2.** Le graphe représente une chaîne de Markov à trois états : A, B et C.
Si l'on note Q la matrice de transition dans l'ordre A, B et C
on a alors : $Q(1, 1) = P_{(X_n = A)}(X_{n+1} = A) = 0$ ; **3**
$Q(1, 2) = P_{(X_n = A)}(X_{n+1} = B) = 0{,}50$ ; $Q(1, 3) = P_{(X_n = A)}(X_{n+1} = C) = 0{,}50$ ;
$Q(2, 1) = P_{(X_n = B)}(X_{n+1} = A) = 0{,}25$ ; $Q(2, 2) = P_{(X_n = B)}(X_{n+1} = B) = 0{,}60$ ;
$Q(2, 3) = P_{(X_n = B)}(X_{n+1} = C) = 0{,}15$ ; $Q(3, 1) = P_{(X_n = C)}(X_{n+1} = A) = 0{,}20$ ;
$Q(3, 2) = P_{(X_n = C)}(X_{n+1} = B) = 0$ ; $Q(3, 3) = P_{(X_n = C)}(X_{n+1} = C) = 0{,}80$.

D'où $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}6 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0 & 0{,}80 \end{pmatrix}$.

**Conseils & Méthodes**

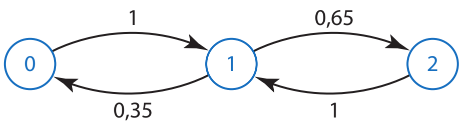
**1** La taille de la matrice nous indique le nombre de sommets du graphe.

**2** Lorsqu'une probabilité est nulle, il n'y a pas d'arête reliant les sommets.

**3** Les poids sur les arêtes du graphe correspondent aux probabilités conditionnelles.

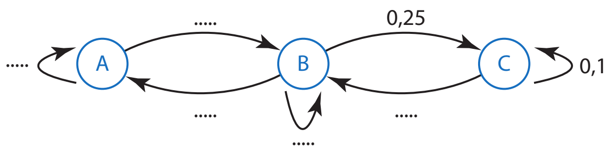
### À vous de jouer !

**10** Donner la matrice de transition associée à la chaîne de Markov dont les états sont 0, 1, 2 et dont le graphe est :




**11** On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ d'espace d'états {A ; B ; C} et dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.
Dresser le graphe associé à cette chaîne de Markov.

**12** Soit une chaîne de Markov pour laquelle sont donnés la matrice de transition $Q$ et le graphe ci-dessous, tous deux incomplets. Utiliser les informations présentes pour les compléter. $Q = \begin{pmatrix} ... & 0{,}4 & ... \\ ... & 0{,}2 & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$.




↪ Exercices 43 à 46 p. 221

Cours

# 5 Distribution de transition

## Propriété — Distribution de transition en $m$ étapes

**$(X_n)$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $Q$ et avec $E = \{e_i ; 1 \leqslant i \leqslant N\}$.**
**Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ en $m$ étapes est égale à la probabilité de passer de l'état $e_i$ à un état $e_k$ en une étape puis de passer de $e_k$ à $e_j$ en $m - 1$ étapes.**

**Pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $P_{(X_n = e_i)}(X_{n+m} = e_j) = \sum_{k=1}^{N} Q(i\,,k)P_{(X_n = e_k)}(X_{n+m-1} = e_j)$.**

### Démonstration

On montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ que la probabilité de passer de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ en $m$ étapes ne dépend que de $i$, $j$ et $m$.

**Initialisation** : si $m = 1$, c'est la définition d'une chaîne de Markov homogène.

**Hérédité** : supposons que pour $m \geqslant 1$, la propriété soit vraie.

D'après la formule de la probabilité totale, la probabilité de passer de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ en $m + 1$ étapes se décompose comme somme sur les différents états $e_k$ des termes $Q(i, k)$ multipliés par la probabilité de passer de l'état $e_k$ à l'état $e_j$ en $m$ étapes.

