6

Introduction au calcul matriciel et aux graphes

Les entreprises de vente doivent gérer de nombreux tableaux de données (prix unitaire par produit, nombre de commandes par produit, …) pour calculer leur dépense, leur recette, et prévoir des stocks suffisants.

Peut-on trouver des règles opératoires sur ces tableaux afin d'automatiser les calculs ?

↪ TP 2, p. 199

VIDÉO WEB

Distribution : la rupture de stock.
lienmini.fr/maths-e06-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-e06-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Étudier des séries statistiques

On a consigné les résultats de trois élèves à une série d'épreuves, ainsi que les coefficients de chaque épreuve dans deux tableaux distincts.

	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
Camille	12	14	10
Antoine	13	10	12
Ana	16	9	13

	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
Coeff.	4	8	2

1. Calculer la moyenne de chaque élève sur l'ensemble des épreuves.
2. Quel élève a le mieux réussi la série d'épreuves ?

2 Manipuler des suites arithmétiques et géométriques

Soit les suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définies par :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Déterminer la nature des suites (u_n) et (v_n) et préciser leurs raisons.
3. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

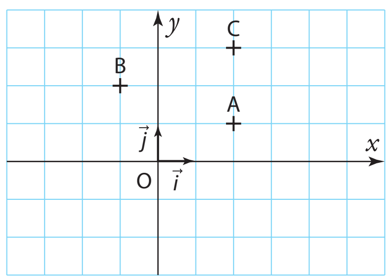
3 Résoudre des systèmes

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -3x - 4y = -14 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -3x + 7y = 52 \\ 9x - 8y = -65 \end{cases}$

4 Réaliser des transformations géométriques

1. Reproduire le repère ci-contre.
2. Relever les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Tracer le point A′, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
4. Tracer le point B′, image de B par la symétrie de centre A.
5. Tracer le point C′, image de C par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
6. Relever graphiquement les coordonnées des points A′, B′ et C′ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



Activités

25 min

1 Découvrir le calcul matriciel

Une entreprise qui vend des fruits peut se fournir auprès de cinq marchés différents. Les tableaux ci-dessous détaillent les prix proposés par chacun des marchés (les prix sont au kg) ainsi que les commandes reçues de trois clients.

Nantes	
Orange	1,15 €
Citron	1,25 €
Pomme	0,65 €
Banane	1,2 €

Rungis	
Orange	1,2 €
Citron	1,4 €
Pomme	1 €
Banane	1 €

Lyon	
Orange	1,05 €
Citron	1,2 €
Pomme	0,95 €
Banane	1,15 €

Marseille	
Orange	1,05 €
Citron	1,3 €
Pomme	0,85 €
Banane	1,05 €

Lille	
Orange	1,15 €
Citron	1,6 €
Pomme	0,55 €
Banane	1,15 €

Client 1	
Orange	30 kg
Citron	30 kg
Pomme	70 kg
Banane	60 kg

Client 2	
Orange	50 kg
Citron	50 kg
Pomme	60 kg
Banane	50 kg

Client 3	
Orange	60 kg
Citron	10 kg
Pomme	70 kg
Banane	40 kg

A ▶ Représenter les matrices

1. Organiser les données des prix par marché sous la forme d'un tableau à double entrées.
Combien y-a-t-il de dispositions possibles pour ce type de tableau en gardant l'ordre de l'énoncé ?
En ne gardant que les valeurs de ce tableau, on obtient une matrice que l'on nommera P.
La matrice obtenue à partir de l'autre tableau est la matrice transposée de P, notée P^t.

2. Donner la matrice C représentant les commandes des trois clients (mettre les clients en colonne et dans l'ordre).

B ▶ Opérations

Pour la suite, on considérera la matrice $P = \begin{pmatrix} 1{,}15 & 1{,}25 & 0{,}65 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}4 & 1 & 1 \\ 1{,}05 & 1{,}2 & 0{,}95 & 1{,}15 \\ 1{,}05 & 1{,}3 & 0{,}85 & 1{,}05 \\ 1{,}15 & 1{,}6 & 0{,}55 & 1{,}15 \end{pmatrix}$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

1. Les clients ont chacun passé une nouvelle commande, consignée dans la matrice A.

a) Écrire la matrice C' représentant la commande totale par clients (clients en colonne).

Nous venons de faire une somme de matrices : $C + A = C'$.

b) Quelle règle peut-on établir pour la somme de deux matrices ?

2. P représente en réalité les prix de l'année précédente. Cette année les prix ont tous augmenté de 5 %.

a) Écrire la matrice P' représentant les nouveaux prix des produits par marché.

Nous venons de faire une multiplication de matrice par un nombre : $1{,}05 \times P = P'$.

b) Quelle règle peut-on établir pour le produit d'une matrice par un nombre réel ?

3. On souhaite savoir quel marché serait le plus économique.

a) Quel est le coût total pour l'entreprise si elle choisit le marché de Nantes pour satisfaire la commande du client 1 ? Et avec celui de Rungis ?

b) Écrire la matrice T représentant le coût total pour satisfaire la demande par marché et par client (écrire les clients en colonne). Nous venons de faire une multiplication de matrices : $P'C' = T$.

c) Quelle règle peut-on établir pour la multiplication de deux matrices ?

d) Quel marché peut-on conseiller à l'entreprise pour satisfaire la commande du client 1 ? Du client 2 ? Du client 3 ?
Et si on prenait le même marché pour les 3 clients ?

