DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-e06-05

Exercices calculs et automatismes

27 Calcul matriciel

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
a) Si A a pour dimension 1×3 alors A est une matrice colonne.	☐	☐
b) L'opération $A + B$ n'est possible que si les matrices ont la même dimension.	☐	☐
c) L'opération AB n'est possible que si les matrices ont la même dimension.	☐	☐
d) L'opération AB n'est possible que si A a autant de lignes que B a de colonnes.	☐	☐

28 Somme de matrices

Effectuer les opérations suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{3} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{4} & 4 \\ -1 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

29 Produit de matrices

Effectuer les opérations suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

30 Puissance de matrices

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. A^2 est égale à :

a $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

2. A^3 est égale à :

a $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 27 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} -31 & 48 \\ -24 & 17 \end{pmatrix}$ **c** $\begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$

31 Inverse de matrices

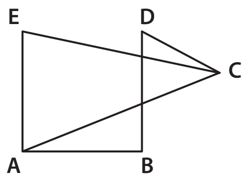
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible.	☐	☐
b) $B = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.	☐	☐

32 Matrice d'adjacence

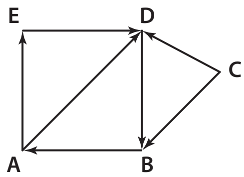
Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est égale à :



a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est égale à :



a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

33 Parcours dans un graphe

Soit un graphe à trois états A, B et C dont la matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (dans l'ordre alphabétique).

Méthode Comment faire pour déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant B à C ?

Exercices d'application

Représenter une matrice

Méthode 1 p. 167

34 Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1 & 2\\ 10 & 3 & -7 & 0\end{pmatrix}$.

1. Préciser la dimension de A.
2. Donner la valeur des coefficients a_{11}, a_{21} et a_{13} de la matrice A.

35 Soit la matrice $B=(b_{ij})$ avec $b_{ij}=(i-2j)$ à trois lignes et quatre colonnes.
1. Préciser la dimension de B.
2. Donner la valeur des coefficients b_{33} et b_{23}.
3. Représenter B sous la forme d'un tableau de nombres.
4. Écrire B^t sous la forme d'un tableau de nombres.

36 Pour chacun des cas suivants, écrire la matrice $A=(a_{ij})$ de dimension $n\times p$ correspondante.

a) $n=3$ et $p=2$; $a_{ij}=i+2j$

b) $n=2$ et $p=2$; $a_{ij}=\dfrac{i}{i}$

c) $n=3$ et $p=3$; $a_{ij}=\dfrac{j}{i}$

d) $n=4$ et $p=5$; $a_{ij}=2i-2j$

37 Soit les matrices $A=\begin{pmatrix}1-x & 2+y & 3\\ 0 & 4 & 3z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3\\ 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$.
Déterminer les réels x, y et z tels que $A=B$.

38 Soit les matrices $C=\begin{pmatrix}x & y & 1\\ y-2 & 2x+1 & 3\\ 0 & x+y & 5\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}2x+3 & 3y-2 & 1\\ -1 & x-2 & 3\\ 0 & x & 5\end{pmatrix}$.
Peut-on avoir $C=D$?

Calculer une somme ou un produit de matrices

Méthode 2 p. 169

39 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.
Effectuer les calculs suivants.
a) $A+B$
b) $2A-B$
c) $-\dfrac{1}{2}A+\dfrac{2}{3}B$

40 Déterminer si les calculs suivants sont possibles et donner le résultat le cas échéant.

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -5\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 6\\ 5 & -1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -5\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 6 & -1\end{pmatrix}$

41 On considère les matrices suivantes.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -1 & 4\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$

Déterminer quels sont les produits possibles entre ces matrices et les effectuer.

42 Effectuer les calculs suivants à la main et contrôler les résultats à la calculatrice.

a) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 5\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -4\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-2 & 5 & 8\\ 4 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 3 & 4 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\\ 10 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 5 & -4 & -1\\ -3 & 1 & 23\end{pmatrix}$

Calculer la puissance de matrices

Méthode 3 p. 169

43 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 8 & -2\end{pmatrix}$. Effectuer les calculs suivants.
a) AB **b)** A^2 **c)** A^5 **d)** B^2 **e)** B^5

44 Déterminer les matrices $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :
a) $A^2=A$
b) $A^2=I_2$
c) $AB=BA$ où $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

45 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Effectuer les calculs suivants.

a) $A+B$ **b)** A^2 **c)** B^2 **d)** AB **e)** BA.

46 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, B^2 et B^3. Que remarque-t-on ?
2. Que peut-on conjecturer pour les puissances de ces deux matrices ?

47 On considère les matrices $U=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et $V=I_3-V$.

Effectuer les calculs suivants.

a) U^2 **b)** V^2 **c)** UV **d)** VU.

Calculer et appliquer l'inverse d'une matrice

Méthode 4 et Méthode 5 p. 171

48 Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A=\begin{pmatrix}4 & 10\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ **d)** $A=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 4\\ 0{,}25 & 2\end{pmatrix}$

49 Calculer :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Que peut-on en déduire sur ces deux matrices ?

50 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe une matrice $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ telle que $AB=I_2$.

1. Effectuer le calcul AB.
2. Que peut-on en déduire quant à l'existence de B ?
3. La matrice A est-elle inversible ?

51 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs matrices inverses.

$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

52 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

1. Effectuer les calculs AB et AC.
2. Pourquoi peut-on en déduire que la matrice A n'est pas inversible ?

53 On considère la matrice $N=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N. N est-elle inversible ?

54 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Calculer $6A-A^2$. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inversible.

55 Soit $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 7\end{pmatrix}$. Calculer $12A-A^2$.

En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inversible.

56 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2=2I_3-A$ et en déduire que A est inversible. Donner alors A^{-1}.

57 On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Calculer A^2-2I_3-3A et en déduire que A est inversible. Donner alors A^{-1}.

58 À l'aide de la calculatrice, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Exercices d'application

Résoudre un système d'équations

Méthode 6 p. 173

59 Traduire les systèmes ci-dessous sous forme matricielle.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-3y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+1=3 \\ 3x-6y-z+2=2 \\ 3z+4-x+2y=1 \end{cases}$

60 Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel.

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ z-x-y=-9 \\ 2y-x-z=12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x-5y-2z=2 \\ z-x+4y=-1 \end{cases}$

61 Dans chaque cas, déterminer une matrice X de dimension 2×1 telle que $AX+B=X$.

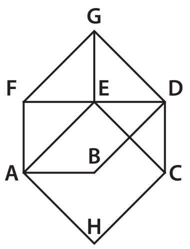
a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ **b)** $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$

Déterminer les caractéristiques d'un graphe

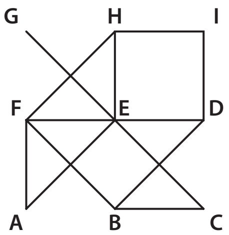
Méthode 7 p. 175

62 Pour chaque graphe, indiquer son ordre, dresser le tableau des degrés de chaque sommet et en déduire par un calcul le nombre d'arêtes ou d'arcs du graphe.