Ce dernier terme ne dépend par hypothèse de récurrence que de $k$, $j$ et $m$, on peut le noter $P_{(X_n = e_k)}(X_{n+m} = e_j)$.
On obtient la formule de récurrence.

**Conclusion :** la propriété est vraie au rang $m = 1$ et pour tout entier naturel non nul, elle est héréditaire.
Ainsi la propriété est vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

VIDÉO
Démonstration
Lienmini.fr/maths-e07-04

## Propriété — Distribution en $m$ étapes et matrice de transition

**Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous états $e_i$ et $e_j$, la probabilité $P_{(X_n = e_i)}(X_{n+m} = e_j)$ est le coefficient $(i\,,j)$ de la matrice $Q^m$.**

## Définition — Distribution

**On appelle distributions de la chaîne de Markov $(X_n)$ les matrices lignes donnant la loi des variables aléatoires $X_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note :**

$$\pi_n = \begin{pmatrix} P(X_n = e_1) & P(X_n = e_2) & \dots & P(X_n = e_N) \end{pmatrix}.$$

## Propriété — Calcul de distribution

**Les distributions de la chaîne de Markov $(X_n)$ vérifient la relation de récurrence $\pi_{n+1} = \pi_n Q$ pour tout entier naturel $n$, où $\pi_0$ est la distribution initiale.**
**On a alors $\pi_n = \pi_0 Q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

### Démonstration

La famille $\left((X_0 = e_i)\right)_{(1 \leqslant i \leqslant N)}$ forme une partition de l'univers.

Donc d'après la formule de la probabilité totale, on a :

$$P(X_n = e_j) = \sum_{i=1}^{N} P_{(X_0 = e_i)}(X_n = j)P(X_0 = e_i).$$

Le $j$-ième coefficient de $\pi_n$ est donc le $j$-ième coefficient du produit de $\pi_0$ avec la matrice $Q^n$ d'après la propriété précédente.

## Méthode 5 Construire une relation entre les distributions et déterminer une probabilité

### Énoncé

**On s'intéresse à la marche aléatoire d'un hamster dans un parcours constitué de trois boîtes numérotées reliées par des tubes.**

**Pour $k \in \mathbb{N}$, $X_k$ désigne le numéro de la boîte où se trouve le hamster à l'instant $k$.**
**D'un instant au suivant, le hamster se déplace d'une boîte à une autre de manière équiprobable.**
**À l'instant $k = 0$, il se trouve dans la boîte 1.**
**On note $\pi_k$ la matrice ligne $\left(P(X_k = 1) \quad P(X_k = 2) \quad P(X_k = 3)\right)$.**

**1.** **En utilisant la formule de la probabilité totale, exprimer $P(X_{k+1} = 1)$ en fonction de $P(X_k = i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.**

**2.** **En raisonnant de manière analogue pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$, expliciter une relation entre les distributions $\pi_{k+1}$ et $\pi_k$ pour tout entier naturel $k$ et l'écrire sous forme matricielle.**

**3.** **Dans quelle boîte le hamster a-t-il le plus de chance de se trouver à l'instant 3 ?**

### Solution

**1.** La famille $\left((X_k = 1) ; (X_k = 2) ; (X_k = 3)\right)$ forme un système complet d'événements. **1**
Ainsi, d'après la formule de la probabilité totale :
$P(X_{k+1} = 1) = 0{,}5P(X_k = 2) + 0{,}5P(X_k = 3)$.

**2.** De même : $P(X_{k+1} = 2) = 0{,}5P(X_k = 1) + 0{,}5P(X_k = 3)$ ;
$P(X_{k+1} = 3) = 0{,}5P(X_k = 1) + 0{,}5P(X_k = 2)$.

On obtient la relation $\pi_{k+1} = \pi_k Q$ où $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. **2**

**3.** Pour $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k = \pi_0 Q^k$. D'après l'énoncé, $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$. Avec la calculatrice, on obtient : $Q^3 = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}25 \end{pmatrix}$.