↪ Cours 1 p. 166 et 2 p. 168

30 min

2 Résoudre des systèmes à l'aide de matrices inversibles

1. Résoudre les systèmes suivants. $(S_1) : \begin{cases} 2x+3y=9 \\ 7x+13y=44 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} 6x+4y=1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$

Nous allons voir comment déterminer les solutions de ces systèmes par calcul matriciel.

A ▸ Représentation du système

1. Déterminer deux matrices $M_{x,y}$ et B de dimension 2×1 telles que (S_1) équivaut à $M_{x,y} = B$.

2. Donner deux matrices A et X, de dimensions respectives 2×2 et 2×1, telles que $M_{x,y} = AX$.

3. En déduire que résoudre le système (S_1) revient à résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue X.

B ▸ Inverse de matrice et résolution matricielle

1. Dans l'équation $2x = 5$, pourquoi multiplier les deux membres par 2^{-1} permet d'isoler x ?

La matrice identité est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer s'il existe une matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AA^{-1} = I_2$.

2. Montrer que trouver A^{-1} revient à résoudre les systèmes $\begin{cases} 2a+3c=1 \\ 7a+13c=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2b+3d=0 \\ 7b+13d=1 \end{cases}$

3. Résoudre ces systèmes et en déduire A^{-1} (mettre les coefficients sous forme de fraction).

4. Exprimer les coefficients de A^{-1} en fonction de ceux de A.
En déduire une formule afin de déterminer la matrice inverse d'une matrice.

5. Multiplier à gauche les deux membres de $AX = B$ par A^{-1}. Retrouve-t-on les solutions de (S_1) ?

6. De même, mettre le système (S_2) sous la forme matricielle $CX = D$. Peut-on trouver C^{-1} ? Pourquoi ?

↪ Cours 3 p. 170 et 4 p. 172

20 min

3 Découvrir les chemins et les graphes

On considère un réseau ferroviaire composé des lignes : Paris-Strasbourg ; Paris-Lyon ; Paris-Marseille ; Paris-Rennes ; Lyon-Strasbourg ; Lyon-Marseille ; Lyon-Rennes ; Marseille-Nice ; Marseille-Bordeaux ; Rennes-Bordeaux et Bordeaux-Nice.

1. Faire un schéma du réseau ferroviaire en représentant les stations par leurs initiales et les lignes par un segment reliant les deux stations.
Nous venons de représenter le réseau par un graphe non orienté.

2. Quel est le plus court chemin pour faire Paris-Nice ? Quel nombre n de lignes a-t-on dû prendre ?
Le chemin déterminé est un chemin de longueur n.

3. Combien de chemins de longueur 3 relient Paris à Marseille ? Et Bordeaux à Lyon ?

4. Représenter le réseau par une matrice M de dimension 7×7 (dans l'ordre P/R/L/S/B/M/N) : les coefficients de la matrice sont 1 si la station ligne et la station colonne sont reliées et 0 sinon.

5. Calculer $M^3 = MMM$. Que retrouve-t-on en ligne 1 colonne 6 ? Et en ligne 5 colonne 3 ?

↪ Cours 5 p. 174 et 6 p. 176

Cours

1 Notion de matrice

Définition Matrice

Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau à **n lignes** et **p colonnes**, composé de nombres réels, appelés **coefficients** de la matrice.

De façon générale, on note $A = (a_{ij})$, a_{ij} étant le coefficient situé à la i^e ligne et j^e colonne.

L'ensemble des matrices de dimension $n \times p$ est $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} C1 & C2 & C3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L1 \\ \leftarrow L2 \end{array}$$ est une matrice de dimension 2×3 ; on a $a_{12} = 2$ et $a_{23} = 3$.

Définition Matrices égales

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de même dimension $n \times p$ sont **égales** si, et seulement si :

$$\boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}} \quad \text{pour tout } i \in \{1 ; 2 ; ... ; n\} \text{ et } j \in \{1 ; 2 ; ... ; p\}.$$

Définition Matrices transposée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$. La matrice **transposée** de A est la matrice A^t de dimension $p \times n$:

$$\boldsymbol{A^t = (a_{ji})}.$$

Les lignes de A correspondent aux colonnes de A^t.

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad 4} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \end{pmatrix}$ on a $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Définitions Matrices particulières

① Une matrice de dimension $1 \times p$ est appelée **matrice ligne.**

Une matrice de dimension $n \times 1$ est appelée **matrice colonne.**

② Une matrice de dimension $n \times n$ est appelée **matrice carrée d'ordre n.**

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n s'écrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour une matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre n, $\{a_{ii} ; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ est l'ensemble des coefficients de la diagonale principale de A.

③ Une **matrice diagonale d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n telle que tous ses coefficients hors de la diagonale principale valent 0.

Exemples

① Si A est une matrice ligne, sa transposée est une matrice colonne.

② $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0{,}5 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2. Les coefficients de sa diagonale principale sont 1, et –2.

③ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Méthode 1 Représenter une matrice

Énoncé

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = j^2 - i$ à deux lignes et trois colonnes.