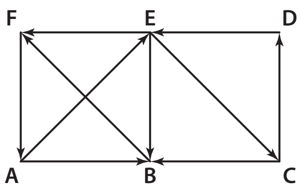
a)



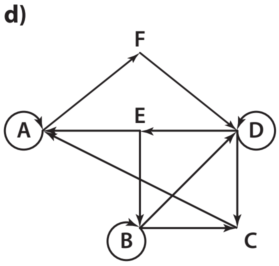
b)



c)



d)



63 Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe d'ordre n non orienté ?

64 Construire lorsque c'est possible un graphe non orienté à cinq sommets de degrés :

a) 3 ;2 ;1 ;3 ;1 **b)** 3 ;2 ;2 ;3 ;1 **c)** 2 ;1 ;3 ;3 ;1.

65 Dans la Bretagne médiévale, trois clans s'affrontent dans un tournoi. Chaque clan envoie deux champions. Chaque guerrier doit affronter tous les guerriers des clans adverses. Construire un graphe modélisant les combats des six guerriers.

66 On donne sept noms de mathématiciens : J.L. Lagrange ; G. Cramer ; C. Jordan ; E. Galois ; C.F. Gauss ; A. Cayley et G.W. Leibniz. Faire une recherche et construire deux graphes permettant de modéliser les relations suivantes entre les sommets :

a) « est de la même époque que » ;

b) « a travaillé dans le même domaine que ».

67 *Rwanou* est un site de rencontre qui prend en compte quatre critères : aimer les mathématiques ; être sportif ; être sociable et aimer la montagne. Les personnes A, B, C, D et E sont inscrites sur ce site.

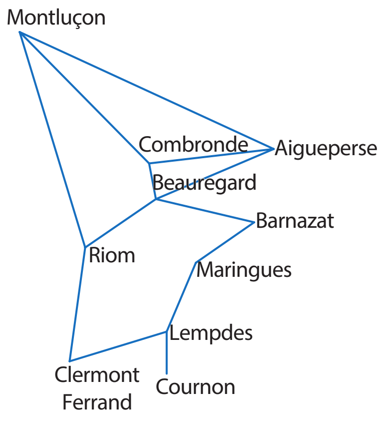
Leurs profils sont inscrits dans le tableau suivant.

	Aime la montagne	Aime les mathématiques	Aime le sport	Est sociable
A	oui	non	oui	non
B	non	non	oui	oui
C	non	oui	non	non
D	oui	non	oui	oui
E	oui	oui	oui	non

On dira que deux personnes sont compatibles si elles ont au moins deux affinités en commun.

Construire un graphe modélisant les compatibilités possibles entre les inscrits.

68 Le graphe ci-dessous modélise certaines routes d'un secteur en Auvergne.



Donner : l'ordre de ce graphe ; le nombre d'arêtes ; le degré des sommets Clermont Ferrand, Montluçon et Beauregard ; deux sommets non adjacents.

69 Un berger veut faire traverser une rivière à sa poule, son chien et un renard. La barque est trop petite pour qu'il transporte les trois animaux en même temps, il ne peut en faire passer que deux à la fois.

Le renard et la poule ne peuvent pas rester seuls sur une rive et le chien et le renard non plus.

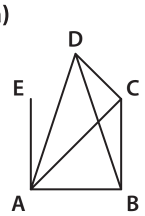
Comment fera le berger pour les faire tous traverser ? On pourra utiliser un graphe.

Déterminer et utiliser une matrice d'adjacence

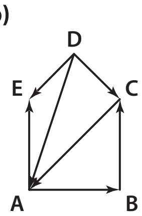
Méthode 8 p. 177

70 Déterminer la matrice d'adjacence associée à chaque graphe.

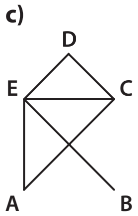
a)



b)



c)



71 Tracer le graphe non orienté associé à chaque matrice d'adjacence suivante.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

72 Tracer un graphe orienté et, si possible, un graphe non orienté dont la matrice d'adjacence serait M.

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

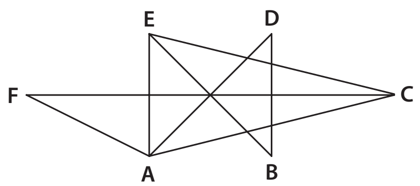
c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

73 La matrice d'adjacence d'un graphe G est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

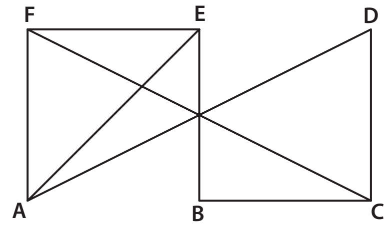
Construire un graphe G possible. Quel est l'ordre de G ? Calculer la somme des degrés des sommets du graphe. Quel est le nombre de ses arêtes ?

74 On considère le graphe non orienté suivant.



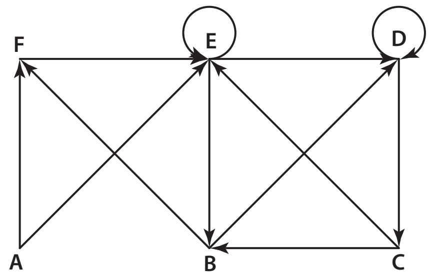
1. Donner la matrice d'adjacence M associée à ce graphe.
2. a) Calculer M^4.
b) En déduire le nombre de chemins de longueur 4 reliant A à C.

75 On considère le graphe suivant.



1. Donner une chaîne de longueur 4 reliant A à F.
2. Donner M la matrice d'adjacence de ce graphe.
3. a) À l'aide de la calculatrice, calculer M^5.
b) En déduire le nombre de chaîne de longueur 5 reliant B à F.

76 On considère le graphe suivant.



1. Donner un chemin de longueur 5 reliant A à E.
2. Donner M la matrice d'adjacence de ce graphe.
3. À l'aide de la calculatrice, calculer M^{10}.

77 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Construire les graphes associés aux deux matrices. Préciser s'il s'agit d'un graphe orienté ou non.
2. Calculer A^2 et B^2. En déduire pour chacun des graphes, le nombre de chaînes ou de chemins de longueur 2 reliant les sommets 2 et 4, ou allant du sommet 2 vers 4 dans le cas d'un graphe orienté.

78 La matrice d'adjacence d'un graphe G est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'ordre de G ?
2. Calculer la somme des degrés des sommets du graphe.
3. Quel est le nombre de ses arêtes ?

Exercices d'entraînement

Notion de matrice

79 Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ 2x+3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle valeur de x la matrice X est-elle égale à sa transposée ?

80 Pour chacun des cas suivants, écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ correspondante.

a) $n = 1$ et $p = 6$; $a_{ij} = i + j$

b) $n = 5$ et $p = 5$; $a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i > j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

c) $n = 3$ et $p = 2$; $a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } j \text{ est pair} \\ j \text{ sinon} \end{cases}$

d) $n = 10$ et $p = 10$; $a_{ij} = i - j$

e) $n = 5$ et $p = 5$; $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

81 Pour chacune des matrices $A = (a_{ij})$ suivantes, exprimer a_{ij} en fonction de i et j.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

82 Démo

On appelle matrice symétrique une matrice égale à sa matrice transposée.

Vérifier que la somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique et que le produit d'une matrice symétrique par un nombre réel est encore une matrice symétrique.