Donc : $\pi_3 = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}25 & 0{,}375 \\ 0{,}375 & 0{,}375 & 0{,}25 \end{pmatrix} = (0{,}25 \quad 0{,}375 \quad 0{,}375)$.

Finalement, le hamster a plus de chance de se trouver dans la boîte 2 ou la boîte 3 à l'instant $k = 3$.

#### Conseils & Méthodes

**1** Il faut identifier le système complet d'événements afin d'utiliser le théorème de la probabilité totale.

**2** Les trois égalités donnent une relation de récurrence sur les distributions que l'on peut écrire avec une matrice.

### À vous de jouer !

**13** On considère que $Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov a deux états A et B. Écrire la relation reliant les distributions de cette chaîne de Markov.

**14** On considère une chaîne de Markov de matrice de transition $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $Q^n$ pour tout entier naturel $n$ et donner alors les distributions de cette chaîne en fonction de $n$ et de la distribution initiale.

**15** Un fumeur décide un jour 0 d'arrêter de fumer. Au jour $n \in \mathbb{N}$, s'il ne fume pas, alors le jour suivant, il fumera avec une probabilité de 0,2 ; s'il fume, il fumera le jour suivant avec une probabilité de 0,75. En justifiant la modélisation par une chaîne de Markov, déterminer la probabilité $p_2$ que le fumeur ne fume pas au jour 2.

**16** On considère que $Q = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition d'une chaîne de Markov à deux états A et B. Déterminer la probabilité qu'au bout de trois étapes, on passe de l'état A à l'état B.

↪ Exercices 47 à 49 p. 222

# Cours

## 6 Distribution invariante

**Définition** Vecteur invariant

Soit $M$ une matrice stochastique d'ordre $N$.

La matrice ligne $X$ de dimension $1 \times N$ est un **vecteur invariant** de $M$ si elle vérifie la relation : $XM = X$.

**Proposition** Vecteur invariant non trivial

Si $M - I_N$ est **inversible**, alors $M$ n'admet par d'autre vecteur invariant que $\mathbf{0}_{1,N}$.

**Définition** Distribution invariante

Soit une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ de matrice de transition $Q$.

$\pi_I$ est une **distribution invariante** pour cette chaîne si la matrice ligne associée est un vecteur invariant de $Q$, autrement dit si $\pi_I Q = \pi_I$.

**Remarque** Une distribution étant non nulle, $\pi_I$ n'existe pas si $Q - I_n$ est inversible.

**Théorème** Existence et unicité de la distribution invariante (admis)

Soit une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ dont l'ensemble d'états $E = \{e_i\,;\, 1 \leqslant i \leqslant N\}$ est fini.

Si sa matrice de transition $Q$ ne possède aucun coefficient non nul, à l'exception des coefficients de sa diagonale principale, alors $(X_n)$ admet une **unique distribution invariante.**

**Exemple**

Si $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $(X_n)$ admet une distribution invariante, il s'agit de $\pi_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

**Proposition** Convergence des distributions

Soit une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ et soit $(\pi_n)$ la suite de ses distributions.

Si $(\pi_n)$ est convergente alors elle converge vers une **distribution invariante** $\pi_I$.

**Théorème** Convergence des chaînes de Markov à deux états

Si une chaîne de Markov homogène $(X_n)$ à deux états admet une unique distribution invariante $\pi_I$, alors, quel que soit l'état initial, la suite des distributions $(\pi_n)$ **converge vers** $\pi_I$.

**Démonstration**

Soit $Q = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$ la matrice de transition de $(X_n)$ avec $p$ et $q$ dans $]0\,;1[$. On pose, pour deux réels $x$ et $y$ avec $x + y = 1$, $\pi = (x \quad y)$. L'équation $\pi = \pi Q$ admet une unique solution $\pi_I = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

On considère les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ avec $a_n + b_n = 1$ telles que, pour tout entier naturel, $\pi_n = (a_n \ \ b_n)$.
De la relation $\pi_{n+1} = \pi_n Q$, on tire pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n(1 - p - q) + q$. La suite $(a_n)$ est donc arithmético-géométrique. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - \frac{q}{p+q}$. La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $(1 - p - q)$.