1. **Donner la matrice A sous la forme d'un tableau de nombres. Préciser sa dimension.**

2. **Donner la matrice A^t.**

3. **Retrouver ce résultat à la calculatrice.**

Solution

1. $A = \begin{pmatrix} 1^2-1 & 2^2-1 & 3^2-1 \\ 1^2-2 & 2^2-2 & 3^2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ **1**

de dimension 2×3. **2**

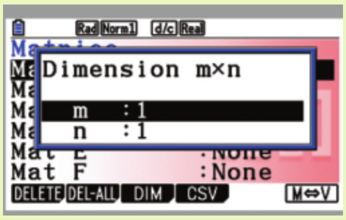
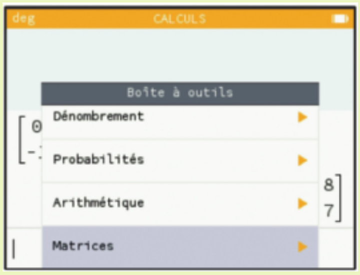
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ donc $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Conseils & Méthodes

1 Dans $A = (a_{ij})$ pour placer a_{ij}, c'est l'inverse du repérage : il faut repérer la i^e ligne de la matrice (on se déplace verticalement dans la matrice) puis la j^e colonne de la matrice (on se déplace horizontalement dans la matrice).

2 On donne d'abord le nombre de lignes, puis le nombre de colonnes.

3.

CASIO	TI	Numworks
• Dans le Menu Exe-Mat, appuyer sur Mat A. • Choisir la matrice, avec DIM, préciser ses dimensions.  • Remplir la matrice puis quitter le menu • Pour calculer A^t : OPTN MAT/VCT Trn puis SHIFT 2, et «A»	• Appuyer sur matrice • Choisir la matrice dans EDIT, préciser les dimensions, écrire les coefficients, et quitter. • Pour calculer A^t : dans le menu matrice, aller sur NOMS puis sélectionner A. Aller dans MATH, sélectionner 2: T et appuyer sur entrer  	• On utilise les crochets en appuyant sur : shift • Écrire ensuite les coefficients. • Associer à la matrice un nom A en appuyant sur shift alpha shift • Pour calculer A^t aller dans la boîte à outil en appuyant sur  • Puis choisir matrice puis transposée.

À vous de jouer !

1 Soit $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 2ij$ à deux lignes et quatre colonnes.

1. Écrire A sous forme de tableau de nombres.

2. Déterminer A^t.

2 Soit $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \left(\frac{2ij}{i+j}\right)$ de dimension 4×1.

1. Écrire A sous forme de tableau de nombres.

2. Déterminer A^t.

↪ Exercices 34 à 38 p. 182

Cours

2 Algèbre des matrices

Définitions Somme de matrices et produit par un réel

• Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont sommables si, et seulement si, elles ont la **même dimension.**

Alors $A + B = (s_{ij})$ où $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\dots;p\}$.

• Pour tout réel k, le produit $kA = (p_{ij})$ est défini par $p_{ij} = ka_{ij}$ pour tout $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\dots;p\}$.

Propriétés Règles sur la somme de matrices

Soit A, B et C trois matrices de même dimension $n \times p$, et soit k un nombre réel.

① L'addition est commutative : $A + B = B + A$.

② L'addition est associative : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

③ Le produit par un réel est distributif : $k(A + B) = kA + kB$.

④ On note $0_{n,p}$ la matrice nulle de dimension $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls. On a $A + 0_{n,p} = A$.

⑤ $kA = 0_{n,p}$ si, et seulement si, $k = 0$ ou $A = 0_{n,p}$.

Démonstration

⑤ Soit $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$, alors $kA = (ka_{ij})$. Par identification des coefficients, $kA = 0_{n,p}$ si, et seulement si, $ka_{ij} = 0$ pour tous $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\dots;p\}$, or $ka_{ij} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ *ou* $a_{ij} = 0$.

Si $k \neq 0$, il en résulte que $a_{ij} = 0$ pour tous $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,,\dots;p\}$, donc que $A = 0_{n,p}$.

Définition Produit de matrices

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de dimension $m \times q$.
Le produit matriciel AB est défini si, et seulement si, $p = m$.

Alors $AB = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ pour tous $i \in \{1\,;2\,;\dots;n\}$ et $j \in \{1\,;2\,;\dots;q\}$.

Exemple

$$\begin{matrix} & \times & \begin{pmatrix}7&3\\9&4\end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix}1&2\\6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&3\\9&4\end{pmatrix} = & \begin{pmatrix}1&2\\6&5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\times7+2\times9 & 1\times3+2\times4\\ 6\times7+5\times9 & 6\times3+5\times4\end{pmatrix} & = \begin{pmatrix}25&11\\87&38\end{pmatrix}\end{matrix}$$

Remarque Dans le produit AB, le nombre de colonnes de A doit être égal aux nombre de lignes de B.

Propriétés Règles sur la multiplication de matrices

Soit A, B et C trois matrices et soit k un nombre réel.

Les propriétés suivantes sont valables sous réserve que les calculs soient possibles.

① La multiplication est associative : $(AB)C = A(BC) = ABC$.

② La multiplication est distributive : $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$.

③ $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

④ $0_{n,p}A = A0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Remarque Le produit de matrices n'est pas commutatif. En effet :

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&11\\3&25\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10&14\\12&16\end{pmatrix}.$$

Exercices résolus

Méthode 2 Déterminer ou calculer le produit de deux matrices

Énoncé

Soit $A=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ **et** $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

Calculer AB.