Opérations sur les matrices

83 **1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AB et BA.

b) Quelles remarques peut-on faire ?

2. Soit $C = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -19 & 40 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$

a) Calculer CD et DC

b) La remarque précédente est-elle une généralité ?

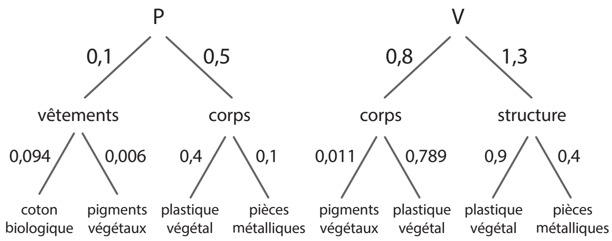
84 Démo

Démontrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale, avec des cœfficients tous égaux, commute pour le produit avec toutes les autres matrices.

85 Pour la production de leurs nouveaux jouets, une poupée (P) et un vaisseau spatial (V), une usine se lance dans l'étude de ses besoins en composants pour satisfaire ses prévisions commerciales. Celles-ci sont données, en unités, dans le tableau suivant.

	P	V
Octobre	100	150
Novembre	150	100
Décembre	200	250

Les besoins en matières premières sont présentés dans l'arbre suivant :



Chaque niveau de l'arbre représente les sous-matières premières nécessaires pour le niveau supérieur ; les nombres sur les branches désigne les quantités (en kg) d'un niveau nécessaires à la conception du niveau supérieur.

On note N_0 la matrice dont les lignes sont les jouets et les colonnes les matières de niveau 1. On note de même N_1 la matrice dont les lignes sont les matières de niveau 1 et les colonnes celles de niveau 2 ; les coefficients de ces deux matrices sont les quantités nécessaire à la conception.

1. a) Donner les matrices N_0 et N_1.

b) On appelle matrice cumulée, notée N_c, le produit des deux matrices précédentes. Quel est le seul produit possible à réaliser ? Déterminer alors N_c.

2. a) Écrire le tableau des prévisions commerciales comme une matrice à trois lignes et deux colonnes, notée P_c.

b) Le calcul des besoins bruts du deuxième niveau s'effectue comme matrice du produit entre N_c et P_c. Quel est le seul produit possible ?

3. Déterminer alors la quantité de coton biologique pour la production du mois de décembre ainsi que la quantité de plastique pour le mois de novembre.

86 Soit a un réel non nul. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre 2 qui commutent avec A pour le produit.

87 Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

88 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, à quelle condition sur A a-t-on une unique solution au système $AX = Y$?
2. Résoudre « à la main » le système introduit en exprimant X en fonction de Y.
3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

89 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$. En déduire que A est inversible.

90 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
2. Développer le produit $(I_3 + J)(I_3 - J + J^2)$.
3. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de J et I_3.

91 Soit $A = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$

92 On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec a un réel.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

93 **Démo** On considère, pour a, b, c des nombres réels, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $a \neq b$. Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & c\dfrac{a^n - b^n}{a - b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.
2. Si $a = b$, Calculer A^2, A^3 et conjecturer une expression de A^n.
Démontrer cette conjecture.

94 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse par la formule du cours. Retrouver le résultat en résolvant un système.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D et dont on donnera une expression.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Déduire des questions précédentes une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

95 On considère les matrices $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner P^{-1} et calculer $D = P^{-1}AP$.
2. Déterminer pour tout entier naturel n la matrice D^n. On pourra émettre une conjecture sur son expression puis la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

96 On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $a + d = -1$ et $ad + bc = -2$.
On pose alors $\text{E} = \{\lambda A + \mu I_2 \,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
1. Démontrer que la somme de deux matrices de l'ensemble E est une matrice de E.
2. Vérifier que $A^2 = -A + 2I_2$. En déduire que A^{-1} appartient à E.
3. Démontrer que le produit de deux matrices de E est une matrice de E.

97 On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Effectuer le produit PA.
b) Que remarquer sur les lignes de PA par rapport à celles de A ?
2. En posant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, généraliser la remarque précédente. On dit que la matrice P est une matrice de permutation.
3. La matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle une matrice de permutation ? Quelles lignes permute-t-elle ?
4. Écrire une matrice qui permute toutes les lignes d'une matrice.

98 On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2.

2. On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ ;\ MJ = JM\}$.

a) Montrer que $M \in E$ si, et seulement si, M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

b) En déduire que $E = \{aI_3 + bJ + cJ^2\ ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Suites de matrices

Méthode 9 p. 178

99 On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - 3b_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

et $\begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = a_n + 5b_n \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Soit (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geqslant 0$.

1. Déterminer une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2. Calculer U_1 et U_2. En déduire les valeurs de a_1, a_2, b_1 et b_2.

100 On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer U_n en fonction de U_0, A et n.

2. a) Calculer A^2 et A^3.

b) En déduire les valeurs de U_1, U_2 et U_3.

101 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

On définit la suite de matrices colonnes (U_n) par la relation $U_{n+1} = AU_n + B$, pour tout entier naturel n et par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice colonne C telle que $C = AC + B$.

2. On pose pour tout entier n, $V_n = U_n - C$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

b) En déduire par un raisonnement par récurrence que $V_n = A^n V_0$, pour tout entier n.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{0{,}4^n}{3} + 2 \times \dfrac{0{,}1^n}{3} & \dfrac{0{,}4^n}{3} - \dfrac{0{,}1^n}{3} \\ 2 \times \dfrac{0{,}4^n}{3} - 2 \times \dfrac{0{,}1^n}{3} & 2 \times \dfrac{0{,}4^n}{3} + \dfrac{0{,}1^n}{3} \end{pmatrix}.$$

4. En déduire la valeur de U_n en fonction de n.

Transformations géométriques

Méthode 10 p. 179

102 Pour chaque cas, déterminer l'opération matricielle associée à la transformation et calculer les coordonnées de l'image demandée.

a) A′ l'image de A(3 ; 7) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) B′ l'image de $B\left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{2}{6}\right)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) C′ l'image de $C(1 ; \sqrt{3})$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

d) D′ l'image de $D\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} ; \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ par rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$

103 Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, soit deux points A(1 ; 1), B(2 ; 1). Déterminer les coordonnées des points A′ et B′, image de A et B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{5}$ (arrondir au centième près).

104 Déterminer dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'image du vecteur $\vec{u}(3 ; 2)$ par la rotation de centre l'origine du repère et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

105 $D(-4\sqrt{3} ; -2)$ est l'image de $A(\sqrt{3} ; 7)$ par une rotation de centre O. Quel est l'angle de rotation ?

106 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On identifiera chaque vecteur du plan $\vec{X}(x ; y) \in \mathbb{R}^2$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit $Y = PX$. Que peut-on dire du vecteur Y par rapport au vecteur X ? À quelle transformation du plan correspond la matrice P ?

2. On s'intéresse à la projection de vecteurs sur l'axe des ordonnées.

a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur du plan, donner le vecteur Y image de cette projection.