Or $0 < p + q < 2$ d'où $(1 - p - q) \in ]-1\,;1[$. Ainsi $(u_n)$ converge vers 0 et $(a_n)$ converge vers $\frac{q}{p+q}$.

Finalement, $(b_n)$ converge vers $\frac{p}{p+q}$. La suite des distribution converge alors vers $\pi_I = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.

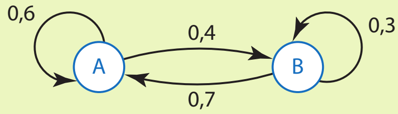
## Méthode 6 Déterminer une distribution invariante

**Énoncé**

**1.** **Soit une chaîne de Markov admettant $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ pour matrice de transition.**

**Vérifier que $A = (0{,}2 \quad 0{,}8)$ est une distribution invariante pour cette chaîne et montrer qu'elle est unique.**

**2.** **On considère une chaîne de Markov $(X_n)$ associé au graphe ci-contre et de distribution initiale $\pi_0 = (0{,}5 \quad 0{,}5)$.**




**a) Déterminer la matrice de transition $M$ associée à $(X_n)$.**

**b) Calculer $\pi_5$ et $\pi_{10}$. Que peut-on conjecturer ?**

**c) Montrer que $(X_n)$ admet une distribution invariante $\pi_I$ et déterminer sa valeur.**

**Solution**

**1.** Tout d'abord, $0{,}2 + 0{,}8 = 1$ donc $A$ est bien une distribution.

De plus $AM = (0{,}2 \quad 0{,}8)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = (0{,}2 \quad 0{,}8) = A$.

Donc $A$ est bien une distribution invariante pour cette chaîne

Soit $B = (p \quad 1-p)$ une distribution invariante pour la chaîne **1**.
Alors $BM = B$.

Or $BM = (p \quad 1-p)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \big(0{,}6p + 0{,}1(1-p) \quad 0{,}4p + 0{,}9(1-p)\big)$.

$= (0{,}5p + 0{,}1 \quad 0{,}9 - 0{,}5p)$

Donc $BM = B \Leftrightarrow (0{,}5p + 0{,}1 \quad 0{,}9 - 0{,}5p) = (p \quad 1-p) \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5p + 0{,}1 = p \\ 0{,}9 - 0{,}5p = 1 - p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}5p = -0{,}1 \\ 0{,}5p = 0{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow p = \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$.

Donc $B = (0{,}2 \quad 1 - 0{,}2) = (0{,}2 \quad 0{,}8) = A$, il s'agit donc de l'unique distribution invariante.

**2. a)** La matrice de transition associée à $(X_n)$ est $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. **3**

**b)** À la calculatrice, $\pi_5 = \pi_0 M^5 \approx (0{,}6364 \quad 0{,}3636)$ et $\pi_{10} = \pi_0 M^{10} \approx (0{,}6364 \quad 0{,}3636) \approx \pi_5$. On peut donc conjecturer que la suite $(\pi_n)$ converge vers une distribution invariante pour $(X_n)$.

**c)** Les coefficients hors de la diagonale principale de $M$ sont non nuls, donc $(X_n)$ admet une distribution invariante.

Soit $\pi_I = (x \quad y)$ une telle distribution, alors on a les relations suivantes :

- $\pi_I M = \pi_I \Leftrightarrow (x \quad y)\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix} = (x \quad y) \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6x + 0{,}7y = x \\ 0{,}4x + 0{,}3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}4x + 0{,}7y = 0 \\ 0{,}4x - 0{,}7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}4x = 0{,}7y$

- $x + y = 1$ car $\pi_I$ est une distribution. **2**

On résout : $\begin{cases} 0{,}4x = 0{,}7y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4}y \\ \dfrac{7}{4}y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4}y \\ \dfrac{13}{4}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \times \dfrac{4}{13} = \dfrac{7}{13} \\ y = \dfrac{4}{13} \end{cases}$. Donc $\pi_I = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{13} & \dfrac{4}{13} \end{pmatrix}$.