Solution

Le produit matriciel est bien défini. **1**

$$AB=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4\times(-1)+7\times3 & 4\times0+7\times4 & 4\times2+7\times(-3)\\ 2\times(-1)+1\times3 & 2\times0+1\times4 & 2\times2+1\times(-3)\end{pmatrix} \quad \textbf{2}$$

$$=\begin{pmatrix}17 & 28 & -13\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Conseils & Méthodes

1 On vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

2 On développe chaque ligne de A avec chaque colonne de B

À vous de jouer !

3 Soit $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\\ -6 & 1\end{pmatrix}$.

Calculer AB.

4 Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ -4 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

↪ Exercices 39 à 42 p. 182

Méthode 3 Calculer des produits successifs de matrices

Énoncé

Soit $M=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 10 & -2\end{pmatrix}$.

1. **Montrer que** $MM=3M$.

2. **En déduire** MMM.

Solution

1. $MM=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 10 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -1\\ 10 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -3\\ 30 & -6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}5 & -1\\ 10 & -2\end{pmatrix}=3M.$ **1**

2. $MMM=M(MM)=M(3M)=3\times MM=3\times3M=9M=\begin{pmatrix}45 & -9\\ 90 & -18\end{pmatrix}.$ **2**

Conseils & Méthodes

1 Le produit d'une matrice par elle-même n'est possible que si la matrice est carrée.

2 L'écriture matricielle étant lourde, commencer par simplifier les calculs par des développements, réductions ou factorisation.

À vous de jouer !

5 Soit $M=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 5\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $MM=4M$.

2. En déduire MMM.

6 Soit $M=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $MM=-M$.

2. En déduire $MMMMM$.

↪ Exercices 43 à 47 p. 182

Cours

3 Inverse de matrice

Propriétés Matrice identité

Il existe une **matrice identité** I_n telle que :

- $AI_n = A$ pour toute matrice A à n colonnes,
- $I_nA = A$ pour toute matrice A à n lignes.

I_n est la matrice carrée d'ordre n contenant des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemples

$I_1 = (1) \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition Puissance de matrice

Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors : $A^p = \underbrace{AA\dots A}_{p \text{ facteurs}}$ si $p \neq 0$ et $A^0 = I_n$.

Définition Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I_n.$$

Dans ce cas B est unique et est appelée la **matrice inverse** de A ; on note $B = A^{-1}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

En effet $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \times (-2) + 3 \times 1 & 1 \times 1{,}5 + 3 \times (-0{,}5) \\ 2 \times (-2) + 4 \times 1 & 2 \times 1{,}5 + 4 \times (-0{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. De même $A^{-1}A = I_2$.

Définition Déterminant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. On appelle **déterminant de A** le nombre : **det(A) = $ad - bc$**.

Proposition Matrice d'ordre 2 inversible

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. A est **inversible** si, et seulement si, **det** (A) $\neq 0$.

Alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemples

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

$\det(B) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$ donc B est inversible. $B = \dfrac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$.

$\det(C) = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ donc C n'est pas inversible.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 4 Calculer l'inverse d'une matrice

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Solution

$\det(A) = 2 \times 5 - (-1) \times 3 = 13 \neq 0$ **1** donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -(-1) & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$ **2**

Conseils & Méthodes

1 Pour montrer qu'une matrice de dimension 2×2 est inversible, calculer son déterminant.

2 L'inverse se calcule par la formule du cours.

À vous de jouer !

7 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

8 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

↪ Exercices 48 à 58 p. 123

Méthode 5 Appliquer l'inverse d'une matrice

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Montrer que B est l'inverse de A et en déduire les solutions de l'équation $XA = C$.

Solution

On calcule $AB = I_3$ et $BA = I_3$ donc B est bien l'inverse de A. **1**

$XA = C \Leftrightarrow XAB = CB$ **2** **3**

$\Leftrightarrow XI_3 = CB$

$\Leftrightarrow X = CB$

Donc $X = CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0{,}5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$ est la solution de l'équation.

Conseils & Méthodes

1 Pour montrer que deux matrices sont inverses l'une de l'autre, vérifier que leur produit donne la matrice identité.

2 On résout une équation matricielle comme une équation du 1er degré : on multiplie chaque membre de l'équation par une même matrice.

3 Attention à l'ordre : la multiplication n'est pas commutative.

À vous de jouer !

9 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est l'inverse de A.
2. En déduire les solutions de l'équation $XA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

10 Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & 12 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est sa propre inverse.
2. En déduire les solutions de l'équation $AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

↪ Exercices 48 à 58 p. 183

4 Applications

Proposition Résolution d'un système linéaire

Un système linéaire de la forme $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ est équivalent à l'équation $AX = B$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n, $X = (x_j)$ et $B = (b_j)$ sont deux matrices colonnes.

Si A est inversible, alors l'équation $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Proposition Suites de matrices

On considère une **suite** (U_n) de matrices colonnes telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier n.

1 S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$ alors la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ vérifie :

$$V_{n+1} = AV_n \text{ pour tout entier } n.$$

Dans ce cas on a $U_n = A^n(U_0 - X) + X$ pour tout entier.

2 Si (U_n) est une suite **convergente**, alors elle converge vers une matrice U vérifiant $AU + B = U$.

Démonstration

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes telles que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout entier n.