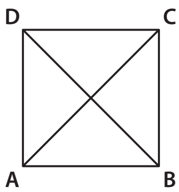
b) On admet qu'une telle transformation du plan peut être donnée par une matrice carrée d'ordre 2, que l'on notera P. En étudiant l'équation $Y = PX$ d'inconnue P, déterminer la matrice P représentative de la projection considérée.

3. En appliquant la méthode de la question précédente, déterminer la matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ correspondant à la projection sur la première bissectrice.

Graphes

107 Au cours d'un week-end, un tournoi de jeux de plateau est organisé par équipe. Les organisateurs prévoient que 4, 5, 6 ou 7 équipes peuvent être engagées dans ce tournoi et ils doivent élaborer des affrontements dans chacune des configurations.

1. Quatre équipes. On note A, B, C et D ces équipes et on représente les rencontres du tournoi par le graphe ci-contre.



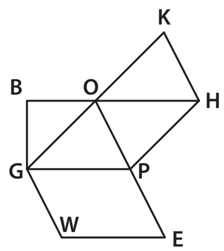
a) Combien d'affrontements devront disputer chaque équipe ?
b) Combien d'affrontements seront disputés au cours de ce week-end ?
2. Cinq équipes. On note E la cinquième équipe engagée.
a) Représenter les rencontres du tournoi par un graphe de façon à ce que chaque équipe dispute quatre affrontements.
b) Combien d'affrontements seront alors disputés ?
c) Pourquoi n'aurait-on pas pu organiser le tournoi de telle façon que chaque équipe ne joue que trois affrontements ?
3. Les deux graphes précédents sont-ils complets ?
4. Six équipes. On note F la sixième équipe engagée.
a) Représenter les rencontres du tournoi par un graphe de façon à ce que chaque équipe dispute trois affrontements.
b) Ce graphe est-il complet ?
c) Combien d'affrontements seront alors disputés ?
5. Sept équipes. On note H la septième équipe engagée.
a) Est-il possible d'organiser le tournoi de telle façon que chaque équipe joue exactement quatre affrontements ? cinq ?
b) Représenter une telle situation par un graphe lorsque c'est possible. Combien d'affrontements seront alors disputés ?

108 On appelle « mot » en langage binaire une suite ordonnée de « lettres » 0 et 1. Par exemple : 0110 est un mot en langage binaire de longueur 4.
1. Dénombrer les mots en langage binaire de longueur n, pour $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
2. Donner tous les mots en langage binaire de longueur 3.
3. On considère X et Y deux mots de longueur 3. Représenter par un graphe la relation : « les deux mots ne diffèrent que d'une lettre ».
4. On souhaite transmettre des mots dans ce langage. La transmission choisie a un défaut : il est possible de confondre deux mots qui ne diffèrent que d'une lettre. Déterminer les mots de longueur 3 qui ne pourront pas être confondus lors de cette transmission.

109 Parmi huit élèves volontaires, un professeur de maths doit constituer un groupe de trois personnes pour faire une interrogation orale. Le professeur doit faire attention aux relations entre les élèves :
Erwan ne supporte pas Thibault ;
Jordan refuse de travailler avec Gwendoline ;
Thibault n'arrive jamais à rester sérieux avec Alexis ;
Élodie n'apprécie ni Gwendoline, ni Alim, ni Aya ;
Alim a du mal à travailler avec Alexis et Aya ;
Alexis ne veut pas travailler avec Erwan ;
Aya ne supporte ni Jordan, ni Alim.
1. Construire un graphe non orienté traduisant la situation.
2. Construire un groupe contenant Erwan, qui est le plus doué en maths.
3. Construire un autre groupe qui ne contient pas Erwan.

110 À la fin d'un semestre les examens de licence proposent six options : calcul différentiel ; géométrie euclidienne ; théorie des nombres ; algèbre linéaire ; probabilités et statistique. Un candidat a pu choisir deux ou trois de ces options. Certains ont choisi la théorie des nombres et l'algèbre linéaire ; d'autres le calcul différentiel, les probabilités et la statistique ; d'autres finalement ont choisi la géométrie euclidienne et la théorie des nombres. Les étudiants passent au plus une épreuve chaque jour. Combien peut-on programmer d'épreuves au maximum dans une journée ?

111 On a représenté une partie du métro londonien par le graphe ci-dessous (un sommet par station).



B : Bond Street
E : Embankment
G : Green Park
H : Holborn
K : King's Cross St Pancras
O : Oxford Circus
P : Piccadilly Circus
W : Westminster

1. Déterminer le nombre de trajets possibles pour se rendre de Westminster à King's Cross en passant par trois stations (sans compter celles de départ et d'arrivée).
2. Déterminer le nombre de trajets possibles pour se rendre de Bond Street à Embankment en passant par quatre stations (sans compter celles de départ et d'arrivée).

Exercices bilan

112 Éviter tout débordement

Un artiste doit installer une œuvre aquatique constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R.
Au départ les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.
Un système de canalisations devra permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :
• dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
• ensuite les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
• enfin, on ajoute 200 litres d'eau dans le basin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.
On considère les suites (a_n) et (b_n) désignant les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures.
On suppose pour cette étude que les bassins sont *a priori* suffisamment grand pour éviter tout débordement.

Pour tout entier n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n + C$ où $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P^2. En déduire que P est inversible et préciser son inverse.
b) Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.
c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP$.
d) En déduire que $M^n = \begin{pmatrix} 0{,}5^n & 3\times 0{,}5^n - 3\times 0{,}25^n \\ 0 & 0{,}25^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

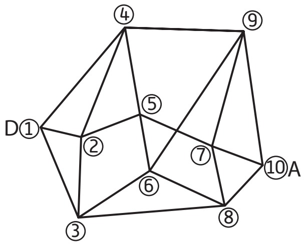
4. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.
a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = MV_n$.
b) On admet que $V_n = M^nV_0$ pour tout $n \geqslant 1$.
Montrer que $U_n = \begin{pmatrix} -18\times 0{,}5^n + 9\times 0{,}25^n + 10 \\ -3\times 0{,}25^n + 4 \end{pmatrix}$ pour tout $n \geqslant 1$.

5. a) Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.
b) Déterminer la limite de la suite (a_n).
c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

D'après Bac S, Liban 2019

113 Randonnée en montagne

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-dessous.



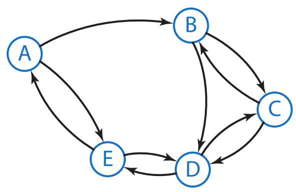
① Départ
② Passerelle
③ Roche Percée
④ Col bleu
⑤ Pic rouge
⑥ Refuge
⑦ Col vert
⑧ Pont
⑨ Cascade
⑩ Arrivée

1. a) Dresser un tableau décrivant les degrés de chaque sommet du graphe.
b) En déduire le nombre d'arêtes de ce graphe.
2. Donner un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois mais n'empruntant pas forcément tous les sentiers
3. Donner un itinéraire allant de D à A passant une seule fois par tous les sentiers.
4. a) Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre croissant des sommets).
b) En déduire le nombre d'itinéraires allant de D à A en empruntant cinq sentiers.
Citer un tel itinéraire passant par le Pic rouge.

D'après bac ES, Antilles-Guyane 2013

114 Circuit touristique

Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-dessous modélise la situation.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).
2. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de rendre de D à B ? Les donner tous.
3. Montrer qu'il n'existe qu'un seul circuit de longueur 5 passant par le sommet A.
Quel est ce cycle ? En est-il de même pour B ?