**Conseils & Méthodes**

**1** Ne pas oublier cette relation issue de la définition d'une distribution !

**2** Montrer l'unicité de $A$, c'est montrer que toute distribution vérifiant l'invariance vaut *a fortiori* $A$.

**3** Le graphe a deux sommets, sa matrice sera une matrice $2 \times 2$.

**À vous de jouer !**

**17** Déterminer l'unique distribution invariante de la chaîne de Markov admettant $Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ pour matrice de transition.

**18** Soit une chaîne de Markov admettant $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour matrice de transition. Vérifier que $A = (0{,}6 \quad 0{,}4)$ est une distribution invariante pour cette chaîne et montrer qu'elle est unique.

➜ Exercices 50 à 56 p. 222

# Exercices résolus

EXOS Méthodes Lienmini.fr/maths-e07-03 — Les rendez-vous Sésamath

## Méthode 7 Déterminer la loi d'une chaîne de Markov

Cours 2 p. 206, 3 p. 208 et 5 p. 212

**Énoncé**

**Un mini réseau Internet comprend trois pages web : 1, 2 et 3. Un individu navigue de manière aléatoire sur ce réseau. À chaque clic, il choisit de façon équiprobable un des liens présents sur la page. Après $n$ clics, on note $X_n$ la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur.**

**1. Justifier que $(X_n)$ forme une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition $Q$.**

**2. a) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Vérifier par le calcul que $P^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.**

**b) Calculer le produit $M = P^{-1}QP$ et donner l'expression de $Q^n$ en fonction de $n$, $P$ et $M$.**

**c) On admet que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0{,}5)^n & n(-0{,}5)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-0{,}5)^n \end{pmatrix}$. En déduire la distribution $\pi_3$.**

**Solution**

**1.** La position de l'individu sur le réseau Internet dans le futur ne dépend que de sa position à l'instant présent. Pour tout entier naturel, l'ensemble image de la variable aléatoire $X_n$ est $\{1 ; 2 ; 3\}$. La suite $(X_n)$ forme donc une chaîne de Markov dont l'ensemble d'états est $E = \{1 ; 2 ; 3\}$. La chaîne est homogène car les probabilités ne dépendent pas de l'instant $n$.

On peut alors donner sa matrice de transition : pour $i, j \in \{1 ; 2 ; 3\}$, avec $i \neq j$, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = 0$ et $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0{,}5$.

D'où : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$.

**Conseils & Méthodes**

1 Vérifier que $P^{-1}P = I_3$ et $PP^{-1} = I_3$.

**2. a)** On vérifie que : $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et 1 $\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**b)** Par multiplication matricielle, on obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ $M$ est telle que $M = P^{-1}QP$.

Ainsi, $Q = PMP^{-1}$ d'où, pour tout entier naturel $n$, $Q^n = PMP^{-1}\,PMP^{-1} \ldots PMP^{-1} = PM^nP^{-1}$.

**c)** On a $\pi_3 = \pi_0 Q^3$ avec $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $Q^3 = PM^3P^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 0 & 11{,}25 & 6{,}75 \\ 2{,}25 & 9 & 6{,}75 \\ 9 & 4{,}5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$. D'où : $\pi_3 = \dfrac{1}{18}(3{,}75 \quad 8{,}25 \quad 6)$.

**À vous de jouer !**

**19** Une chaîne de Markov à deux états A, B admet la matrice de transition suivante : $Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**1.** Calculer l'inverse de $P$. Vérifier que $Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a-1 \end{pmatrix}P^{-1}$.

**2.** Déterminer alors $Q^n$. En déduire l'expression des distributions pour tout entier naturel.

**20** Soit une chaîne de Markov dont la matrice de transition est donnée par $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Si l'on considère l'état initial $\pi_0 = (0{,}2 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$, déterminer la distribution $\pi_{20}$.