1 S'il existe une matrice X telle que $AX + B = X$, soit alors la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$.
Alors $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - (AX + B) = AU_n + B - AX - B = AU_n - AX = A(U_n - X) = AV_n$.
La suite (V_n) est donc une suite géométrique de raison A, donc $V_n = A^nV_0$ pour tout entier n (la démonstration de cette propriété peut se faire par récurrence).
Or $V_0 = U_0 - X$ donc $V_n = A^n(U_0 - X)$ pour tout entier n.
$V_n = U_n - X$ donc $U_n = V_n + X = A^n(U_0 - X) + X$ pour tout entier n.

2 Si (U_n) est une suite convergente, soit U sa limite.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U$.

D'autre part $U_{n+1} = AU_n + B$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (AU_n + B) = A(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n) + B = AU + B$.

Donc U vérifie bien $AU + B = U$.

Proposition Transformations géométriques

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, soit deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

- B est l'image de A par la **translation** de vecteur $\vec{u}$ si, et seulement si : $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
- B est l'image de A par la **rotation** de centre O et d'angle θ si, et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}.$$

On appelle **matrice de rotation** de centre O et d'angle θ la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

- L'image de $\vec{u}$ par la **rotation** de centre O et d'angle θ est le vecteur $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Exercices résolus

Méthode 6 Résoudre un système d'équations

Énoncé

1. Mettre le système $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2z-y=0 \\ 3x+2z+4y=7 \end{cases}$ sous forme d'équation matricielle en justifiant.

2. En déduire les solutions du système.

Solution

1. Le système $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2z-y=0 \\ 3x+2z+4y=7 \end{cases}$ équivaut à $AX=B$

où $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$. 1

En effet : $AX=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+z \\ -y+2z \\ 3x+4y+2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2z-y \\ 3x+4y+2z \end{pmatrix}$.

Donc, par identification des coefficients, $AX=B$

si, et seulement si : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2z-y=0 \\ 3x+2z+4y=7 \end{cases}$

2. A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 2

$AX=B \Leftrightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B$ donc $X=A^{-1}B$. 3

$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 4

Donc le système a pour solution $x=-1$; $y=2$ et $z=1$. 5

Conseils & Méthodes

1 Bien ranger les coefficients de A dans le même ordre que ceux de X (x, puis y, puis z).

2 Utiliser la calculatrice.

3 Résoudre l'équation matricielle Méthode 5.

4 Calculer le produit matriciel à la calculatrice ou à la main Méthode 2.

5 Ne pas oublier de conclure en donnant la solution.

À vous de jouer !

11 **1.** Mettre le système $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x-z+y=-1 \\ y-x+z=5 \end{cases}$ sous forme d'équation matricielle en justifiant.

2. En déduire les solutions du système.

12 **1.** Mettre le système $\begin{cases} 2x+6y-5t+2u=-27 \\ 3x-y-7u+2t=-3 \\ 5u-3t+8y=-13 \\ 6x+y-2u+t=0 \end{cases}$ sous forme d'équation matricielle en justifiant.

2. En déduire les solutions du système.

13 **1.** Mettre le système $\begin{cases} x+y=15 \\ x-z=10 \\ z-y=-5 \end{cases}$ sous forme d'équation matricielle en justifiant.

2. En déduire les solutions du système.

14 **1.** Mettre le système $\begin{cases} 2a+3b+2d=65-2a+6c \\ -5a-3b+3c=d+3b-49 \\ 4a+3b+2d=5c-3a+52 \\ a+b+3c+d=11+3c \end{cases}$ sous forme d'équation matricielle en justifiant.

2. En déduire les solutions du système.

↪ Exercices 59 à 61 p. 184

5 Graphes

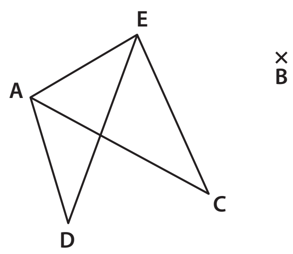
Définitions Graphes non orienté et orienté

• Un **graphe non orienté d'ordre** ***n*** est un ensemble de *n* points : les **sommets**, reliés entre eux (ou non) par des lignes : les **arêtes**.
• Un **graphe orienté d'ordre** ***n*** est un ensemble de *n* points reliés entre eux (ou non) par des flèches : les **arcs**. Un sommet peut être relié à lui-même par une boucle.
• Un sommet est **adjacent** à un autre s'ils sont reliés par une arête ou un arc.
• Un sommet adjacent à aucun autre est dit **isolé**.
• Le **degré** d'un sommet est son nombre d'arêtes ou d'arcs (les boucles comptant deux fois).
• Un **graphe complet** est un graphe dans lequel tous les sommets sont adjacents entre eux.

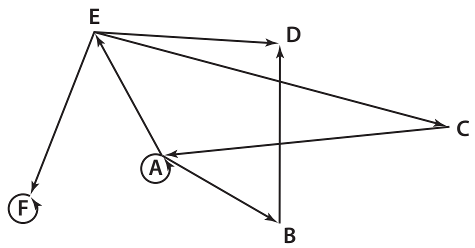
Définitions Parcours dans un graphe

• Dans un graphe non orienté (resp. orienté), une **chaîne** (resp. un **chemin**) **de longueur** ***n*** est une succession de *n* arêtes (resp. arcs) telles que l'extrémité de chacune est l'origine de la suivante (sauf pour la dernière arête).
• Si l'origine de la première arête et l'extrémité de la dernière coïncident, on dit que la chaîne (resp. le chemin) est **fermé(e)**.
• Si la chaîne (resp. chemin) fermé(e) est composé(e) d'arêtes (resp. arcs) toutes distinctes, on parle alors de **cycle** (resp. **circuit**).