D'après bac ES, Liban 2006

Préparer le BAC L'essentiel

Matrices

- Une **matrice** est un tableau de nombres

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccc} \color{blue}{C1} & \color{blue}{C2} & \color{blue}{C3} & \color{blue}{C4} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \color{red}{\leftarrow L1} \\ \color{red}{\leftarrow L2} \\ \color{red}{\leftarrow L3} \end{array} \end{array}$$

- **Transposée**

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccc} \color{red}{C1} & \color{red}{C2} & \color{red}{C3} \end{array} \\ A^t = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & 8 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \color{blue}{\leftarrow L1} \\ \color{blue}{\leftarrow L2} \\ \color{blue}{\leftarrow L3} \\ \color{blue}{\leftarrow L4} \end{array} \end{array}$$

Opérations sur les matrices

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$

- $$\begin{array}{cc} \times & \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \end{array}$$

Suites de matrices

Soit (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$.
S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$, alors $U_n - X = A^n(U_0 - X)$.

Transformations géométriques

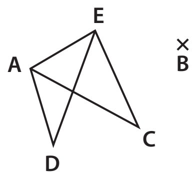
- $B(x_B\,;y_B)$ est l'image de $A(x_A\,;y_A)$ par la **translation** de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ si $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
- $B(x_B\,;y_B)$ est l'image de $A(x_A\,;y_A)$ par la **rotation** d'angle θ si $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.

Matrices inversibles

- A est inversible s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$.
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est **inversible** si $\det(A) = ad - bc \neq 0$.
- Dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

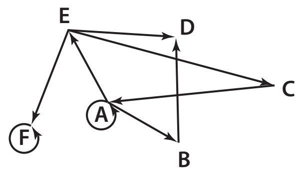
Graphe

- Un graphe non orienté est composé d'**arêtes** et de **sommets** :



Graphe G_1

- Un graphe orienté est composé d'**arcs** et de **sommets** :



Graphe G_2

Matrice d'adjacence

- La **matrice d'adjacence** de G_1 (dans l'ordre alphabétique) est :

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

nombre d'arêtes reliant E à D

- La **matrice d'adjacence** de G_2 (dans l'ordre alphabétique) est :

$$\begin{array}{rl} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \end{array}$$

nombre d'arcs reliant B à D

- Le coefficient $m_{ij}^{(n)}$ de M^n correspond au nombre de chaînes/chemins de longueur n reliant le sommet s_i au sommet s_j.

Caractéristiques d'un graphe

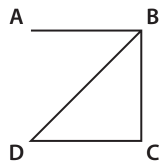
- L'**ordre** d'un graphe correspond au nombre de sommets de ce graphe.
- Le **degré** d'un sommet correspond au nombre d'arêtes/arcs le composant (les boucles comptant double).

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de…		Parcours d'exercices
▶ Représenter une matrice	Méthode 1	1, 2, 34, 35
▶ Effectuer un calcul matriciel (somme, produit, puissance)	Méthode 2, Méthode 3	3, 4, 39, 40, 5, 6, 43, 44
▶ Déterminer et utiliser l'inverse d'une matrice carrée	Méthode 4, Méthode 5	7, 8, 9, 10, 48, 49
▶ Résoudre un système d'équations en utilisant le calcul matriciel	Méthode 6	11, 12, 59, 60
▶ Déterminer les caractéristiques d'un graphe (orienté ou non)	Méthode 7	15, 16, 62, 63
▶ Utiliser une matrice d'adjacence	Méthode 8	21, 22, 70, 71
▶ Manipuler des suites de matrices	Méthode 9	23, 24, 99, 100
▶ Représenter des transformations géométriques.	Méthode 10	25, 26, 102, 103

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-e06-06

QCM Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
115 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -15 \end{pmatrix}$
116 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; A^{-1} est égale à :	$\begin{pmatrix} -2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
117 $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-z=-3 \\ x-y+3z=17 \end{cases}$ a pour solutions :	$x=0$ $y=1$ $z=4$	$x=2$ $y=-4$ $z=7$	$x=1$ $y=-4$ $z=4$	$x=1$ $y=-1$ $z=5$
118 L'image de A(2 ; – 4) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ est :	$A'(\sqrt{2}\,;3\sqrt{2})$	$A'(3\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$	$A'(-\sqrt{2}\,;-3\sqrt{2})$	$A'(-3\sqrt{2}\,;-\sqrt{2})$
119 La matrice d'adjacence de ce graphe est : 	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

120 Matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Donner la dimension de A.
2. Que vaut a_{12} ?
3. Déterminer A^t.

Méthode 1 p. 167

121 Calcul matriciel

Les produits matriciels suivants sont-ils possibles ? Effectuer les produits lorsque c'est le cas.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 2 p. 169

122 Matrice inversible

1. Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).
Si une matrice A est inversible, alors il existe une matrice B telle que :

a $AB = 0$ b $A + B = 0$
c $AB = I_n$ d $A + B = I_n$

2. Calculer l'inverse des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).
det(A) est égal à :

a $ad - bc$ b $ab - cd$
c $bc - ad$ d $ab + cd$

4. Calculer, en justifiant lorsque c'est possible et sans la calculatrice les inverses des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Méthode 4 p. 171

123 Systèmes d'équations

1. Le système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ 3x + z + y = 1 \\ 4z + 2y + x = -3 \end{cases}$ a pour solutions :

a $x = 0 ; y = -2 ; z = 1$ b $x = 1 ; y = -2 ; z = 0$

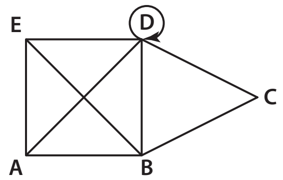
2. Résoudre le système suivant en déterminant l'inverse d'une certaine matrice.

$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

Méthode 6 p. 173

124 Graphes

On considère le graphe suivant.



Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La matrice d'adjacence de ce graphe est égale à :

a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Le nombre de chemins de longueur 5 reliant A à D est :

a 74 b 155 c 5 d 42

Méthode 8 p. 177

125 Suite de matrices

On considère deux suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 5b_n - 3a_n \end{cases}$ pour tout entier n.

Soit $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

1. Donner la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Si $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, donner alors a_1.

Méthode 9 p. 178

126 Transformations géométriques

Soit A(2 ; −3) un point du plan, muni d'un repère d'origine O.

1. Déterminer l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

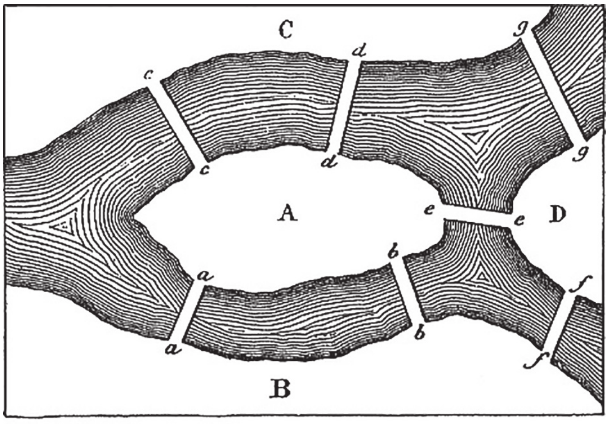
2. Déterminer l'image de A par la rotation de centre O d'angle $-\dfrac{3\pi}{4}$.