Exercices 59 à 67 p. 223

## Méthode 8 Étudier le comportement d'une chaîne de Markov

Cours 2 p. 206, 3 p. 208, 5 p. 212 et 6 p. 214

### Énoncé

**Un robot aspirateur doit nettoyer la surface d'un appartement de trois pièces alignées. À l'instant 0, le robot se trouve dans la pièce 0 ; à l'instant *n*, il se déplace au hasard dans l'une des pièces communicantes de manière équiprobable. On désigne par $X_n$ la variable aléatoire donnant le numéro de la pièce à l'instant *n*.**

**1. Justifier que $(X_n)$ forme une chaîne de Markov dont on précisera le nombre d'états.**

**2. Donner sa matrice de transition *Q*.**

**3. Calculer la probabilité qu'à l'instant $n = 2$, le robot travaille dans la pièce 2.**

**4. Justifier l'existence d'une distribution invariante pour la chaîne $(X_n)$, on la notera $\pi = (x \quad y \quad z)$, et la déterminer.**

### Solution

**1.** Pour tout entier *n*, l'ensemble image de $X_n$ est $\{0 ; 1 ; 2\}$, chaque numéro étant attribué à l'une des pièces, de gauche à droite par exemple. La position du robot dans le futur ne dépend que de sa position précédente. La suite $(X_n)$ forme donc une chaîne de Markov. Précisons qu'il s'agit d'une chaîne homogène, les probabilités ne dépendant pas de l'instant *n*.

**2.** On donne les probabilités conditionnelles : soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $i, j \in \{0 ; 1 ; 2\}$,

avec $i \neq j$, $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = 0$ et $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = 0,5$. D'où $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_n$ la distribution en deux étapes de la chaine de Markov. Ces distributions sont définies par la relation de récurrence : $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ et $\pi_{n+1} = \pi_n Q$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On a la formule $\pi_n = \pi_0 Q^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ ; d'où $\pi_2 = (1 \quad 0 \quad 0)Q^2$. On calcule $Q^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Finalement, $\pi_2 = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = (0,5 \quad 0,25 \quad 0,25)$. La probabilité qu'à l'instant $n = 2$, le robot travaille dans la pièce 2 est donnée par le troisième coefficient de la matrice ligne $\pi_2$, soit 0,25.

**4.** À l'exception de sa diagonale principale, la matrice de transition Q ne possède aucun coefficient non nul. **1**
Ainsi, la chaîne de Markov admet une distribution invariante. Si l'on note $\pi = (x \quad y \quad z)$ une telle distribution, alors

$\pi = \pi Q \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ Rajoutons de plus la condition propre aux distributions de $x + y + z = 1$, **2** nous obtenons, après injection de cette dernière dans les différentes lignes : $\begin{cases} 3x - 1 = 0 \\ 3y - 1 = 0 \\ 3z - 1 = 0 \end{cases}$. Finalement, on peut écrire $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

### Conseils & Méthodes

**1** On vérifie si la matrice contient des 0 hors de sa diagonale principale pour appliquer la propriété du cours.

**2** Ne pas oublier que la matrice ligne est une distribution ; il y a quatre équations pour trois inconnues.

## À vous de jouer !

**21** Deux lycées P et V se partagent les élèves d'une agglomération. Année après année, la population évolue selon une chaîne de Markov de matrice de transition, dans l'ordre des états P, V : $Q = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Que peut-on dire de l'évolution de la population dans ces deux lycées après un certain nombre d'années ?

**22** A. A. Markov analysa la succession des voyelles et des consonnes dans les 20 000 lettres de l'œuvre de Pushkin, *Eugene Onekin*. Il établit que la probabilité qu'une voyelle suive une voyelle est de 0,13 et que celle d'une voyelle suivant une consonne est de 0,66.
Quelle répartition des voyelles et des consonnes peut-on établir pour l'ouvrage en entier ?