Exemples



Graphe Δ



Graphe Γ

① Le graphe Δ est un graphe non orienté d'ordre 5 avec les degrés suivants.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	3	0	2	2	3

B est un sommet isolé.
A-D-E-A-C est une chaîne de longueur 4 reliant A à C.
A-D-E-C-A est une chaîne fermée de longueur 4, c'est même un cycle de longueur 4.

② Le graphe Γ est un graphe orienté d'ordre 6 avec les degrés suivants.

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	5	2	2	2	4	3

A et F possèdent une boucle, comptée deux fois dans leur degré.
A-E-D est un chemin de longueur 2 reliant A à D.
E-C-A-A-E est un circuit de longueur 4.
E-C-A-E est un circuit de longueur 3.

Proposition Somme des degrés

Dans un graphe, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

Remarque En conséquence, la somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours paire.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Déterminer les caractéristiques d'un graphe

Énoncé

On considère le graphe orienté ci-contre.

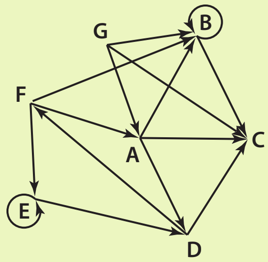
1. Déterminer l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.

2. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.

3. Déterminer un chemin de longueur 5 reliant A à C.

4. Peut-on trouver un circuit d'origine A ?

5. Peut-on trouver un circuit d'origine C ?



Solution

1. Le graphe est d'ordre 7 car il possède 7 sommets.

Le degré de chaque sommet est donné dans le tableau ci-dessous.

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	5	6	4	4	4	4	3

1

2. La somme de tous les degrés vaut 5 + 6 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3, soit 30.

$\frac{30}{2} = 15$ donc ce graphe compte 15 arcs.

3. Un chemin de longueur 5 reliant A à C est A-D-F-B-B-C.

4. Un circuit d'origine A est, par exemple, A-D-F-A.

5. S'il existait un circuit d'origine C, alors C serait l'origine d'au moins un arc. 2

Ce n'est pas le cas, donc il n'y a pas de circuit d'origine C.

Conseils & Méthodes

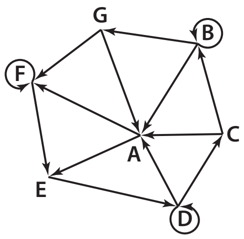
1 Ne pas oublier que, lorsque que l'on détermine le degré d'un sommet, une boucle compte double.

La somme de tous les degrés doit être paire.

2 Il faut faire attention au sens des flèches dans un graphe orienté.

À vous de jouer !

15 On considère le graphe orienté suivant.



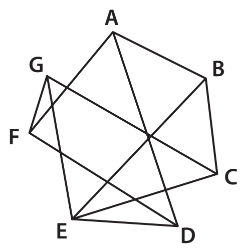
1. Déterminer l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.
2. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
3. Déterminer un chemin de longueur 5 reliant G à C.
4. Déterminer un circuit d'origine A.

16 Construire un graphe non orienté d'ordre 4 composé de 3 arêtes. Donner le degré de chaque sommet.

17 Construire un graphe non orienté d'ordre 4 composé de 5 arêtes. Donner le degré de chaque sommet.

18 Construire un graphe non orienté d'ordre 5 composé de 7 arêtes. Donner le degré de chaque sommet.

19 On considère le graphe non orienté suivant.



1. Déterminer l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.
2. En déduire par un calcul le nombre d'arêtes de ce graphe.
3. Déterminer une chaîne de longueur 8 reliant F à D.
4. Déterminer un cycle d'origine A.

20 Construire un graphe non orienté d'ordre 4 composé de 3 arêtes. Donner le degré de chaque sommet.

↪ Exercices 62 à 69 p. 184

Cours

6 Matrices d'adjacence

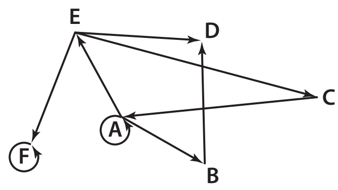
Définition Matrice d'adjacence

À tout graphe G (orienté ou non) d'ordre p, dont les sommets sont notés s_1 ; s_2 ; ... ; s_p, on peut associer une matrice carré d'ordre p : $M = (m_{ij})$ où m_{ij} est le nombre d'arcs ou d'arêtes reliant les sommets s_i et s_j.

Cette matrice est appelée **matrice d'adjacence associée à G.**

Exemple

On note $M = (m_{ij})$ la matrice d'adjacence d'ordre 6 associée au graphe G_o



ci-contre (dans l'ordre alphabétique) : $M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Théorème Nombre de chemins de longueur n

Soit G un graphe orienté d'ordre p (de sommets s_1 ; s_2 ; ... ; s_p) et M sa matrice d'adjacence d'ordre p.
Si on note $M^n = (m_{ij}^{(n)})$, alors $m_{ij}^{(n)}$ est le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_j.

Démonstration

▶ VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e06-04
ØLJEN
Les maths en finesse

On démontre par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ la proposition P_n : « $M^n = (m_{ij}^{(n)})$ où $m_{ij}^{(n)}$, est le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_j ».