Méthode 10 p. 179

Exercices vers le supérieur

127 Les sept ponts de Königsberg

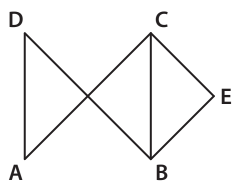
La ville de Königsberg, aujourd'hui appelée Kaliningrad, en Russie possède sept ponts reliant les quatre parties de la ville.
Le problème est le suivant : peut-on, depuis une partie de la ville, passer par tous les ponts une et une seule fois ?

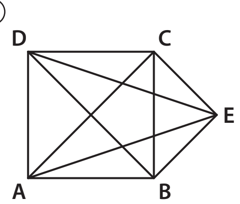


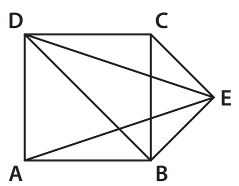
Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

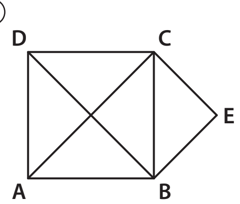
A ▸ Étude d'exemples

1. Représenter la ville de Kaliningrad par un graphe non orienté : un sommet par partie de ville et une arête par pont.
Le problème revient donc à déterminer une chaîne passant un et une seule fois par toutes les arêtes : on appelle une telle chaîne, une chaîne eulérienne. On appelle cycle eulérien une chaîne eulérienne où les sommets de départ et d'arrivée sont confondus.

①


②


③


④


2. a) Déterminer une chaîne eulérienne pour les graphes ① et ③.
b) Déterminer un cycle eulérien pour le graphe ②
c) Peut-on trouver une chaîne eulérienne ou un cycle eulérien pour le graphe ④ ?
3. a) Dresser le tableau des degrés de chaque graphe.
b) En déduire une conjecture sur l'existence de chaîne ou cycle eulérien dans un graphe.

B ▸ Théorème et conclusion

Théorème d'Euler. Un graphe connexe :
• possède un cycle eulérien si tous ses sommets sont de degré pair,
• possède une chaîne eulérienne si exactement deux de ses sommets sont de degré impair.
Nous allons démontrer ce théorème dans le cas du cycle : considérons un graphe connexe G ; pour un sommet s, nous noterons s_O le nombre d'arête dont s est l'origine et s_E le nombre d'arête dont s est l'extrémité.
1. Exprimer le degré d'un sommet s en fonction de s_E et s_O
2. Supposons qu'un cycle eulérien existe, justifier que pour tout sommet s, on a $s_E = s_O$.
En déduire que le degré de s est nécessairement pair.
3. On admet la propriété suivante : « Si tous les degrés des sommets d'un graphe sont pairs, alors tout sommet a un cycle ». Supposons que tous les degrés de G soient pairs et qu'il n'existe pas de cycle eulérien, soit alors C un cycle de longueur maximale.
a) Soit G′ le graphe G auquel on a enlevé toutes les arêtes de C. Montrer que tous les sommets de G sont de degré pair.
b) Montrer qu'il existe un sommet s de C de degré non nul dans G′

Coup de pouce Raisonner par l'absurde et utiliser la connexité de *G*.

c) En déduire que s admet un cycle dans G′, puis construire un cycle plus long que C.
d) Conclure sur l'existence d'un cycle eulérien.
4. On admet l'intégralité du théorème d'Euler.
Conclure sur le problème des ponts de Königsberg

128 Suites et matrices

On considère les matrices $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En résolvant le système $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible et donner son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. Déterminer A^n pour tout entier naturel n.
On considère les trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n) définies par récurrence, pour u_0, v_0 et w_0 des réels, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{v_n + w_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + w_n}{2} \; ; n \in \mathbb{N}. \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer une relation matricielle entre U_{n+1} et U_n pour tout entier n.
b) En déduire les limites des trois suites.

129 Diagonaliser une matrice

A ▶ Un premier exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Pour x un nombre réel, on pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.
a) Démontrer que f est une fonction polynomiale de degré 2.
b) Déterminer les racines λ_1 et λ_2 de $f(x)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
a) Justifier que les systèmes $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$ et $(A - \lambda_2 I_2)X = 0$ admettent une infinité de solutions.
b) Déterminer alors une solution X_1 et une solution X_2 de chacun de ces systèmes.

3. On forme alors la matrice P, dont la première colonne est la matrice X_1 et la deuxième la matrice X_2.
a) Démontrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.
b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

5. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

B ▶ Un deuxième exemple

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et on pose $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$.

6. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on considère le système $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$.
a) Établir que ce système est équivalent à $x + y + z = 0$.
b) Comment interpréter cette dernière équation dans l'espace $\mathbb{R}^3$?
c) Donner alors deux vecteurs sous forme de matrices colonnes engendrant le plan d'équation $x + y + z = 0$. On les notera X_1 et X_2.

7. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on considère le système $(A - \lambda_2 I_2)X = 0$.
a) Justifier que ce système admet une infinité de solutions.
b) Déterminer alors une solution X_3 de ce système.

8. On forme alors la matrice P, dont la première colonne est la matrice X_1, la deuxième la matrice X_2 et la troisième la matrice X_3.
a) Démontrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.
b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.
On a ainsi pu écrire $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible. On dit que l'on a diagonalisé la matrice A. Cette diagonalisation n'est pas toujours possible.

130 Triangulariser une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour x un nombre réel, on pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.
a) Démontrer que f est une fonction polynomiale de degré 2.
b) Résoudre alors $f(x) = 0$.

2. Déduire de la question précédente que le système $(A - I_2)X = 0$ admet une infinité de solutions. Déterminer une solution X.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
b) Montrer que le calcul $P^{-1}AP$ donne une matrice triangulaire. On notera cette matrice T.

4. Calculer T^2, T^3 et conjecturer une expression de T^n pour tout entier naturel n non nul. Démontrer cette conjecture.

5. Déduire des questions précédentes la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

131 Quaternions

Démo

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes, noté $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

À tout couple de nombres complexes $(z_1 ; z_2)$, on associe la matrice $M(z_1 ; z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$. On désigne par H l'ensemble des matrices $M(z_1 ; z_2)$ pour tout couple de complexes $(z_1 ; z_2)$.

1. Montrer que toute matrice de H peut s'écrire de manière unique sous la forme $aI + bJ + cK + dL$, où a, b, c et d sont des réels.

2. Montrer que le produit de deux matrices de H est une matrice de H.

3. Le produit matriciel dans H est-il commutatif ?

132 Ensemble des nombres complexes

1. On considère la matrice $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer i^2 et i^{-1}.

2. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels. On notera $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des matrices de $\mathbb{C}$ privé de la matrice nulle.
a) Vérifier que les matrices i et I_2 appartiennent à $\mathbb{C}$.
b) Montrer que toute matrice de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de la forme $aI_2 + bi$, avec a et b réels.