Exercices 68 à 74 p. 225

# Exercices apprendre à démontrer

**VIDÉO** Démonstration lienmini.fr/maths-e07-04

ØLJEN Les maths en finesse

## La propriété à démontrer — Distribution de transition en *m* étapes

**$(X_n)$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $Q$ et avec $E = \{e_i\,;\, 1 \leqslant i \leqslant N\}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La probabilité que la chaîne de Markov passe de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ en $m$ étapes est égale à la probabilité de passer de l'état $e_i$ à un état $e_k$ en une étape puis de passer de $e_k$ à $e_j$ en $m - 1$ étapes.**

**Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{(X_n=e_i)}(X_{n+m} = e_j) = \sum\limits_{k=1}^{N} Q(i,k) P_{(X_n=e_k)}(X_{n+m-1} = e_j)$.**

On utilise un raisonnement par récurrence portant sur le nombre de transitions.

## Comprendre avant de rédiger

La propriété contient deux éléments : la probabilité $P_{(X_n=e_i)}(X_{n+m} = e_j)$ ne dépend pas de $n$ et une formule de calcul.

## Rédiger

**Étape 1**
$m \in \mathbb{N}^*$ donc l'initialisation se fait pour $m = 1$.

**Étape 2**
On utilise la formule de la probabilité totale.

Expliciter le système complet d'événements

**Étape 3**
Par définition de la matrice de transition, le terme $Q(i, k)$ correspond à la probabilité de passer de l'état $e_i$ à l'état $e_k$ en une étape ; soit donc

$$Q(i,k) = P_{(X_n=e_i)}(X_{n+1} = e_k)$$

**Étape 4**
L'hypothèse de récurrence affirme que la probabilité de passer d'un état à un état suivant en $m$ étapes ne dépend pas de $n$.

**Étape 5**
On peut alors conclure, les deux points à démontrer étant héréditaires pour tout entier naturel non nul.

### La démonstration rédigée

**Initialisation :** si $m = 1$ la probabilité de passer de l'état $e_i$ à l'état $e_j$ en une étape ne dépend pas de $n$ par définition d'une chaine de Markov homogène.

**Hérédité :** supposons qu'il existe $m \geqslant 1$ telle que la propriété soit vraie pour $m$ transitions.

La famille $\big((X_{n+1} = e_k)\big)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ forme un système complet d'événements.

Ainsi, d'après la formule de la probabilité totale, on a

$$\begin{aligned} P_{(X_n=e_i)}(X_{n+m+1} = e_j) &= \sum_{k=1}^{N} P_{(X_n=e_i)}\big((X_{n+m+1} = e_j) \cap (X_{n+1} = e_k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P_{(X_n=e_i)}(X_{n+1} = e_k) P_{(X_{n+1}=e_k)}(X_{n+m+1} = e_j) \end{aligned}$$

Finalement $P_{(X_n=e_i)}(X_{n+1+m} = e_j) = \sum\limits_{k=1}^{N} Q(i\,,k) P_{(X_{n+1}=e_k)}(X_{n+1+m} = e_j)$.

Par hypothèse de récurrence $P_{(X_{n+1}=e_k)}(X_{n+1+m} = e_j)$ ne dépend que de $k$, $j$ et $m$, et ainsi :

$P_{(X_{n+1}=e_k)}(X_{(n+1)+m} = e_j) = P_{(X_n=e_k)}(X_{n+m} = e_j)$.

D'où $P_{(X_n=e_i)}(X_{n+m+1} = e_j) = \sum\limits_{k=1}^{N} Q(i,k) P_{(X_n=e_k)}(X_{n+m} = e_j)$.

Aucun des termes de la somme ne dépend de $n$, la propriété est donc vraie au rang $m + 1$.

**Conclusion :** la propriété est vraie au premier rang $m = 1$ et héréditaire pour tous les rangs suivants. Ainsi, la propriété est vraie quel que soit le nombre $m$ de transitions considérées.

## Pour s'entraîner

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous états $e_i$, $e_j$, la probabilité $P_{(X_n=e)}(X_{n+m} = e_j)$ est le cœfficient $(i\,,j)$ de la matrice $Q^m$.