Initialisation : $M = (m_{ij})$ où m_{ij} est bien le nombre de chemins de longueur 1, c'est-à-dire d'arcs, reliant s_i à s_j.

Hérédité : s'il existe un rang n tel que P_n est vraie, alors :

$M^{n+1} = M^n \times M = (m_{i1}^{(n)} m_{1j} + m_{i2}^{(n)} m_{2j} + ... + m_{ip}^{(n)} m_{pj})$.

Or, pour tout $k \in \{1 ; 2 ; ... ; p\}$ $m_{ik}^{(n)}$ représente le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_k et m_{kj} le nombre de chemins, de longueur 1 reliant s_k à s_j, donc $m_{ik}^{(n)} m_{kj}$ représente le nombre de chemins de longueur $n + 1$ reliant s_i à s_j en passant par s_k à l'étape n.
En sommant ces quantités pour tous les sommets s_k, on obtient le nombre de chemins de longueur $n + 1$ reliant s_i à s_j. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : la proposition est vraie au rang $n = 1$. De plus, pour tout entier n non nul, si P_n est supposée vraie, alors on a montré que P_{n+1} était vraie. Ainsi, d'après le principe de récurrence sur l'ensemble des entiers naturels, P_n est vraie pour tout entier n non nul.

Exemple

On reprend le graphe et la matrice d'adjacence de l'exemple précédent.

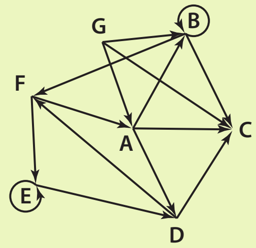
$M^5 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$, il y a donc, par exemple, **3** chemins de longueur 5 reliant **C** à **F**.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 8 Déterminer une utiliser la matrice d'adjacence

Énoncé



On considère le graphe orienté ci-contre.

1. Déterminer une matrice d'adjacence M de ce graphe.

2. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 reliant A à C ?

Solution

1. Une matrice d'adjacence (dans l'ordre alphabétique)

est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **1**

2. $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 7 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, **2** $m_{13}^{(5)} = 8$ donc il y a 8 chemins de longueur 5 reliant A à C.

Conseils & Méthodes

1 Pour trouver cette matrice d'adjacence, on peut dresser ce tableau :

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

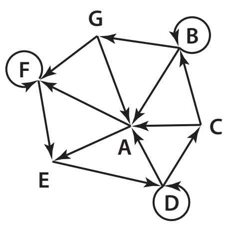
Pour remplir ce tableau, par exemple la case située à la ligne B colonne C, indiquer le nombre d'arêtes/arcs allant de B à C.

La matrice d'adjacence correspond aux coefficients du tableau.

2 Le calcul de M^5 s'obtient par calculatrice.

À vous de jouer !

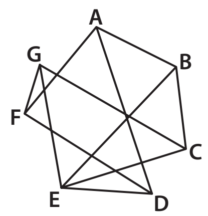
21 On considère le graphe orienté suivant.



1. Déterminer une matrice d'adjacence M de ce graphe.

2. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 6 reliant D à B ?

22 On considère le graphe non orienté suivant.



1. Déterminer une matrice d'adjacence M de ce graphe.

2. Combien y-a-t-il de chaînes de longueur 10 reliant E à F ?

↪ Exercices 70 à 78 p. 185

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e06-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Manipuler des suites de matrices

↪ Cours 4 p. 172

Énoncé

On considère une suite (U_n) de matrices de dimension 2×1 telle que :

$$U_{n+1} = AU_n + B,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice X telle que $AX + B = X$.

2. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ pour tout entier n.
Montrer que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier n.

3. En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n et A.

Solution

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **1**, alors $AX + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y+6 \\ 2y+2 \end{pmatrix}$.

Donc $AX + B = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3y+6 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+6 = x \\ 2y+2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -2 \end{cases}$. **2**

Donc, en choisissant arbitrairement $x = 0$ **3**, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit $V_n = U_n - X$, alors $V_{n+1} = U_{n+1} - X = AU_n + B - X$.

Or $AX + B = X$ **4** donc :

$V_{n+1} = AU_n + B - (AX + B) = AU_n + B - AX - B = AU_n - AX = A(U_n - X)$.

De plus $V_n = U_n - X$ donc $V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier n.

3. Pour tout entier n, $V_{n+1} = AV_n$.

De plus $V_0 = U_0 - X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $V_n = A^n V_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $V_n = U_n - X$, donc $U_n = V_n + X = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Conseils & Méthodes

1 Poser X en notant tous ses coefficients avec une inconnue.

2 Traduire l'équation demandée sous la forme d'un système et le résoudre.

3 Le système admet plusieurs solutions, on demande de n'en retenir qu'une.

4 Ne pas oublier qu'une égalité fonctionne dans les deux sens.

À vous de jouer !

23 On considère une suite (U_n) de matrices de dimension 2×1 telle que :

$$U_{n+1} = AU_n + B,$$

avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice X telle que $AX + B = X$.

2. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ pour tout entier n.
Montrer que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier n.

3. En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n et A.

24 On considère une suite (U_n) de matrices de dimension 2×1 telle que :

$$U_{n+1} = AU_n + B,$$

avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice X telle que $AX + B = X$.

2. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - X$ pour tout entier n.
Montrer que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout entier n.

3. En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n et A.

↪ Exercices 99 à 101 p. 188

Exercices résolus

Méthode 10 Représenter des transformations géométriques

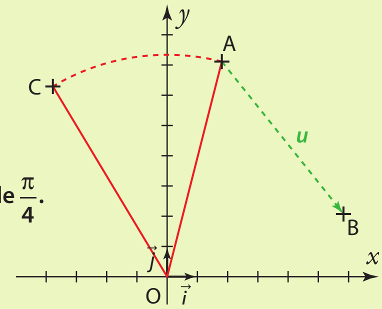
↪ Cours 4 p. 172

Énoncé

On considère, dans un plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, le point $A(\sqrt{3}\,;7)$.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de B, l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2. Donner les coordonnées de C, l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



Solution

1. La matrice colonne représentant les coordonnées de A est $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\7\end{pmatrix}$ 1,
celle représentant les coordonnées de $\vec{u}$ est $\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$. 2

$\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$ donc B a pour coordonnées $(4+\sqrt{3}\,;2)$.

2. La matrice colonne représentant les coordonnées de A est $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\7\end{pmatrix}$, la matrice associée à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est $\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$. 3

En utilisant les valeurs des cosinus et de sinus de référence,

on a $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 7\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}-7\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{6}+7\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

4 donc $C\left(\frac{\sqrt{6}-7\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{6}+7\sqrt{2}}{2}\right)$.

Conseils & Méthodes

1 Attention à bien écrire les coordonnées des points dans une matrice colonne.

2 Pour déterminer l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$, calculer la somme des matrices colonnes représentant les coordonnées de A et de $\vec{u}$.

3 Traduire l'énoncé par des matrices.

4 Pour calculer les coordonnées du point image, calculer le produit de la matrice associé à la rotation avec la matrice colonne représentant les coordonnées de A.

À vous de jouer !

25 On considère, dans un plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, le point $A\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2. Donner les coordonnées de C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

26 On considère, dans un plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, le point $A\left(\sqrt{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de B l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

2. Donner les coordonnées de C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

↪ Exercices 102 à 106 p. 188

Exercices apprendre à démontrer

Le théorème à démontrer Nombre de chemins de longueur n

Soit G un graphe orienté d'ordre p (de sommets $s_1 ; s_2 ; \dots ; s_p$) et M sa matrice d'adjacence. Si on note $M^n = (m_{ij}^{(n)})$ alors $m_{ij}^{(n)}$ est le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_j.

On utilisera un raisonnement par récurrence.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e06-04

ØLJEN
Les maths en finesse

Comprendre avant de rédiger

Pour l'hérédité, un chemin de longueur $n + 1$ s'obtient en ajoutant un arc à un chemin de longueur n, ce qui permettra d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Rédiger

Étape 1
On précise l'affirmation que l'on démontre par récurrence.

Étape 2
On valide l'initialisation en utilisant la définition de la matrice d'adjacence.

L'initialisation porte sur l'entier $n = 1$

Étape 3
On montre l'hérédité en exprimant M^{n+1} comme le produit M^nM.

Attention à ne pas se tromper dans les indices lors du produit

Étape 4
En utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition de la matrice d'adjacence, on décrit ce que représente chaque terme de la somme q_{ij}.

Étape 5
On en déduit une interprétation de la somme q_{ij}, ce qui valide l'hérédité.

Préciser que l'on valide la proposition au rang $n + 1$

Étape 6
On conclut.

Conclure de façon détaillée.

La démonstration rédigée

Montrons par récurrence l'affirmation P_n :
« $M^n = (m_{ij}^{(n)})$ où $m_{ij}^{(n)}$ est le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_j ».

Initialisation (pour $n = 1$) : $M^1 = M = (m_{ij})$
où, par définition, m_{ij} est le nombre d'arcs, donc le nombre de chemins de longueur 1, reliant s_i à s_j. Donc P_1 est vérifiée.

Hérédité : s'il existe un rang n tel que P_n est vraie, alors :
$M^{n+1} = M^n M = (q_{ij})$ où, pour tout i et j :
$q_{ij} = m_{i1}^{(n)} \times m_{1j} + m_{i2}^{(n)} \times m_{2j} + \dots + m_{ip}^{(n)} \times m_{pj}$.

Or, pour tout entier $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; p\}$, par hypothèse de récurrence:
- $m_{ik}^{(n)}$ est le nombre de chemins de longueur n reliant s_i à s_k ;
- m_{kj} est le nombre d'arcs reliant s_k à s_j ;

donc $m_{ik}^{(n)} m_{kj}$ est le nombre de chemins de longueur n+1 reliant s_i à s_j en passant par s_k à l'étape n.

Un chemin de longueur $n + 1$ reliant s_i à s_j passant *a fortiori* par un sommet s_k pour $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; p\}$, q_{ij} représente donc la totalité des chemins de longueur $n + 1$ reliant s_i à s_j. Donc P_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : la proposition est vraie au rang $n = 1$. De plus, pour tout entier n non nul, P_n est héréditaire. Ainsi, P_n est vérifiée pour tout entier n non nul.

Pour s'entraîner

Soit A, B et P telles que P est inversible et $A = PBP^{-1}$. Montrer que, pour tout entier n, $A^n = PB^nP^{-1}$.