3. a) Soit Z et Z' deux éléments de $\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Z = Z'$.
b) Démontrer que le produit matriciel sur $\mathbb{C}^*$ est commutatif.
c) Démontrer que tout élément de $\mathbb{C}^*$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercices vers le supérieur

133 Équations différentielles

On s'intéresse à trois fonctions du temps t : x_1, x_2 et x_3, toutes trois dérivables. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_2(t) - x_3(t) \\ x_2'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_2(t) \end{cases}$$

1. En posant $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$, écrire le système différentiel sous forme de système matriciel $X' = AX$, où l'on explicitera A.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que P est inversible et donner sa matrice inverse.
b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

3. On introduit la matrice colonne $Y = P^{-1}X$.
a) Démontrer alors en dérivant chaque fonction coefficient que l'on obtient $Y' = DY$.
b) Trouver alors les solutions de ce système en intégrant. Le fait ici d'avoir une matrice D diagonale rend le calcul plus facile.

4. En déduire les fonctions solutions X.

134 Matrices magiques

On appelle matrice magique une matrice carrée telle que la somme des coefficients par lignes et par colonnes est constante.

1. Vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est magique.

2. Donner une autre matrice magique de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Affirmation 1 La somme de deux matrices magiques est magique.
Affirmation 2 Le produit de deux matrices magiques est magique.

135 Sous-groupe de matrice (1) MPSI PSCI

On note E l'ensemble des matrices d'ordre 2 de la forme $\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

1. Montrer que le produit de deux éléments de E reste dans E.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in$ E, montrer que A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$.

136 Sous-groupe de matrice (2) MPSI

Soit a un réel, on considère la matrice :

$R(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$.

On définit l'ensemble E $= \{R(a) \,;\, a \in \mathbb{R}\}$.
1. Comment interpréter $R(a)$ de manière géométrique ?
2. Calculer $R(a)R(b)$ pour a, $b \in \mathbb{R}$. En déduire que tout produit de matrices de E appartient encore à E. Comment interpréter ce résultat de manière géométrique ?
3. En utilisant la question précédente, démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $R(a)$ est inversible. Calculer son inverse et l'interpréter de manière géométrique.

137 Interpolation polynomiale Démo

On considère un certain nombre de points dans le plan muni d'un repère orthonormé. On souhaite dans cet exercice déterminer une fonction polynomiale dont la courbe passe par tous les points considérés.

A ▶ Un cas trivial

Expliquer ce qu'il se passe lorsque l'on ne considère que deux points du plan : quel est le degré de la fonction polynomiale à considérer ? Quelle formule peut-on avoir dans ce cas ?

B ▶ Un premier exemple

On considère les points du plan $(-1 \,;\, 2)$, $(1 \,;\, -2)$ et $(4 \,;\, 7)$. On admet qu'il existe une fonction polynomiale du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la courbe contient les trois points.
1. Écrire les différentes conditions sous forme d'égalités que doivent réaliser les trois réels a, b et c.
2. Écrire le système ainsi obtenu sous forme d'une égalité matricielle.
3. Résoudre le système et donner la fonction polynomiale obtenue. Que peut-on dire quand à l'unicité de cette fonction ?

C ▶ Vers un cas général

On admet que si l'on considère $n+1$ points du plan distincts, il existe une fonction polynomiale de degré n de la forme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0.$$

On note $(x_i \,;\, y_i)$ les points du plan pour $i \in \{0 \,;\, \ldots \,;\, n\}$.
1. Écrire le système de $n+1$ équations dont les $n+1$ inconnues sont les coefficients de f. En déduire son écriture matricielle :

$$V\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

2. Les matrices de la forme de V sont appelées matrices de Vandermonde. On admet qu'elles sont toujours inversibles. Que peut-on en déduire sur la fonction polynomiale de l'interpolation ?

D ▶ Un deuxième exemple

Déterminer la fonction polynomiale dont la courbe passe par les points $(-2 \,;\, 10)$, $(0 \,;\, 2)$, $(1 \,;\, 4)$ et $(3 \,;\, 12)$.

138 Sous-groupe de matrice (3) MPSI

Pour un réel a, on pose $M(a)=\begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E=\{M(a)\,;\,a\in\mathbb{R}\}$.

1. Calculer pour a et b des réels le produit matriciel $M(a)M(b)$.
2. En déduire que E est stable par produit.
3. Montrer qu'une matrice $M(a)$ est inversible pour tout réel a et donner son inverse.
4. Déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice $M(a)^n$. On pourra émettre une conjecture et la démontrer à l'aide d'un raisonnement pas récurrence.

139 Sous anneau de matrice BCPST

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On s'intéresse à l'ensemble $E=\{M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;\,AM=MB\}$.

1. Soit M_1 et M_2 deux matrices de E et $\lambda\in\mathbb{R}$.
Montrer que :
a) la matrice nulle appartient à E.
b) $\lambda M_1\in E$.
c) $M_1+M_2\in E$.

2. a) Vérifier que la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est un élément de E.

b) Montrer que $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à E si, et seulement si, $c=0$ et $b=d$.

Calculer le produit AC. Cette matrice appartient-elle à E ?

140 Équation matricielle de degré 2 MPSI

On s'intéresse à la résolution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de l'équation $X^2=A$, où $A=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On considère la matrice $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2=D$.
a) Montrer que $MD=DM$.
b) En posant $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrer alors que M est diagonale.
c) En déduire les valeurs possibles des coefficients de M. Expliciter les quatre matrices solutions de $M^2=D$.

2. On pose $P=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
b) Vérifier que $A=PDP^{-1}$.
c) Montrer que $X^2=A \Leftrightarrow M^2=D$.
d) En déduire la forme des solutions X de l'équation $X^2=A$. Donner ensuite les quatre solutions explicites de cette équation.
e) Calculer leur somme et leur produit.

141 Matrices nilpotentes MPSI

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre n $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note I son élément unité. On dit que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice 3 si $A^2\neq 0$ et $A^3=0$. On considère ainsi dans la suite une telle matrice A.
Pour un réel x, on pose :

$$E(x)=I+xA+\frac{x^2}{2}A^2.$$

1. Montrer que pour tous réels x et y :
$$E(x+y)=E(x)\,E(y).$$
2. En déduire que pour tout entier naturel n et tout réel x, on a :
$$E(nx)=E(x)^n.$$
3. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $E(x)$ est inversible et donner son inverse.

4. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Vérifier que A est nilpotente d'indice 3.
b) Déterminer alors la matrice $E(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

142 Matrices antisymétrique MPSI Démo

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique si $A^t=-A$.

1. a) Que dire de la transposée d'une colonne ?
b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Justifier pourquoi le produit $X^t\,AX$ est possible.
2. Démontrer que A de $\mathcal{M}_n(R)$ est antisymétrique si, et seulement si, pour toute matrice $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^t\,AX=0$.

143 Trace de matrice MPSI

On considère une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $Tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A.

1. a) On pose $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$. Calculer $Tr(A)$.

b) On pose $A=\begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $Tr(A)$.

c) Calculer $Tr(I_n)$.

2. Si $A=(a_{ij})$, on écrit formellement $Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.
a) Démontrer que, pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B).$$
b) En écrivant formellement les coefficients du produit matriciel, démontrer que, pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$Tr(AB)=Tr(BA).$$
3. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, que l'on ne peut pas trouver de matrices A et B tels que :
$$AB-BA=I_n.$$

TICE 55 min Chercher Raisonner

1 Modèle proie-prédateur

Le modèle proie-prédateur est proposé en 1926, indépendamment par Lotka et Volterra, pour décrire la dynamique d'un système biologique dans lequel seules une espèce « proie » et une espèce « prédateur » interagissent (par exemple : des lièvres et des lynx).

Ici on va s'intéresser au modèle discret : soit (u_n) et (v_n) respectivement le nombre de proies et de prédateurs à l'instant n. On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = (a+1-bv_n)u_n \\ v_{n+1} = (-c+1+du_n)v_n \end{cases}$$

où a désigne le taux de reproduction des proies ;
c désigne le taux de mortalité des prédateurs (ces deux taux sont supposés constants) ;
bv_n désigne le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs (supposé proportionnel au nombre de prédateurs) ;
du_n désigne le taux de reproduction des prédateurs (supposé proportionnel au nombre de proies).
On va considérer les valeurs suivantes : $a = 0{,}09$, $b = 0{,}00001$, $c = 0{,}25$ et $d = 0{,}000005$.

A ▸ Modélisation sur tableur

1. Ouvrir un tableur et créer le tableau ci-contre.

	A	B	C	D	E
1	a		*n*	***u***(*n*)	***v***(*n*)
2	b		0		
3	c		1		
4	d		2		
5			3		
6			4		

2. Renseigner les valeurs de a, b, c et d dans les cellules correspondantes.
3. Soit $u_0 = 50\,000$ et $v_0 = 9\,000$.
a) Renseigner ces valeurs dans les cases correspondantes.
b) En D2 et E2, écrire une formule pour calculer u_1 et v_1, puis étirer ces formules jusqu'à 300.
Le couple (50 000 ; 9 000) est appelé point d'équilibre du système.
4. Créer un nuage de point représentant (u_n) et (v_n).
a) Comment évolue les deux populations lorsque celle des proies s'éloigne du point d'équilibre ?
b) Comment évolue les deux populations lorsque celle des prédateurs s'éloigne du point d'équilibre ?

B ▸ Expression des suites (u_n) et (v_n)

1. Déterminer en fonction de a, b, c et d le point d'équilibre, c'est-à-dire le couple $(U ; V)$ tel que, pour $u_0 = U$ et $v_0 = V$, on a $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$.
2. Soit les suites (t_n) et (s_n) définies par $t_n = u_n - U$ et $s_n = v_n - V$ pour tout entier n.
a) Montrer que $t_{n+1} = t_n - \frac{bc}{d}s_n - bt_ns_n$ et $s_{n+1} = s_n + \frac{ad}{b}t_n + dt_ns_n$ pour tout entier n.
b) Reprendre la page tableur et créer les suites (t_n) et (s_n) aux colonnes F et G, puis calculer bt_ns_n et dt_ns_n aux colonnes H et I.
Sur le tableur, on peut constater que, pour $(u_0 ; v_0)$ proche de $(U ; V)$, les valeurs de bt_ns_n et dt_ns_n sont négligeables devant celles de t_n et s_n. On va donc considérer $\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \frac{bc}{d}s_n \\ s_{n+1} = s_n + \frac{ad}{b}t_n \end{cases}$
3. Soit $T_n = \begin{pmatrix} t_n \\ s_n \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n, puis X_{n+1} en fonction de X_n.

TICE 55 min Raisonner Modéliser

2 Gestion de stocks

Une entreprise créant des jeux de sociétés souhaite changer de fournisseur de matières premières.
Ayant besoin de carton, plastique et papier, elle a le choix entre deux fournisseurs.

- Le fournisseur A propose les prix unitaires suivants : carton : 2,99 € ; papier : 0,05 € ; plastique : 3,79 €.
- Le fournisseur B propose les prix unitaires suivants : carton : 3,11 € ; papier : 0,03 € ; plastique : 3,29 €.

Pour pouvoir faire le choix, la responsable dresse la feuille de tableur suivante avec les données déjà acquises (commandes des clients, coût de main d'œuvre, prix de vente par jeu).

TICE Fichier Excel lienmini.fr/maths-e06-07

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	quantité de matière première nécessaire par jeu						quantité de jeux par commande client				
2	Qm	jeu 1	jeu 2	jeu 3	jeu 4		Qc	client 1	client 2	client 3	
3	carton	5	10	6	8		jeu 1	30	10	80	
4	papier	2	1	3	4		jeu 2	40	50	30	
5	plastique	3	1	0	4		jeu 3	100	30	50	
6	coût unitaire par matière première						jeu 4	50	30	60	
7	Cm	carton	papier	plastique							
8	coût unitaire										
9	coût unitaire de main d'œuvre										
10	Co	jeu 1	jeu 2	jeu 3	jeu 4						
11	coût										
12	coût unitaire par jeu						prix de vente unitaire par jeu				
13	Cj	jeu 1	jeu 2	jeu 3	jeu 4		V	jeu 1	jeu 2	jeu 3	jeu 4
14	coût unitaire						prix de vente unitaire	40	55	32	55
15	coût unitaire par matière première						recette par commande				
16	C	client 1	client 2	client 3			R	client 1	client 2	client 3	
17	coût						coût				
18											
19	coût total						recette totale				
20				bénéfice							

Avec cette feuille, on définit les matrices Q_m, Q_c, C_m, C_o, C_j, C, V et R.

1. a) Le coût d'un jeu s'obtient en sommant le coût des différentes matières premières nécessaire avec le coût de main d'œuvre. Comment obtenir la matrice C_j en fonction de Q_m, C_m et C_o ?

b) Comment obtenir la matrice C en fonction de C_j et Q_c ?

c) Comment obtenir la matrice R en fonction de Q_c et V ?

2. a) Dans un tableur recopier la feuille ci-dessus en précisant dans le tableau « coût unitaire par matière première » les coûts pratiqués par le fournisseur A.

b) En utilisant le calcul matriciel fourni par le tableur ↪ **Dicomaths** p. 246, compléter les tableaux « coût unitaire par jeu», «coût par commande» et «recette par commande».

c) Le coût total correspond au coût de toute les commandes de clients, de même la recette totale correspond à la recette de toutes les commandes. Le bénéfice correspond à la différence entre la recette et le coût.
Compléter les cases « coût total », «recette totale» puis «bénéfice».

d) En modifiant le tableau « coût unitaire par matière première », déterminer quel fournisseur l'entreprise devrait prendre pour avoir le plus de bénéfices.

3. Déterminer quel fournisseur choisir dans les cas suivants.

a) L'entreprise reçoit la commande d'un nouveau client désirant : 50 jeux 1, 70 jeux 3 et 90 jeux 4.

b) L'entreprise décide de créer un nouveau jeu (jeu 5) nécessitant 10 feuilles de carton, 10 plaques de plastique et 30 billes en verre. Les fournisseurs A et B peuvent fournir des billes au prix unitaire de 0,05 € pour A et 0,13 € pour B.
Le jeu 5 coûterait 89 € et tous les clients souhaiterait en commander 15 chacun.